Technische Universität Graz

Modifizierte Randintegralgleichungen für elektromagnetische Streuprobleme

M. Windisch

Berichte aus dem Institut für Numerische Mathematik

Bericht 2007/1

Technische Universität Graz

Modifizierte Randintegralgleichungen für elektromagnetische Streuprobleme

M. Windisch

Berichte aus dem
Institut für Numerische Mathematik

Bericht 2007/1

Technische Universität Graz
Institut für Numerische Mathematik
Steyrergasse 30
A 8010 Graz

WWW: http://www.numerik.math.tu-graz.at

Modifizierte Randintegralgleichungen für elektromagnetische Streuprobleme

vorgelegt der Fakultät für Technische Mathematik und Technische Physik
der Technischen Universität Graz
zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom Ingenieur (Dipl.-Ing.)

vorgelegt von

Markus Windisch

Betreuung: Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik
Technische Universität Graz

2007

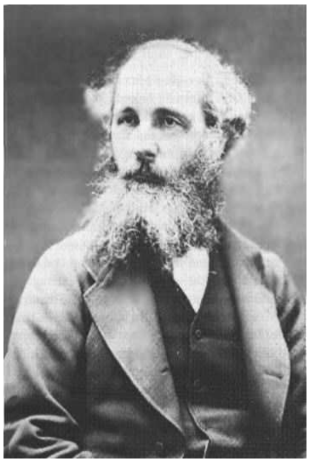
Vorwort

Hiermit möchte ich mich bei Herrn Professor Steinbach bedanken, der es mir ermöglicht hat dieses interessante Thema zu bearbeiten und trotz eines vollen Terminplans stets Zeit fand für eine intensive Betreuung. Besonderen Dank schulde ich auch Herrn Dr. Günther Of, bei dem ich selbst für die wildesten Fragen und abstrusesten Theorien immer ein offenes Ohr fand. In diesem Sinne möchte ich mich auch bei meinen zwei Arbeitplatzkollegen Dipl.Ing. Sarah Engleder und Peter Urthaler bedanken, denen so manches Streitgespräch wohl einige Nerven gekostet hat. Außerdem möchte ich mich bei der Technischen Universität Graz bedanken für die finanzielle Unterstützung in Form eines Förderungsstipendiums, welches mir ermöglicht hat, das GAMM-Seminar in Leipzig und Herrn Professor Hiptmair in Zürich zu besuchen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Elektromagnetische Schwingungen sind aus der heutigen Physik kaum mehr wegzudenken, doch vor noch rund 200 Jahren war den Physikern kein Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Phänomenen bekannt [1]. Erst 1820 entdeckte der dänische Philosoph und Physiker Hans Christian Oersted (1777-1851) durch Zufall bei einem Experiment, das er seinen Studenten vorführte, dass eine Kompassnadel durch einen elektrischen Strom abgelenkt wurde. Dies war die erste Beobachtung eines Zusammenhangs von Elektrizität und Magnetismus. Mit dieser Entdeckung lenkte er die Aufmerksamkeit der damaligen Forscher auf sich, unter denen sich vor allem André Ampère (1775-1836) hervortat. Er erkannte, dass zwei parallele Leiter, in denen der Strom in die gleiche Richtung fließt, eine Anziehungskraft aufeinander ausüben. Außerdem war er bereits in der Lage, diesen Effekt quantitativ zu beschreiben und legte damit den Grundstein der mathematischen Theorie des Elektromagnetismus, dessen Bezeichnung ebenfalls auf Ampère zurück geht. Zur selben Zeit beschäftigte sich auch Michael Faraday (1791-1867) mit der Entdeckung von Oersted und konnte 1831 das Gesetz der elektromagnetischen Induktion angeben, welches ihn in die Lage versetzte, den ersten Dynamo zu konstruieren. Seine Experimente bildeten somit die Grundlage der modernen elektromagnetischen Technologie. Jedoch war die



James Clerk Maxwell

[1] Zur Geschichte des Elektromagnetismus siehe http://leifi.physik.uni-muenchen.de/web_ph10/geschichte bzw. http://www.wikipedia.org

daraus resultierende Theorie noch nicht vollständig, erst 1862 veröffentlichte James Clerk Maxwell (1831-1879) in seiner Arbeit 'On Physical Lines of Force' die Theorie der elektromagnetischen Wellen in jener Form, wie wir sie heute kennen. Bemerkenswert ist hierbei, dass Maxwell diese nicht anhand von Experimenten postulierte, sondern diese aus der mathematischen Theorie schlussfolgerte. Die Maxwell'schen Gleichungen gehören dank ihrer Allgemeinheit wahrscheinlich zu den wichtigsten Resultaten der Physik. Jedoch sind sie in ihrer allgemeinen Form oft zu komplex, um sie direkt praktisch einsetzen zu können. Deshalb wird, meist ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, ein einfacheres Modell abgeleitet, je nachdem welche Größen in der Anwendung vernachlässigbar sind. Auch das Modell der elektromagnetischen Streuung, das in dieser Arbeit behandelt wird, basiert auf diesem Ansatz. Im wesentlichen besteht das resultierende Modell aus einer partiellen Differentialgleichung, einer Randbedingung und einer Abstrahlbedingung. Im Allgemeinen sind solche partiellen Differentialgleichungen aber nicht explizit lösbar. Aus diesem Grund müssen geeignete numerische Näherungsverfahren verwendet werden. Zwei der bekannteren Methoden, die sich hierfür anbieten, sind die Finite Element Methode (FEM) und die Randelementmethode (BEM). Im Falle von Streuproblemen hat die Finite Element Methode jedoch den Nachteil, dass bei dieser Methode das Gebiet, in dem die Lösung berechnet werden soll, diskretisiert werden muss. Dieses ist bei Außenraumproblemen aber unendlich groß. Das bedeutet, dass bei der Finite Element Methode ein Teil des Gebietes 'abgeschnitten' wird, oder infinite Elemente verwendet werden, was wiederum weitere Schwierigkeiten mit sich bringt. Bei der Randelementmethode muss hingegen nur der Rand des Objektes, an dem die Welle gestreut wird, diskretisiert werden. Jedoch birgt diese Methode ein anderes Problem in sich. Betrachtet man nämlich das Streuproblem im Innenraum, so besitzt dieses Eigenfrequenzen, bei denen das Streuproblem keine eindeutige Lösung besitzt. Dies entspricht dem Eigenwertproblem der inneren Maxwell-Gleichungen. Das Außenraumproblem besitzt hingegen für jede Frequenz eine eindeutige Lösung, jedoch geht diese Eigenschaft bei der Standardmodellierung durch Randintegralgleichungen verloren, falls eine Eigenfrequenz für das Innenraumproblem vorliegt. Aus diesem Grund führten Brakhage und Werner (siehe [3]) für das Streuproblem der Akustik eine kombinierte Randintegralgleichung ein, die dieses Problem im Falle der Helmholtz-Gleichung behob. Allerdings konnten sie ihr Ergebnis nur für glatte Ränder zeigen. Basierend auf diesem Ansatz wurden deshalb sogenannte modifizierte Randintegralgleichungen eingeführt, bei welchen auch für nicht glatte Ränder die eindeutige Lösbarkeit rigoros beweisbar ist. Dies wurde zunächst in [10] für die Helmholtz-Gleichung gezeigt, eine Arbeit für die Maxwell-Gleichungen ist zum Beispiel [9]. In [16] wurde eine alternative Formulierung für die Helmholtz-Gleichung vorgeschlagen, in dieser Arbeit soll diese Idee auf die Maxwell-Gleichungen übertragen werden.

Die Diplomarbeit ist folgendermaßen gegliedert:

Im ersten Kaptitel wird ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, durch diverse Annahmen bzw. Vereinfachungen, ein System hergeleitet, das den Ausgangspunkt für die weiteren mathematischen Untersuchungen darstellt. Dieses System besteht dabei aus einer partiellen Differentialgleichung, einer Randbedingung und der Silver-Müller-Abstrahlbedingung.

Im zweiten Kapitel wird zunächst auf die geometrischen Voraussetzungen an das Gebiet Ω

eingegangen. Danach werden kurz die klassischen Sobolev-Räume eingeführt, um schließlich auf die speziellen Sobolev-Räume für die Maxwell-Gleichungen eingehen zu können.
Im dritten Kapitel wird die klassische Stratton-Chu Darstellungsformel für den Innen- und Außenraum hergeleitet. Motiviert durch die Darstellungsformel werden dann entsprechende Potentialoperatoren eingeführt und ihre Eigenschaften diskutiert. Danach werden die dazugehörigen Randintegraloperatoren definiert, und einige wichtige Eigenschaften gezeigt.
Im vierten Kapitel wird zunächst kurz auf die Problematik der nicht eindeutigen Lösbarkeit der herkömmlichen Randintegralgleichungen für Eigenfrequenzen eingegangen. Danach wird kurz der klassische Lösungsansatz von Brakhage und Werner behandelt, und die Modifikationen von Buffa und Hiptmair besprochen. Danach wird eine alternative modifizierte Randintegralgleichung eingeführt, und deren eindeutige Lösbarkeit bewiesen. Die Arbeit schließt mit einem kurzen Ausblick.

1 Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel soll zunächst kurz auf die Maxwellschen Gleichungen und ihre Bedeutungen eingegangen werden. Da diese in ihrer Allgemeinheit ein kaum zu handhabendes System von partiellen Differentialgleichungen darstellen, werden danach Schritt für Schritt diverse Vereinfachungen vorgenommen, bis nur noch eine partielle Differentialgleichung mit diversen Nebenbedingungen übrig ist. Dies soll dann das mathematische Ausgangsproblem darstellen, welches in den darauf folgenden Kapiteln behandelt wird. Die Vorgehensweise und Notation ist dabei an [26] angelehnt.

1.1 Die Maxwellschen Gleichungen

Das folgende System von partiellen Differentialgleichungen sind die sogenannten Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form, welche im gesamten Raum gelten sollen:

$$\mathbf{curl}\,\tilde{\mathbf{E}}(x,t) = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}(x,t)}{\partial t}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{curl}\,\tilde{\mathbf{H}}(x,t) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}(x,t)}{\partial t} + \tilde{\mathbf{j}}(x,t), \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}}(x,t) = \tilde{\rho}(x,t), \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}}(x,t) = 0. \tag{1.4}$$

Hierbei steht $\tilde{\mathbf{E}}$ für die elektrische Feldstärke, $\tilde{\mathbf{D}}$ für die dielektrische Verschiebung, $\tilde{\mathbf{H}}$ für die magnetische Feldstärke, $\tilde{\mathbf{B}}$ für die magnetische Flußdichte und $\tilde{\mathbf{j}}$ für die elektrische Stromdichte. Die einzelnen Gleichungen bringen hierbei verschiedene physikalische Gesetze zum Ausdruck:

- Gleichung (1.1) ist auch als Induktionsgesetz (bzw. Faradaysches Gesetz) bekannt, und bringt zum Ausdruck, dass eine Änderung des magnetischen Flusses einen elektrischen Strom induziert.
- Gleichung (1.2) wird als Durchflutungsgesetz (bzw. Ampèresches Gesetz) bezeichnet, und bedeutet, dass elektrische Ströme magnetische Wirbel erzeugen. Hierbei wird die dielektrische Verschiebung $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{D}}(x,t)$ ebenfalls als elektrischer Strom aufgefasst.
- Die Gleichungen (1.3) und (1.4), welche als elektrisches und magnetisches Gaußsches Gesetz bekannt sind, bringen zum Ausdruck, dass die Quellen elektrischer Felder elektrischen Ladungen entsprechen, bzw. dass magnetische Felder quellenfrei sind.

Eine weitere nützliche Beziehung basiert auf der Tatsache, dass die elektrische Ladung erhalten bleiben muss. Dies wird durch die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}(x,t) = -\frac{\partial \tilde{\rho}(x,t)}{\partial t}. \tag{1.5}$$

zum Ausdruck gebracht.
Bildet man nun die Divergenz der Gleichungen (1.1) und (1.2), so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}}(x,t) - \tilde{\rho}(x,y)) = 0.$$

Dies hat zur Folge, dass die Gleichungen (1.3) und (1.4) immer halten, falls sie zu einem Zeitpunkt gelten. Obwohl die Gleichungen (1.3) und (1.4) aus (1.1) und (1.2) folgen, dürfen diese im Allgemeinen bei numerischen Ansätzen nicht vernachlässigt werden.

1.2 Der Zeitbereich

Eine erste Vereinfachung, die getroffen wird, ist die Annahme, dass nur von einer zeitharmonischen Erregung ausgegangen werden soll, d.h. die Erregungsströme und die Ladungen sind sinusperiodisch bezüglich der Zeit. Aufgrund der Linearität der Maxwellgleichungen hat dies jedoch zur Folge, dass alle auftretenden Felder sinusperiodisch sind, d.h. alle Felder können mit Hilfe der Frequenz ω in der Form

$$\mathbf{F}(x,t) = \mathbf{F}(x)e^{i\omega t}$$

dargestellt werden (wobei $\mathbf{F}$ für ein beliebiges Feld steht). Setzt man dies nun in die Maxwellgleichungen (1.1)-(1.4) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\, \tilde{\mathbf{E}}(x) &= -i\omega \tilde{\mathbf{B}}(x), && (1.6)\\ \mathbf{curl}\, \tilde{\mathbf{H}}(x) &= i\omega \tilde{\mathbf{D}}(x) + \tilde{\mathbf{j}}(x), && (1.7)\\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}}(x) &= \tilde{\rho}(t), && (1.8)\\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}}(x) &= 0. && (1.9) \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Felder nun komplexe Funktionen sind. Verwendet man nun noch die Kontinuitätsgleichung (1.5), so kann auch noch die Ladungsdichte via $-i\omega\tilde{\rho} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}$ eliminiert werden.

Bemerkung 1.1. *Dieser Ansatz ist durchaus für viele Anwendungen realistisch, da oft wie zum Beispiel bei der Radarüberwachung oder bei Wechselstrom eine bestimmte Frequenz vorherrscht. Allerdings kann dieser Ansatz ebenso bei einer allgemeineren Erregung gemacht werden, wenn man eine Fourierentwicklung vornimmt. Hierbei wären dann natürlich mehrere Systeme mit verschiedenen Frequenzen zu lösen.*

1.3 Materialannahmen

Um das System (1.6)-(1.9) weiter vereinfachen zu können, ist es notwendig, Materialbeziehungen zu betrachten, welche einen Zusammenhang zwischen $\tilde{\mathbf{D}}$ und $\tilde{\mathbf{E}}$ bzw. zwischen $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{H}}$ herstellen. Hierbei können nun drei Fälle unterschieden werden:

- Vakuum: Im leeren Raum gelten die Beziehungen

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}},$$
$$\tilde{\mathbf{B}} = \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}.$$

  Hierbei steht

$$\varepsilon_0 := \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{Am}{Vs} \approx 8.855 \cdot 10^{-12} \frac{Am}{Vs}$$

  für die elektrische Feldkonstante des Vakuums und

$$\mu_0 := 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \approx 1.2566 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

  für die magnetische Feldkonstante des Vakuums. Außerdem gilt $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$, wobei c für die Lichtgeschwindigkeit steht. Dies wird jener Fall sein, auf welchen im Rahmen dieser Arbeit eingegangen wird, da die Streuung von elektromagnetischen Wellen meist in einer von einem Gas erfüllten Umgebung betrachtet wird, und diese sich meist ähnlich wie Vakuum verhalten.

- inhomogene, isotrope Materialien: Dies ist der in der Praxis am häufigsten auftretende Fall, und beschreibt ein Gebiet, in dem sich verschiedene isotrope Materialien befinden. In diesem Fall gilt

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}, \qquad \tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}, \tag{1.10}$$

  wobei ε und μ skalare, positive und beschränkte Funktionen des Ortes sind. Bei der Modellierung werden beide Funktionen jedoch meist als stückweise konstant angenommen.

- inhomogene, anisotrope Materialien: Dies ist der allgemeinste Fall, der für einige Materialien (zum Beispiel Quarz) angenommen wird. Hierbei sind μ und ε positiv definite Matrixfunktionen in Abhängigkeit vom Ort.

Eine weitere wichtige Tatsache ist, dass in einem leitenden Material das elektrische Feld selbst Ströme hervorruft. Ist die elektrische Feldstärke nicht zu groß, kann angenommen werden, dass das Ohm'sche Gesetz

$$\tilde{\mathbf{j}} = \sigma \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{j}}_a \tag{1.11}$$

hält. Hierbei ist σ die elektrische Leitfähigkeit, welche im Allgemeinen eine positiv semidefinite Matrixfunktion des Ortes ist. $\tilde{\mathbf{j}}_a$ beschreibt die angelegte Stromstärke. In Vakuum (oder in Luft bei geringeren Feldstärken) gilt jedoch $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$.
Verwendet man nun die Annahmen (1.10) und (1.11) so erhält das zeitharmonische Maxwellsystem die folgende Form:

$$\mathbf{curl}\,\tilde{\mathbf{E}}(x) = -i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}(x), \tag{1.12}$$
$$\mathbf{curl}\,\tilde{\mathbf{H}}(x) = i\omega\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}(x) + \sigma\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{j}}_a(x), \tag{1.13}$$
$$\mathrm{div}\,(\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}(x)) = -\frac{1}{i\omega}\mathrm{div}\,(\sigma\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{j}}_a), \tag{1.14}$$
$$\mathrm{div}\,(\mu\tilde{\mathbf{H}}(x)) = 0. \tag{1.15}$$

Normiert man nun noch die Felder

$$\mathbf{E} = \varepsilon_0^{1/2}\tilde{\mathbf{E}}, \qquad \mathbf{H} = \mu_0^{1/2}\tilde{\mathbf{H}}$$

und setzt

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon - \frac{i\sigma}{\omega}\right), \qquad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0},$$

so erhält man schließlich

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{E}(x) = -ik\mu_r\mathbf{H}(x), \tag{1.16}$$
$$\mathbf{curl}\,\mathbf{H}(x) = ik\varepsilon_r\mathbf{E}(x) + \frac{1}{ik}\mathbf{F}, \tag{1.17}$$
$$\mathrm{div}\,(\varepsilon_r\mathbf{E}(x)) = \frac{1}{k^2}\mathrm{div}\,\mathbf{F}, \tag{1.18}$$
$$\mathrm{div}\,(\mu_r\mathbf{H}(x)) = 0, \tag{1.19}$$

wobei die Erregung nun durch $\mathbf{F} = ik\mu_0\tilde{\mathbf{j}}_a$ gegeben ist, und $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \geq 0$ die Wellenzahl ist. Für $k > 0$ ergeben sich die Gleichungen (1.18) und (1.19) durch Bildung der Divergenz aus (1.16) und (1.17). Eliminiert man nun das magnetische Feld $\mathbf{H}$ aus den Gleichungen (1.16) und (1.17) so kommt man zu folgender partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\mathbf{curl}\,(\frac{1}{\mu_r}\mathbf{curl}\,\mathbf{E}) - k^2\varepsilon_r\mathbf{E} = -\mathbf{F}. \tag{1.20}$$

Natürlich wäre auch eine Elimination des elektrischen Feldes möglich gewesen, da in der verwendeten Literatur aber meist das magnetische Feld eliminiert wird, wird auch hier dieser Ansatz verwendet. Formel (1.20) gilt nun aufgrund der Herleitung für ein beliebiges inhomogenes isotropes Material. Da sich diese Arbeit aber auf die elektromagnetische

Streuung bezieht, haben wir es aber im Normalfall mit Luft als Medium zu tun, welche sich für geringe Feldstärken wie Vakuum verhält. Deshalb gilt in diesem Spezialfall $\varepsilon_r = \mu_r = 1$. Dadurch vereinfacht sich Gleichung (1.20) zu

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -\mathbf{F}. \tag{1.21}$$

1.4 Rand- und Abstrahlbedingungen

Gleichung (1.21) ist allerdings nicht ausreichend, um das elektromagnetische Streuproblem zu beschreiben. Hierzu sind noch geeignete Randbedingungen erforderlich. Da Gleichung (1.20) bei einer Unstetigkeit von ε_r bzw. μ_r, was beim Übergang zwischen verschiedenen Materialien passieren kann, nicht erfüllt ist, ist es nötig, dass die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ stetig beim Übergang zwischen zwei Materialien ist (siehe [26]). Dies kann mathematisch durch

$$\vec{n} \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_a) \times \vec{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \tag{1.22}$$

beschrieben werden, wobei Γ das Interface zwischen Innen- und Außenraum beschreibt, $\vec{n}$ den dazugehörigen äußeren Normalenvektor, $\mathbf{E}_i$ und $\mathbf{E}_a$ die Grenzwerte des elektrischen Feldes bei einem Übergang von innen bzw. außen beschreiben sollen.
Für das magnetische Feld gilt im allgemeinen

$$(\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_a) \times \vec{n} = \mathbf{j}_s \quad \text{auf } \Gamma,$$

wobei das tangentiale Vektorfeld $\mathbf{j}_s$ die Oberflächenstromdichte bezeichnet. Beschreibt Γ aber keine dünne leitende Schicht, bzw. hat $\mathbf{F}$ keine Singularitäten, welche Oberflächenströme auf Γ hervorrufen, so gilt $\mathbf{j}_s = 0$ (siehe [26]). In den meisten Fällen kann also

$$(\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_a) \times \vec{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

angenommen werden.
Will man nun die elektromagnetische Streuung an einem idealisierten perfekten Leiter betrachten, d.h. $\sigma = \infty$, so erhält man durch den Grenzübergang $\sigma \to \infty$ im Ohmschen Gesetz (1.11), dass $\mathbf{E}_i = 0$ für einen perfekten Leiter gilt. Verwendet man dies in Gleichung (1.22), so erhält man die Randbedingung

$$\vec{n} \times \mathbf{E}_a \times \vec{n} = 0 \tag{1.23}$$

für die Streuung an einem perfekten Leiter.
Teilt man das elektrische Feld nun in ein einkommendes und ein gestreutes Feld, d.h.

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s,$$

so kann die Erregung $\mathbf{F}$ als Erzeuger des einkommenden Feldes angesehen werden. Das gestreute Feld erfüllt dann die homogene Differentialgleichung $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}^s - k^2\mathbf{E}^s = 0$. Die beiden Felder erfüllen also das System

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}^i - k^2\mathbf{E}^i &= -\mathbf{F} && \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E}^s - k^2\mathbf{E}^s &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s &= \mathbf{E}_a, \end{aligned}$$

wobei Ω das Gebiet ist, das vom streuenden Objekt eingenommen wird, und $\Gamma = \partial\Omega$ dessen Rand ist. Nun wird das einkommende Feld $\mathbf{E}^i$ als bekannt vorausgesetzt, wodurch nur noch das gestreute Feld $\mathbf{E}^s$ zu ermitteln bleibt. Aus der Randbedingung für den perfekten Leiter (1.23) erhält man nun mit

$$\vec{n} \times \mathbf{E}^s \times \vec{n} = -\vec{n} \times \mathbf{E}^i \times \vec{n} = \mathbf{g}$$

eine geeignete Randbedingung für das gestreute Feld $\mathbf{E}^s$. Das gestreute Feld soll hierbei ein ausgehendes Feld beschreiben, dies wird durch die Abstrahlungsbedingung von Silver-Müller sichergestellt, diese lautet

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|(\mathbf{curl}\,\mathbf{E}^s \times \hat{x} - ik\mathbf{E}^s) = 0 \tag{1.24}$$

gleichmäßig für alle Richtungen von x, wobei $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ gilt. Anstatt dieser starken Bedingung kann alternativ auch die schwächere Bedingung

$$\int\limits_{\partial B_r} |\mathbf{curl}\,\mathbf{E}^s \times \vec{n} - ik\mathbf{E}^s|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gefordert werden, wobei B_r eine Kugel um den Ursprung mit Radius r bezeichnet.

1.5 Mathematisches Modell

Aufbauend auf diesen physikalischen Herleitungen kann nun das in dieser Arbeit betrachtete mathematische Modell definiert werden.
Gesucht ist ein Feld $\mathbf{U}$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} - k^2\mathbf{U} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \tag{1.25}$$

$$\vec{n} \times \mathbf{U} \times \vec{n} = \mathbf{g} \qquad \text{auf } \Gamma, \tag{1.26}$$

$$\int\limits_{\partial B_r} |\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \times \vec{n} - ik\mathbf{U}|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.27}$$

Im Verlaufe der Arbeit soll nun eine Randintegralgleichungsmethode hergeleitet werden, welche es ermöglicht, obiges Problem für einfachzusammenhängende und beschränkte Gebiete unabhängig von der Wellenzahl k lösen zu können. Hierbei werden zunächst die passenden Funktionenräume eingeführt, damit das Ausgangsproblem mathematisch korrekt beschrieben werden kann. Danach werden darauf aufbauend Potentialoperatoren eingeführt, welche die Bedingungen (1.25) und (1.27) erfüllen. Durch einen Grenzübergang dieser Potentialoperatoren auf den Rand werden danach Randintegralgleichungen gewonnen, durch deren Lösen die Bedingung (1.26) sichergestellt werden kann. Jedoch ist die dadurch gewonnene Randintegralgleichung nicht für jede Wellenzahl k eindeutig lösbar. Um auch dies gewährleisten zu können, werden im abschließenden Kapitel modifizierte Randintegralgleichungen eingeführt, welche die Unabhängigkeit der eindeutigen Lösbarkeit von k sicherstellen.

Bemerkung 1.2. *In den nächsten Abschnitten soll nicht nur die Differentialgleichung*

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} - k^2\mathbf{U} = 0$$

mit $k \in \mathbb{R}$ betrachtet werden, sondern soweit möglich die allgemeinere Gleichung

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2\mathbf{U} = 0$$

mit $\kappa \in \mathbb{C}$, betrachtet werden. Offensichtlich erhält man mit $\kappa = ik$ wieder die ursprüngliche Gleichung zurück. Diese Vorgehensweise ist darin begründet, dass bei der mathematischen Behandlung des Problems auch andere Richtungen von κ außer $\kappa = ik$ benötigt werden, und auch meist ohne Aufwand allgemeinere Aussagen gezeigt werden können.

2 Funktionenräume

In diesem Abschnitt wird zuerst auf die genauen geometrischen Voraussetzungen an das Gebiet Ω eingegangen. Danach werden kurz die klassischen Sobolevräume eingeführt, als Literatur wurden hierbei unter anderem die Standardwerke [25] und [1] verwendet. Im nächsten Teilkapitel werden dann einige Dichtheitseigenschaften bewiesen, die im darauf folgenden Kapitel benötigt werden. Im letzten Teilkapitel folgen die Sobolev-Räume für die Maxwell-Gleichungen, als Hauptreferenz sind hierbei die Paper [5] und [6] verwendet worden, welche sicher zu den wichtigsten Arbeiten im Bereich der Sobolev-Räume für die Maxwell-Gleichungen gehören.

2.1 Geometrische Voraussetzungen

Die meisten Aussagen in den folgenden Kapiteln sind im Allgemeinen nicht auf beliebigen Gebieten gültig, deshalb beschränken wir uns in der Folge auf sogenannte Lipschitz-Polyeder bzw. stückweise glatte Lipschitz-Gebiete. Diese sollen in Folge kurz beschrieben werden, für genauere Aussagen zu allgemeinen Lipschitz-Gebieten siehe [8].

Definition 2.1 (Lipschitz-Hypograph). *Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion, dann wird die Menge*

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n < f(x') \text{ für alle } x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

als Lipschitz-Hypograph bezeichnet.

Definition 2.2. *Eine offene Menge ist ein Lipschitz-Gebiet, falls ihr Rand kompakt ist und endliche Familien von Mengen $\{W_i\}$ und $\{\Omega_j\}$ existieren, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:*

1. *Die Familie $\{W_i\}$ ist eine endliche offene Überdeckung des Randes Γ.*
2. *Jede Menge Ω_i lässt sich durch Translationen bzw. Rotationen in einen Lipschitz-Hypographen überführen.*
3. *Es gilt $\Omega \cap W_i = \Omega_i \cap W_i$ für alle i.*

Definition 2.3 (Lipschitz-Polyeder). *Ein Gebiet Ω wird als Lipschitz-Polyeder bezeichnet, falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- *Ω wird durch eine endliche Anzahl ebener Polygone begrenzt,*

- *Ω ist ein Lipschitz-Gebiet,*
- *Ω ist einfach zusammenhängend.*

Bemerkung 2.4. *Ein Lipschitz-Polyeder ist nicht notwendigerweise konvex.*

Definition 2.5 (stückweise glattes Lipschitz-Gebiet). *Ein Gebiet Ω wird als stückweise glattes Lipschitz-Gebiet bezeichnet, falls es einen stückweise glatten Rand besitzt, sodass für jeden Punkt in $\partial\Omega$, das Gebiet Ω lokal durch einen $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus in eine Umgebung eines Randpunktes eines Lipschitz-Polyeders überführt werden kann.*

Im folgenden werden Lipschitz-Polyeder für das Gebiet Ω angenommen (falls nicht explizit anders angeführt), die Ergebnisse können aber auf stückweise glatte Lipschitz-Gebiete übertragen werden (siehe [5]).

Definition 2.6. *Im folgenden wird der Rand von Ω mit Γ bezeichnet, d.h. $\Gamma = \partial\Omega$. Weiters werden die einzelnen Randpolygone mit Γ_i bezeichnet (hierbei soll von einer Partition von Γ ausgegangen werden, sodass $\Gamma = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$ gilt und $|I|$ minimal ist), dementsprechend wird eine Kante zweier Polygone Γ_i und Γ_j mit e_{ij} bezeichnet, d.h. $\overline{\Gamma}_i \cap \overline{\Gamma}_j = e_{ij}$.*

2.2 Sobolev-Räume

Zunächst sollen kurz die klassischen Sobolevräume eingeführt werden. Hierfür sei Ω ein allgemeines Lipschitzgebiet.

Definition 2.7. *$\mathcal{C}^k(\Omega)$ bezeichnet den Raum der beschränkten k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dementsprechend bezeichnet $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \bigcap_{k\geq 0} \mathcal{C}^k(\Omega)$ den Raum der beschränkten unendlich oft differenzierbaren Funktionen. $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ bezeichnet den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger, d.h.*

$$\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{U \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} U \subset K \subset \Omega\}$$

wobei K kompakt ist.

Definition 2.8. *Für $1 \leq p < \infty$ sei $L_p(\Omega)$ der Raum der p-integrierbaren Funktionen, d.h.*

$$L_p(\Omega) := \{U : \int\limits_\Omega |U(x)|^p dx < \infty\}.$$

Durch die entsprechende Norm

$$\|U\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int\limits_\Omega |U(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

wird $L_p(\Omega)$ zu einem Banach-Raum. Für $p = 2$ erhält man durch das innere Produkt

$$\langle U, V\rangle_{L_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} U(x)\overline{V(x)}dx$$

einen Hilbert-Raum.

Definition 2.9. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}_0^3$ *wird als Multiindex bezeichnet, dabei sollen die folgenden Konventionen gelten:*

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{3} \alpha_i, \qquad \partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3}}.$$

Definition 2.10. *Für $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ und eine offene nicht leere Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, wird der Sobolevraum $W_p^r(\Omega)$ durch*

$$W_p^r(\Omega) = \{U \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha U \in L_p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq r\}$$

definiert, die zugehörige Norm ist durch

$$\|U\|_{W_p^r(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \int\limits_{\Omega} |\partial^\alpha U(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

gegeben. Um Räume gebrochener Ordnung zu definieren, wird die Sobolev-Slobodeckii-Halbnorm benötigt. Sie ist für $\mu \in (0,1)$ durch

$$|U|_{\mu,p,\Omega} := \left(\int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} \frac{|U(x) - U(y)|^p}{|x - y|^{3+p\mu}} dx dy \right)^{1/p}$$

gegeben. Für $s = r + \mu$ definiert man nun

$$W_p^s(\Omega) = \{U \in W_p^r(\Omega) : |\partial^\alpha U|_{\mu,p,\Omega} < \infty \text{ für } |\alpha| = r\}$$

mit der entsprechenden Norm

$$\|U\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|U\|_{W_p^r(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha| = r} |\partial^\alpha U|_{\mu,p,\Omega}^p \right)^{1/p}.$$

Für $p = 2$ und $s \geq 0$ ist $W_2^s(\Omega) = W^s(\Omega)$ ein Hilbert-Raum, das innere Produkt wird für $s = r \in \mathbb{N}$ durch

$$\langle U, V\rangle_{W^r(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq r} \int\limits_{\Omega} \partial^\alpha U(x) \overline{\partial^\alpha V(x)} dx$$

definiert, für $s = r + \mu$ mit $\mu \in (0,1)$ und $r \in \mathbb{N}$ geschieht dies durch

$$\langle U, V\rangle_{W^s(\Omega)} = \langle U, V\rangle_{W^r(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(\partial^\alpha U(x) - \partial^\alpha U(y))\overline{(\partial^\alpha V(x) - \partial^\alpha V(y))}}{|x-y|^{3+2\mu}} dxdy.$$

Einen weitere Möglichkeit, Sobolev-Räume einzuführen, besteht in der Verwendung der Fouriertransformation. Diese Räume werden mit $H^s(\Omega)$ bezeichnet. Es kann gezeigt werden, dass für $s > 0$

$$W^s(\mathbb{R}^3) = H^s(\mathbb{R}^3), \qquad W^s(\Omega) = H^s(\Omega), \qquad H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$$

für jedes Lipschitzgebiet Ω gilt (siehe [25] bzw. [34]).
Aufgrund der Definition von $H^s(\Omega)$ ist dabei

$$\|U\|_{H^s(\Omega)} = \min_{V|_\Omega = U;\, V \in H^s(\mathbb{R}^3)} \|V\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Definition 2.11. *Für alle $s \in \mathbb{R}$ sei*

$$\widetilde{H}^s(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}}.$$

Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = \left[H^{-s}(\Omega)\right]'.$$

Definition 2.12. *Der Spuroperator $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{D}(\Gamma)$ wird durch*

$$\gamma U = U|_\Gamma$$

definiert.

Satz 2.13. *Wenn Ω ein $\mathcal{C}^{k-1,1}$-Gebiet ist (d.h. die $(k-1)$-te Ableitung der Parametrisierung der Oberfläche existiert und ist Lipschitz-stetig), und $1/2 < s \leq k$ gilt, dann hat γ eine eindeutige Erweiterung zu einem beschränkten linearen Operator*

$$\gamma : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\Gamma).$$

Diese Erweiterung besitzt eine eindeutige stetige Rechtsinverse.

Beweis: Siehe [25]. ∎

2.2.1 Sobolev-Räume auf dem Rand

Da im folgenden Randintegraloperatoren eine entscheidende Rolle spielen, ist es zwangsläufig, dass man sich auch mit Sobolevräumen auf dem Rand Γ auseinandersetzt.

Definition 2.14. *Die Sobolev-Slobodeckii-Norm auf $\Gamma = \partial\Omega$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist für $s \in (0,1)$ definiert durch*

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left\{ \|u\|^2_{L_2(\Gamma)} + \int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}} ds_x ds_y \right\}^{1/2}.$$

Der Raum $H^s(\Gamma)$ ist dann für $s \in (-1,0)$ durch

$$H^s(\Gamma) = [H^{-s}(\Gamma)]'$$

definiert. Die Norm wird dann wie üblich über Dualität erklärt,

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \sup_{0 \neq v \in H^{-s}(\Gamma)} \frac{|\langle u, v\rangle_\Gamma|}{\|v\|_{H^{-s}(\Gamma)}}.$$

Für $s = 1$ sei innerhalb dieser Arbeit die folgende explizite Definition gegeben,

$$H^1(\Gamma) := \left\{ \phi \in H^1(\Gamma_j) : \phi_j|_{e_{ij}} = \phi_i|_{e_{ij}} \text{ in } H^{1/2}(e_{ij}) \right\}.$$

Der zugehörige duale Raum wird mit

$$H^{-1}(\Gamma) := [H^1(\Gamma)]'$$

bezeichnet.

2.3 Dichte Teilräume

In den folgenden Abschnitten werden einige Eigenschaften zunächst für geeignete dichte Teilräume gezeigt, und dann auf den gesamten Raum fortgesetzt. In diesem Unterkapitel sollen nun diese geeigneten dichten Teilräume eingeführt werden.

Definition 2.15. *Der Raum der Restriktionen von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ auf Ω sei folgendermaßen definiert:*

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) := \{V : V = U|_{\overline{\Omega}} \text{ für ein } U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\}.$$

Da der Normalenvektor $\vec{n}$ bei Übergängen an Kanten nicht stetig ist, wird ein weiterer dichter Teilraum benötigt, der dieses Problem umgeht.

Definition 2.16. $\mathbf{U}_e$ *sei im folgenden ein offenes Gebiet, sodass* $e_{ij} \subset \mathbf{U}_e$ *für alle* $i, j \in I$ *gilt, wobei* I *die Indexmenge aller Randflächen ist. Mit Hilfe dieser Konvention kann der Raum*

$$\mathcal{D}_e(\overline{\Omega}) := \{U \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) : \exists \mathbf{U}_e \subset \mathbb{R}^3 : U(x) = 0 \text{ für alle } x \in \Omega \cap \mathbf{U}_e\}$$

definiert werden.

Satz 2.17. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *ist dicht in* $H^s(\mathbb{R}^n)$*, für alle* $s \in \mathbb{R}$

Beweis: Siehe [25, Seite 77]. ■

Satz 2.18. *Der Restriktionsoperator* $U \mapsto U|_\Omega$ *ist stetig von* $H^s(\mathbb{R}^3)$ *nach* $H^s(\Omega)$ *für alle* $s > 0$*, hierbei ist* Ω *ein beliebiges nicht leeres Gebiet.*

Beweis: Seien $U, W \in H^s(\Omega)$, da nun

$$\|U\|_{H^s(\Omega)} = \min_{V|_\Omega = U, V \in H^s(\mathbb{R}^3)} \|V\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} \|(U-W)|_\Omega\|_{H^s(\Omega)} &= \min_{V|_\Omega = (U-W)|_\Omega, V \in H^s(\mathbb{R}^3)} \|V\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|U - W\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

womit alles gezeigt wäre. ■

Satz 2.19. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *ist dicht in* $H^s(\Omega)$ *für alle* $s > 0$.

Beweis: Dies folgt aus den Sätzen 2.17 und 2.18. ■

Satz 2.20. *Sei* F *eine geschlossene Teilmenge des* $\mathbb{R}^3$*. Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Funktion* $\xi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ *sodass*

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(x) = 0 & \text{falls } x \in F, \\ 0 \leq \xi_\varepsilon(x) \leq 1; \quad |\partial^\alpha \xi_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^{-|\alpha|} & \text{falls } 0 < \operatorname{dist}(x, F) < \varepsilon, \\ \xi_\varepsilon(x) = 1 & \text{falls } \operatorname{dist}(x, F) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Dabei ist $C = C(\operatorname{diam}(F))$.

Beweis: Die Aussage findet sich für $1 - \xi_\varepsilon$ in [25, Seite 64]. Dass die Konstante mit Hilfe des Durchmessers von F abgeschätzt werden kann, ergibt sich aus der Darstellung

$$\xi_\varepsilon = \Psi_{\varepsilon/4} * v_{\varepsilon/2}$$

wobei

$$v_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{falls } \operatorname{dist}(x, F) < \varepsilon, \\ 0 & \text{falls } \operatorname{dist}(x, F) \geq \varepsilon, \end{cases}$$

bzw.

$$\Psi_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \Psi(\varepsilon^{-1} x)$$

gilt, und $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\Psi(x) \geq 0 \in \mathbb{R}^3, \qquad \Psi(x) = 0 \text{ für } |x| > 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(x) dx = 1.$$

Aus der Differentiationsregel für Faltungen ergibt sich nun

$$\partial^\alpha \xi_\varepsilon = (\partial^\alpha \Psi_{\varepsilon/4}) * v_{\varepsilon/2}.$$

Da Ψ aber ein fixe Funktion ist, gilt $(\partial^\alpha \Psi_{\varepsilon/4}) \leq C^1 (\frac{4}{\varepsilon})^{|\alpha|}$. Da das Volumen des Trägers von ξ_ε durch die n-dimensionale Kugel mit Durchmesser $\operatorname{diam}(F) + 1$ abgeschätzt werden kann (siehe [25, Übung 3.4]), folgt das Ergebnis.

■

Satz 2.21. *$\mathcal{D}_e(\overline{\Omega})$ ist dicht in $H^1(\Omega)$.*

Beweis: Die Aussage findet sich in [6] ohne Beweis, zur Vollständigkeit sei der Beweis hier gegeben. Sei $U \in H^1(\Omega)$ fix gewählt, laut Satz 2.19 existiert nun eine Folge $\phi_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, sodass $\lim \phi_i = U$ bezüglich der $H^1(\Omega)$-Norm gilt. Sei nun $\phi_i^{F,\varepsilon} := \phi_i \cdot \xi_{F,\varepsilon}$ wobei $\xi_{F,\varepsilon}$ wie in Satz 2.20 bezüglich einer vorgegebenen Menge $F \subset \mathbb{R}^3$ definiert sei. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, dann kann ein N_ε gefunden werden, sodass für alle $i > N_\varepsilon$ die Abschätzung

$$\|U - \phi_i\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Sei nun $F_\delta := \{x \in \Omega : \text{ es existiert ein Kante } e_{ij} \text{ sodass } \operatorname{dist}(x, e_{ij}) \leq \delta\}$. Dann gilt

$$\left\| \phi_i - \phi_i^{F_\delta, \delta} \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\phi_i\|_{H^1(F_{2\delta})} + \left\| \phi_i^{F_\delta, \delta} \right\|_{H^1(F_{2\delta})}$$

wegen $\phi_i = \phi_i^{F_\delta,\delta}$ für $x \in \Omega \setminus F_{2\delta}$. Da $\phi_i \in H^1(\Omega)$, existiert ein δ_i' , sodass $\|\phi_i\|_{H^1(F_{2\delta})} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $\delta \leq \delta_i'$ gilt. Weiters gilt $\left\| \phi_i^{F_\delta,\delta} \right\|_{L_2(F_{2\delta})} \leq \|\phi_i\|_{L_2(F_{2\delta})}$ aufgrund der Konstruktion von $\phi_i^{F_\delta,\delta}$. Für die Ableitung $\partial_{x_j} \phi_i^{F_\delta,\delta}$ gilt nach Satz 2.20

$$\partial_{x_j} \phi_i^{F_\delta,\delta} = (\partial_{x_j} \phi_i) \xi_{F,\varepsilon} + \phi_i (\partial \xi_{F,\varepsilon}) \leq \partial_{x_j} \phi_i + C_1 \frac{1}{\delta}.$$

Da sich das Volumen von $F_{2\delta}$ für kleines δ proportional zu δ^2 verhält (da die Kanten e_{ij} eindimensionale Objekte sind), ist die Norm $\|\phi_i(\partial\xi_{F,\delta})\|_{\mathbf{L}_2(F_{2\delta})}$ proportional zu δ, für die Norm $\left\|\partial_{x_j}\phi_i\right\|_{L_2(F_{2\delta})}$ weiß man bereits, dass sie für $\delta \to 0$ gegen Null strebt. Daraus folgt, dass es ein δ_i'' gibt so dass für alle $\delta < \delta_i''$ die Abschätzung $\left\|\phi_i^{F_\delta,\delta}\right\|_{H^1(F_{2\delta})} < \frac{\varepsilon}{4}$ gilt. Sei nun $\delta_i^* = \min(\delta_i', \delta_i'')$, dann folgt für $\delta < \delta_i^*$

$$\begin{aligned}
\left\|U - \phi_i^{F_\delta,\delta}\right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|U - \phi_i\|_{H^1(\Omega)} + \left\|\phi_i - \phi_i^{F_\delta,\delta}\right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|U - \phi_i\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi_i\|_{H^1(F_{2\delta})} + \left\|\phi_i^{F_\delta,\delta}\right\|_{H^1(F_{2\delta})} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

womit die Aussage gezeigt wäre. ■

2.4 Sobolev-Räume für die Maxwell-Gleichungen

Ab diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Lipschitz-Polyeder bzw. ein stückweise glattes Lipschitz-Gebiet, für Verallgemeinerungen auf allgemeine Lipschitz-Gebiete siehe [8].
Da es sich bei den Maxwellgleichungen um vektorielle Gleichungen handelt, müssen die Sobolevräume für skalare Funktionen auf vektorielle Funktionen übertragen werden. Dies geschieht auf kanonische Weise durch

$$\mathbf{H} := [H]^3 := \{\mathbf{U} : U_i \in H, i = 1, 2, 3\}, \quad \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}}^2 := \sum_{l=1}^{3} \|U_l\|_H^2 .$$

Bemerkung 2.22. *Im folgenden werden vektorielle Funktionen im Raum mit fetten Großbuchstaben und vektorielle Funktionen am Rand mit fetten Kleinbuchstaben gekennzeichnet.*

Für die weiteren Betrachtungen soll die partielle Differentialgleichung

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2\mathbf{U} = 0,$$

mit $\kappa \in \mathbb{C}$ den Ausgangspunkt darstellen.

Satz 2.23 (1. Greensche Formel). *Für hinreichend glatte vektorielle Funktionen* $\mathbf{U}$ *und* $\mathbf{V}$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{V}} dx = &\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}} dx \\
&- \int_\Gamma (\mathbf{curl}\,\mathbf{U}_{|\Gamma} \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times (\overline{\mathbf{V}}_{|\Gamma} \times \vec{n})) ds_x.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Beweis: Aus der Identität

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{W} \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{V}$$

folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{V})\,dx &= \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\,(\mathbf{W} \times \mathbf{V}) dx \\ &= -\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{W} \times \vec{n}) \cdot \mathbf{V} ds_x \\ &= -\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{W} \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times (\mathbf{V} \times \vec{n})) ds_x.\end{aligned}$$

Setzt man nun $\mathbf{W} = \mathbf{curl}\,\mathbf{U}$ und ersetzt $\mathbf{V}$ durch $\overline{\mathbf{V}}$, so folgt die Behauptung. ■

Motiviert durch die 1. Greensche Formel wird nun der passende Energieraum für die Maxwell-Gleichungen definiert.

Definition 2.24. *Es ist*

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega) := \{\mathbf{V} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \mathbf{curl}\,\mathbf{V} \in \mathbf{L}_2(\Omega)\}$$

mit der Norm

$$\|\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)} := \|\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\mathbf{curl}\,\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\,.$$

Weiters werden durch (2.1) die beiden Dirichlet-Spuroperatoren

$$\gamma_D \mathbf{U} := \vec{n} \times (\mathbf{U}_{|\Gamma} \times \vec{n}) = \vec{n} \times \gamma_\times \mathbf{U}$$

mit

$$\gamma_\times \mathbf{U} := \mathbf{U}_{|\Gamma} \times \vec{n}$$

bzw. der Neumann-Spuroperator

$$\gamma_N \mathbf{U} := \mathbf{curl}\,\mathbf{U}_{|\Gamma} \times \vec{n}$$

motiviert. Um die Abbildungseigenschaften der beiden Dirichletspuroperatoren betrachten zu können, müssen zunächst tangentiale Sobolev-Räume eingeführt werden.

Definition 2.25. *Der Raum der tangentialen* $\mathbf{L}_2$*-integrierbaren Funktionen wird durch*

$$\mathbf{L}_{2,t}(\Gamma) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Gamma) : \mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0\}$$

eingeführt.

Bemerkung 2.26. *Dieser Raum kann mit dem Raum der zweidimensionalen tangentialen quadratintegrierbaren Vektorfelder identifiziert werden.*

Für Sobolev-Räume höherer Ordnung kann man ebenfalls entsprechende Überlegungen treffen, wobei sich hierbei herausstellt, dass für $s \geq 1/2$ an den Kanten ein Verlust der Regularität stattfindet (siehe [4]). Dadurch wird es nötig, stückweise definierte Räume einzuführen:

$$\mathbf{H}^s_{pw,t}(\Gamma) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{2,t}(\Gamma) : \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma_k)\,, k = 1, \dots, N_\Gamma\}$$

mit der Norm

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^s_{pw,t}(\Gamma)} := \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^s(\Gamma_k)}\,.$$

Für die beiden Spuroperatoren γ_D und $\gamma_\times$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}\gamma_D : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\to \mathbf{H}^{1/2}_{pw,t}(\Gamma),\\ \gamma_\times : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\to \mathbf{H}^{1/2}_{pw,t}(\Gamma).\end{aligned}$$

Aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ in $\mathbf{H}^1(\Omega)$ können die beiden Operatoren zu stetigen Operatoren auf $\mathbf{H}^1(\Omega)$ erweitert werden. Jedoch sind die beiden Operatoren von $\mathbf{H}^1(\Omega)$ nach $\mathbf{H}^{1/2}_{pw,t}(\Gamma)$ nicht surjektiv, und haben unterschiedliche offene Bilder. Aufgrund dessen werden zwei neue Räume eingeführt, hierzu werden die folgenden Funktionale benötigt:

$$\begin{aligned}\mathsf{N}^{\|}_{lk}(\mathbf{u}) &:= \int\limits_{\Gamma_l}\int\limits_{\Gamma_k} \frac{|\mathbf{u}(x)\cdot t_{lk}(x) - \mathbf{u}(y)\cdot t_{lk}(y)|}{|x-y|^3} ds_x ds_y,\\ \mathsf{N}^{\perp}_{lk}(\mathbf{u}) &:= \int\limits_{\Gamma_l}\int\limits_{\Gamma_k} \frac{|\mathbf{u}(x)\cdot t_{l}(x) - \mathbf{u}(y)\cdot t_{k}(y)|}{|x-y|^3} ds_x ds_y.\end{aligned}$$

Hierbei sei t_{lk} der Einheitsvektor mit Richtung e_{lk}, t_l sei dann für die Fläche Γ_l durch $t_l := t_{lk} \times \vec{n}$ definiert.

Definition 2.27. *Es sind*

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{1/2}_{\|}(\Gamma) &:= \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1/2}_{pw,t}(\Gamma) : \mathsf{N}^{\|}_{lk}(\mathbf{u}) < \infty \ \textit{für alle Kanten } e_{lk}\right\},\\ \mathbf{H}^{1/2}_{\perp}(\Gamma) &:= \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1/2}_{pw,t}(\Gamma) : \mathsf{N}^{\perp}_{lk}(\mathbf{u}) < \infty \ \textit{für alle Kanten } e_{lk}\right\}\end{aligned}$$

mit den dazugehörigen Normen

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^{1/2}_{\|}(\Gamma)} &:= \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_k)} + \sum_{e_{lk}} \mathsf{N}^{\|}_{lk}(\mathbf{u}),\\ \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^{1/2}_{\perp}(\Gamma)} &:= \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_k)} + \sum_{e_{lk}} \mathsf{N}^{\perp}_{lk}(\mathbf{u}).\end{aligned} \tag{2.2}$$

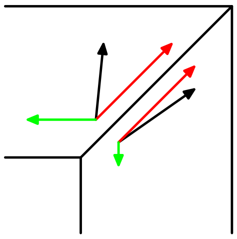


Abbildung 2.1: $\mathbf{H}_{\|}^{1/2}(\Gamma)$

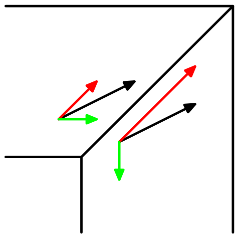


Abbildung 2.2: $\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$

Satz 2.28. *Die Räume $\mathbf{H}_{\|}^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$ sind zwar keine geschlossenen Unterräume des $\mathbf{H}_{pw,t}^{1/2}(\Gamma)$, bezüglich ihrer in (2.2) definierten Norm sind sie jedoch Hilberträume.*

Beweis: Siehe [5]. ■

Satz 2.29. *Die Spuroperatoren $\gamma_D : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}_{\|}^{1/2}(\Gamma)$ bzw. $\gamma_\times : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$ sind stetige lineare und surjektive Operatoren.*

Beweis: Siehe [5]. ■

Verbal beschrieben entspricht $\mathbf{H}_{\|}^{1/2}(\Gamma)$ hierbei einem Raum, welcher eine tangentiale Kontinuität bezüglich Übergängen an einer Kante aufweist (siehe Abbildung 2.1). $\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$ entspricht dementsprechend einem Raum welcher eine orthogonale Kontinuität an Übergängen aufweist (siehe Abbildung 2.2).
Die zugehörigen Dualräume sind

$$\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\Gamma) := [\mathbf{H}_{\|}^{1/2}(\Gamma)]', \qquad \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma) := [\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)]'$$

mit der jeweils entsprechenden Norm.

2.4.1 Oberflächenableitungen

Definition 2.30. *Der Oberflächengradient $\nabla_\Gamma : H^1(\Gamma) \to \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ und die vektorielle Oberflächenrotation $\mathbf{curl}_\Gamma : H^1(\Gamma) \to \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ werden durch*

$$\begin{aligned} (\nabla_\Gamma \phi)_i &= \nabla_2(\phi_i) \qquad \text{auf } \Gamma_i, \\ (\mathbf{curl}_\Gamma \phi)_i &= \mathbf{curl}_2(\phi_i) \qquad \text{auf } \Gamma_i \end{aligned}$$

definiert, wobei ∇_2 und $\mathbf{curl}_2$ die Differentialoperatoren für zweidimensionale Vektorfelder sind.

Bemerkung 2.31. *Der $\mathbf{curl}_\Gamma$ kann alternativ auch durch $\mathbf{curl}_\Gamma u = \nabla_\Gamma u \times \vec{n}$ definiert werden.*

Diese beiden Operatoren sind linear und stetig von $H^1(\Gamma)$ nach $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$. Mit Hilfe dieser beiden Operatoren können zwei weitere wichtige Operatoren definiert werden.

Definition 2.32. *Die Oberflächendivergenz* $\operatorname{div}_\Gamma : \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \to H^{-1}(\Gamma)$ *wird durch Dualität definiert, d.h.*

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \phi \rangle = -\langle \mathbf{u}, \nabla_\Gamma \phi \rangle$$

für alle $\phi \in H^1(\Gamma), \mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$. *Analog wird die skalare Oberflächenrotation via*

$$\langle \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}, \phi \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{curl}_\Gamma \phi \rangle$$

für alle $\phi \in H^1(\Gamma), \mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ *eingeführt.*

Um mit diesen Operatoren nun sinnvoll arbeiten zu können, müssen diese auf mehr bzw. weniger reguläre Räume erweitert werden. Hierzu wird der folgende Raum definiert:

Definition 2.33. *Es ist*

$$H^{3/2}(\Gamma) := \left\{ \phi \in H^1(\Gamma) : \nabla_\Gamma \phi \in \mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma) \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)} := \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \|u\|^2_{H^1(\Gamma_i)} + \|\nabla_\Gamma u\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma)}\,.$$

Bemerkung 2.34. *Es gibt mehrere äquivalente Definitionen für diesen Raum, siehe hierfür [6]. Außerdem ist er ein Hilbertraum bezüglich der Graphnorm.*

Folgerung 2.35. *Die Operatoren*

$$\begin{aligned} \nabla_\Gamma &: H^{3/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma), \\ \mathbf{curl}_\Gamma &: H^{3/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

sind lineare und stetige Abbildungen. Ihre adjungierten Abbildungen können nun wieder über Dualität definiert werden, d.h.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Gamma &: \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-3/2}(\Gamma), \\ \operatorname{curl}_\Gamma &: \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-3/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

erfüllen für alle $\mathbf{U} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma), \mathbf{V} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\Gamma)$ *und* $\phi \in H^{3/2}(\Gamma)$ *die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \phi \rangle &= -\langle \mathbf{u}, \nabla_\Gamma \phi \rangle, \\ \langle \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{v}, \phi \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{curl}_\Gamma \phi \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Hilfe dieser Abbildungseigenschaften können nun die Spurräume von γ_D und $\gamma_\times$ bezüglich $\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)$ untersucht werden.
Zur Motivation (siehe auch [4]) betrachte man die Formel

$$\int_\Omega (\mathbf{V}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{W}-\mathbf{W}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{V})dx=\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{W}\times\mathbf{V})dx=-\int_\Gamma \gamma_\times\mathbf{W}\cdot\gamma_D\mathbf{V}ds_x,$$

welche bei der Herleitung der 1. Greenschen Formel auftritt, für hinreichend glatte Funktionen und setze $\mathbf{V}=\mathbf{grad}\,\phi$, so ergibt sich aus den Stoke'schen Formeln für die Oberfläche (siehe [4]):

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{W}\cdot\mathbf{grad}\,\phi\,dx &= \int_\Omega (\mathbf{curl}\,\mathbf{W}\cdot\mathbf{grad}\,\phi-\mathbf{W}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{grad}\,\phi)dx\\
&= \int_\Gamma \gamma_D\mathbf{W}\cdot\gamma_\times\mathbf{grad}\,\phi\,ds_x\\
&= \int_\Gamma \gamma_D\mathbf{W}\cdot(\nabla_\Gamma\,\phi\times\vec{n})ds_x\\
&= -\int_\Gamma \gamma_D\mathbf{W}\cdot\mathbf{curl}_\Gamma\,\phi\,ds_x\\
&= -\int_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma(\gamma_D\mathbf{W})\cdot\gamma\phi\,ds_x.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\left|\int_\Gamma \operatorname{curl}_\Gamma(\gamma_D\mathbf{W})\cdot\gamma\phi\,ds_x\right|\leq\|\mathbf{W}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)}\,\|\phi\|_{H^1(\Omega)}\leq c\,\|\mathbf{W}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)}\,\|\gamma\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,.$$

Dies motiviert die Definition der folgenden Spurräume.

Definition 2.36. *Es sind*

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma,\Gamma) &:= \left\{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma):\operatorname{div}_\Gamma\mathbf{u}\in\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)\right\},\\
\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma,\Gamma) &:= \left\{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\Gamma):\operatorname{curl}_\Gamma\mathbf{u}\in\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)\right\}
\end{aligned}$$

mit den zugehörigen Normen

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma,\Gamma)} &:= \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)}+\|\operatorname{div}_\Gamma\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}\,,\\
\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma,\Gamma)} &:= \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\Gamma)}+\|\operatorname{curl}_\Gamma\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}\,.
\end{aligned}$$

Einer der wichtigsten Sätze ist nun:

Satz 2.37. *Die beiden Dirichlet-Spurabbildungen* $\gamma_D : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega) \to \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,,\Gamma)$ *und* $\gamma_\times : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,,\Gamma)$*, sind stetige und lineare Abbildungen.*

Beweis: Siehe [5] ■

Im folgenden sollen noch einmal die Oberflächenableitungen bezüglich unserer neu eingeführten Räume betrachtet werden.

Satz 2.38. *Es gilt*

$$\nabla_\Gamma\,(U|_\Gamma) = \gamma_D(\mathbf{grad}\,U)$$

für alle $u \in \mathcal{D}_e(\overline{\Omega})$.

Beweis: Dies folgt aus der Definition von ∇_Γ bzw. γ_D ■

Satz 2.39.

$$\mathbf{grad}\, : H^1(\Omega) \to \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)$$

ist eine stetige Abbildung, außerdem gilt $\mathbf{curl}\,\mathbf{grad}\,U = 0$ *im Sinne von* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ *für alle* $U \in H^1(\Omega)$.

Beweis: Für alle $U_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ gilt $\mathbf{grad}\,U_i \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)$, außerdem ist

$$\|\mathbf{grad}\,U_i\|_{L_2(\Omega)} = \|\mathbf{grad}\,U_i\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)}$$

da $\mathbf{curl}\,\mathbf{grad}\,U_i = 0$. Somit folgt $\|U\|_{H^1(\Omega)} \geq \|\mathbf{grad}\,U\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)}$, und damit ist $\mathbf{grad}\, : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)$ eine stetige Abbildung. Für jedes $U \in H^1(\Omega)$ existiert nun ein Folge $U_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, sodass $\lim U_i = U$ bezüglich der $H^1(\Omega)$-Norm ist. Dies impliziert jedoch, dass die Folge $\mathbf{grad}\,U_i$ in $\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega)$ bezüglich dessen Norm konvergiert. Weiters ergibt sich, dass $\mathbf{curl}\,\mathbf{grad}\,U = 0$, da $\mathbf{curl}\, : \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,,\Omega) \to \mathbf{L}_2(\Omega)$ eine stetige Abbildung ist. ■

Folgerung 2.40. $\gamma_D(\mathbf{grad}\,U) : H^1(\Omega) \to \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,,\Gamma)$ *ist eine stetige Abbildung.*

Satz 2.41. $\nabla_\Gamma\,(\cdot|_\Gamma) : H^1(\Omega) \to \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,,\Gamma)$ *kann zu einer stetigen Abbildung erweitert werden, und es gilt* $\nabla_\Gamma\,(U|_\Gamma) = \gamma_D(\mathbf{grad}\,U)$ *für alle* $U \in H^1(\Omega)$.

Beweis: Da $\mathcal{D}_e(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt (vgl. Satz 2.21), folgt die Aussage aus Satz 2.38 und Folgerung 2.40.

■

Somit kann der Operator ∇_Γ zu einem linearen und stetigen Operator

$$\nabla_\Gamma\, : H^{1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,,\Gamma)$$

erweitert werden (da γ eine stetige Rechtsinverse besitzt), analog folgt dies für

$$\mathbf{curl}_\Gamma\, : H^{1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,,\Gamma).$$

Nun können auch die skalaren Oberflächenableitungen in jener Form definiert werden, wie sie in Folge am häufigsten gebraucht werden.

Definition 2.42. *Die beiden Operatoren* $\operatorname{div}_\Gamma : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ *und* $\operatorname{curl}_\Gamma : \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ *seien so gegeben, dass sie*

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \phi \rangle &= -\langle \mathbf{u}, \nabla_\Gamma \phi \rangle, \\ \langle \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{v}, \phi \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{curl}_\Gamma \phi \rangle \end{aligned}$$

für alle $\phi \in H^{1/2}(\Gamma), \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ *und* $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ *erfüllen.*

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Sobolev-Räume $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ ist die sogenannte Hodge-Zerlegung. Diese Zerlegung wird in dem Ansatz, wie er in dieser Arbeit verfolgt werden soll, zwar nicht direkt benötigt, jedoch wird sie im Ansatz von Buffa und Hiptmair verwendet, auf welchen im Rahmen dieser Arbeit kurz eingegangen wird.

Satz 2.43 (Hodge-Zerlegung). *Es gelten die folgenden Zerlegungen:*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &= \mathbf{curl}_\Gamma\,(H^{1/2}(\Gamma)) \oplus \left\{ \nabla_\Gamma\,(H^{3/2}(\Gamma)) \cap \mathbf{H}_\perp^{1/2}(\Gamma) \right\}, \\ \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) &= \nabla_\Gamma\,(H^{1/2}(\Gamma)) \oplus \left\{ \mathbf{curl}_\Gamma\,(H^{3/2}(\Gamma)) \cap \mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma) \right\}. \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [6]. ■

Hieraus kann die folgende bedeutende Dualitätsbeziehung hergeleitet werden.

Satz 2.44. *Es gilt*

$$\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) = [\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)]'.$$

Beweis: Siehe [6]. ■

Weiters erhält man die Surjektivität der Spuroperatoren.

Satz 2.45 (Spursatz). *Die beiden Dirichletspurabbildungen*

$$\begin{aligned} \gamma_D &: \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma), \\ \gamma_\times &: \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \to \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \end{aligned}$$

sind lineare stetige (siehe Satz 2.37) und surjektive Abbildungen.

Beweis: Siehe [6]. ■

Nun muss schließlich auch noch der Neumann-Spuroperator γ_N betrachtet werden. Um dies zu tun, führen wir jedoch zunächst den Raum

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega) := \{\mathbf{V} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) : \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{V} \in \mathbf{L}_2(\Omega)\}$$

ein. Die zugehörige Norm ist dann durch

$$\|\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega)} := \|\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)} + \|\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$$

gegeben. Da die Abbildung $\mathbf{curl}\ : \mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega) \to \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega)$ linear, stetig und surjektiv ist, gilt aufgrund von Satz 2.45, dasselbe auch für die Abbildung

$$\gamma_N : \mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma).$$

Bei der Herleitung der Darstellungsformel wird noch eine weitere Spur benötigt.

Definition 2.46. *Der Spuroperator $\gamma_n : \mathcal{D}(\overline{\Omega})^3 \to L_2(\Gamma)$ wird durch*

$$\gamma_n \mathbf{U} = \mathbf{U}|_\gamma \cdot \vec{n}$$

definiert.

Satz 2.47. *Der Operator γ_n lässt sich zu einem stetigen linearen Operator*

$$\gamma_n : \mathbf{H}(\mathrm{div}\,, \Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$$

fortsetzen.

Beweis: Siehe [4]. ■

Mit Hilfe dieser Spur kann nun die erste Greensche Formel für die 'richtigen' Räume gezeigt werden.

Satz 2.48 (1. Greensche Formel). *Für $\mathbf{U} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega)$ und $\mathbf{V} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega)$ gilt*

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{V}} dx = \int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}} dx - \int_\Gamma \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x.$$

Beweis: Siehe [6]. ■

Satz 2.49 (2. Greensche Formel). *Für $\mathbf{U} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega)$ und $\mathbf{V} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega)$ gilt*

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{V}} dx - \int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{U} dx = -\int_\Gamma \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x + \int_\Gamma \gamma_N \overline{\mathbf{V}} \cdot \gamma_D \mathbf{U} ds_x.$$

Beweis: Dies ergibt sich durch zweimaliges Anwenden der 1. Greenschen Formel. ■

2.4.2 Sobolev-Räume für den Außenraum

Da sich die Integrale im Außenraum auf ein unbeschränktes Gebiet erstrecken, ist es notwendig, geeignete Räume einzuführen.

Definition 2.50. *$L^2_{loc}(\Omega^c)$ sei der Raum der lokal quadratintegrierbaren Funktionen, d.h.*

$$L^2_{loc}(\Omega^c) := \left\{ U \in L^2(\Omega^c) : \int_B |U(x)|^2 dx < \infty \text{ für alle } B \subset \Omega^c \text{ mit } \mu(B) < \infty \right\}.$$

Hierbei sei $\mu(B)$ das Lebesgue-Maß von B. Analog werden die Räume $H^s_{loc}(\Omega^c)$ usw. eingeführt.

Definition 2.51. *Spuroperatoren, die einen Übergang aus dem Außenraum darstellen, werden mit dem Superscript $\cdot^c$ gekennzeichnet, zum Beispiel γ_D^c. Sprünge zwischen Außen- und Innenraum werden mit $[\cdot]_\Gamma$ bezeichnet, am Beispiel der Dirichletspur wäre dies*

$$[\gamma_D \mathbf{U}]_\Gamma = \gamma_D^c \mathbf{U} - \gamma_D \mathbf{U}.$$

2.4.3 Eigenschaften des Operators $\mathbf{R} = \cdot \times \vec{n}$

Satz 2.52. *Der Operator $\mathbf{R} = \cdot \times \vec{n} : \mathbf{H}_\perp^{1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma)$ ist eine lineare bijektive Isometrie.*

Beweis: Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\perp^{1/2}(\Gamma)$, dann gilt aufgrund der Definition der Normen

$$\int\limits_{\Gamma_l}\int\limits_{\Gamma_k} \frac{|\mathbf{u}(x)\cdot t_{lk}(x) - \mathbf{u}(y)\cdot t_{lk}(y)|}{|x-y|^3} ds_x ds_y < \infty.$$

Zu zeigen ist nun, dass $R\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma)$ ist, dies ist gleichbedeutend mit

$$\int\limits_{\Gamma_l}\int\limits_{\Gamma_k} \frac{|R\mathbf{u}(x)\cdot t_l(x) - R\mathbf{u}(y)\cdot t_k(y)|}{|x-y|^3} ds_x ds_y < \infty.$$

Da $t_l = t_{lk} \times \vec{n}$ gilt, ist

$$\int\limits_{\Gamma_l}\int\limits_{\Gamma_k} \frac{|(\mathbf{U}(x)\times\vec{n})\cdot(t_{lk}(x)\times\vec{n}) - (\mathbf{U}(y)\times\vec{n})\cdot(t_{lk}(y)\times n)|}{|x-y|^3} ds_x ds_y < \infty.$$

Dies entspricht aber dem Funktional $\mathsf{N}_\parallel$, somit sind die beiden Normen gleich. Das heißt, man hat eine lineare Isometrie. Die Bijektivität ergibt sich durch den in tangentialen Räumen inversen Operator $R^{-1} = \vec{n} \times \cdot$.

■

Satz 2.53. *Der Operator $\mathbf{R} = \cdot \times \vec{n} : \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)$ ist eine lineare bijektive Isometrie.*

Beweis: Sei $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\Gamma)$, dann gilt

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_\perp^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\perp^{1/2}(\Gamma)}} < \infty$$

sowie

$$\|\mathbf{v}\times\vec{n}\|_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\times\vec{n}\rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma)}} < \infty.$$

Setzt man nun $\mathbf{u} = \mathbf{w} \times \vec{n}$ für $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\|}^{1/2}(\Gamma)$, so erhält man mit Hilfe von Satz 2.53

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} \times \vec{n}\|_{\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\Gamma)} &= \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \mathbf{w} \times \vec{n}, \mathbf{v} \times \vec{n} \rangle}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)}} \\ &= \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma)} < \infty.\end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.54. *Der Operator* $\mathbf{R} = \cdot \times \vec{n}$ *lässt sich zu einem linearen, stetigen und isometrischen Operator*

$$\mathbf{R} : \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$$

fortsetzen (siehe [4, Seite 27]).

3 Randintegraloperatoren

In diesem Abschnitt soll zunächst auf die eindeutige Lösbarkeit des Ausgangsproblems bezüglich den im letzten Abschnitt eingeführten Räumen eingegangen werden. Danach wird eine Darstellungsformel für den Innen- und Außenraum hergeleitet, auf deren Grundlage dann passende Potentialoperatoren eingeführt werden. Nachdem die notwendigen Eigenschaften dieser Operatoren gezeigt sind, werden entsprechende Randintegraloperatoren eingeführt und genauer untersucht.

3.1 Eindeutige Lösbarkeit

In diesem Teilkapitel soll kurz auf die eindeutige Lösbarkeit des Ausgangsproblems (1.25)-(1.27) eingegangen werden.
Im folgenden wird die Kugel mit Radius r und dem Ursprung als Mittelpunkt mit B_r bezeichnet.

Lemma 3.1 (Rellich). *Sei $\mathbf{U}$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (1.25) in Ω^c, welche die Abstrahlbedingung (1.27) erfüllt, und sei R so gewählt, dass $\Omega \subset B_R$ gilt. Ist*

$$\operatorname{Im}\left(\int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x \right) \leq 0$$

für alle $r > R$, dann gilt $\mathbf{U} = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_R$.

Beweis: Siehe [26, Seite 255]. ∎

Lemma 3.2. *Sei Ω ein zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^3$ und sei $\mathbf{V} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ reellwertig und erfülle fast überall in Ω*

$$|\Delta \mathbf{V}| \leq C \sum_{i=1}^{3} (|V_i| + |\mathbf{grad}\, V_i|).$$

Wenn $\mathbf{V}$ nun auf einer beliebigen Umgebung eines beliebigen Punktes $x \in \Omega$ identisch Null ist, so ist sie es fast überall auf ganz Ω.

Beweis: Siehe [13, Lemma 8.5, Seite 219] bzw. [26, Seite 93]. ∎

Satz 3.3. *Sei* $\Omega_0 \subset \Omega$ *offen und zusammenhängend. Sei* $\mathbf{U} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega_0)$ *und erfülle*

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2 \mathbf{U} = 0$$

in Ω_0*. Weiters verschwinde* $\mathbf{U}$ *in einer Kugel mit Radius* $\varepsilon > 0$*, welche in* Ω_0 *enthalten ist. Dann ist* $\mathbf{U} = 0$ *in ganz* Ω_0*.*

Beweis: (Nach [26, Seite 93].) Aus $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2 \mathbf{U} = 0$ in Ω_0 folgt $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$. Aus der Identität

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\, = -\Delta + \mathbf{grad}\,\operatorname{div}$$

folgt

$$\Delta \mathbf{U} = \kappa^2 \mathbf{U}$$

und somit $\Delta \mathbf{U} \in \mathbf{L}^2(\Omega_0)$. Mit Hilfe des Weylschen Lemmas (siehe zum Beispiel [34]) folgt nun $\mathbf{U} \in \mathbf{H}^2(\Omega_1)$ für jedes kompakte Teilgebiet $\Omega_1 \subset \Omega_0$. Somit kann Lemma 3.2 auf den Realteil und den Imaginärteil angewandt werden. Da das Gebiet Ω_1 beliebig war, gilt $\mathbf{U} = 0$ in Ω_0. ∎

Mit diesem Satz kann nun die Eindeutigkeit des Ausgangsproblems (1.25)-(1.27) gezeigt werden.

Satz 3.4. *Das Randwertproblem zur Bestimmung von* $\mathbf{U} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega^c)$*, sodass*

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U}(x) - k^2 \mathbf{U}(x) &= 0, && x \in \Omega^c \\ \gamma_D \mathbf{U}(x) &= \mathbf{g}, && x \in \Gamma \\ \int\limits_{\partial B_r} |\gamma_N \mathbf{U} - ik\mathbf{U}|^2 ds_x &\to 0 && \text{für } r \to \infty \end{aligned}$$

gilt, besitzt für $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ *höchstens eine Lösung.*

Beweis: Angenommen, es gibt zwei Lösungen $\mathbf{U}_1$ und $\mathbf{U}_2$. Sei nun $\mathbf{U} := \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2$. Aus der 1. Greenschen Formel ergibt sich für das Gebiet $B_r \setminus \Omega$:

$$\int\limits_{B_r \setminus \Omega} \left(|\mathbf{curl}\,\mathbf{U}|^2 - k^2 |\mathbf{U}|^2 \right) dy = \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_y - \int\limits_{\Gamma} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_y.$$

Da aber $\gamma_D \mathbf{U}(x) = 0$ für $x \in \Gamma$ gilt, folgt

$$\operatorname{Im} \left(\int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x \right) = 0.$$

Mit Rellich's Lemma (Lemma 3.1) folgt nun, dass $\mathbf{U} = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_r$ ist. Mit Satz 3.3 ergibt sich daraus die Eindeutigkeit der Lösung. ∎

Bemerkung 3.5. *Die Existenz einer Lösung des Problems (1.25)-(1.27) ergibt sich durch die im weiteren Verlauf der Arbeit eingeführten Potentialoperatoren.*

3.2 Darstellungsformel

In diesem Teilkapitel soll nun die bekannte Darstellungsformel von Stratton-Chu hergeleitet werden. Zunächst soll diese für den Innenraum gezeigt werden, mit Hilfe dieser und der Abstrahlbedingung kann dann auch die Darstellungsformel für den Außenraum hergeleitet werden. Schließlich soll noch eine Darstellungsformel erwähnt werden, die sowohl im Innen- als auch im Außenraum Gültigkeit besitzt. In diesen Darstellungsformeln wird die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung

$$\Delta U - \kappa^2 U = 0$$

benötigt, diese ist durch

$$g_\kappa(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\kappa|x-y|}}{|x-y|}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gegeben (man beachte hierbei, dass für die Helmholtzgleichung $\kappa = ik$ gilt). Weiters benötigt man das folgende Lemma.

Lemma 3.6.

$$((\mathbf{curl}\,(g_\kappa(x,y) \cdot e_i)) \times \vec{n}) \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{curl}\,(g_\kappa(x,y) \cdot (\mathbf{U} \times \vec{n}))) \cdot e_i.$$

Beweis: Da $g_\kappa(x,y)$ eine skalare Funktion ist, ist es nicht nötig, diesen Term bei den folgenden Vektorumformungen zu beachten. Die folgenden Umformungen ergeben sich aus den Formeln $a \times b = -b \times a$ und $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a$:

$$\begin{aligned}
(\nabla \times (\mathbf{U} \times \vec{n})) \cdot e_i &= -((\mathbf{U} \times \vec{n}) \times \nabla) \cdot e_i \\
&= -(\nabla \times e_i) \cdot (\mathbf{U} \times \vec{n}) \\
&= -(\mathbf{U} \times \vec{n}) \cdot (\nabla \times e_i) \\
&= -(\vec{n} \times (\nabla \times e_i)) \cdot \mathbf{U} \\
&= ((\nabla \times e_i) \times \vec{n}) \cdot \mathbf{U}.
\end{aligned}$$

■

Mit Hilfe dieser Identität kann nun die Darstellungsformel für den Innenraum hergeleitet werden.

Satz 3.7 (Darstellungsformel). *Für alle* $\mathbf{U} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega)$ *mit* $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2 \mathbf{U} = 0$ *in* Ω *gilt die Darstellungsformel*

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}(y) = \mathbf{grad}_y \int\limits_\Gamma g_\kappa(x,y)(\gamma_n \mathbf{U}) ds_x &+ \int\limits_\Gamma g_\kappa(x,y)(\gamma_N \mathbf{U}) ds_x \\
+ \mathbf{curl}_y \int\limits_\Gamma g_\kappa(x,y)(\mathbf{U} \times \vec{n}) ds_x &
\end{aligned}$$

für alle $y \in \Omega$.

Beweis: Ausgangspunkt ist die 2. Greensche Formel

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{V}}dx-\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{U}dx=-\int_\Gamma \gamma_N\mathbf{U}\cdot\gamma_D\overline{\mathbf{V}}ds_x+\int_\Gamma \gamma_N\overline{\mathbf{V}}\cdot\gamma_D\mathbf{U}ds_x.$$

Da $\mathbf{U}$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung ist, d.h. $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U}=-\kappa^2\mathbf{U}$, folgt mit Hilfe der Identität

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\; = -\boldsymbol{\Delta}+\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,,$$

die Gleichheit

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \kappa^2\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{V}}dx+\int_\Omega \boldsymbol{\Delta}\overline{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{U}dx-\int_\Omega \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{U}dx\\ =-\int_\Gamma \gamma_N\mathbf{U}\cdot\gamma_D\overline{\mathbf{V}}ds_x+\int_\Gamma \gamma_N\overline{\mathbf{V}}\cdot\gamma_D\mathbf{U}ds_x.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Mit Hilfe der partiellen Integrationsformel

$$\int_\Omega \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{U}dx=-\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{U}\cdot\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{V}}dx+\int_\Gamma \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{V}}\cdot(\mathbf{U}\cdot\vec{n})ds_x$$

und der Beziehung $\mathrm{div}\,\mathbf{U}=0$, welche für alle Lösungen gültig ist, folgt aus (3.1)

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\Delta}\overline{\mathbf{V}}-\kappa^2\overline{\mathbf{V}})\cdot\mathbf{U}dx=\int_\Gamma \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{V}}\cdot(\mathbf{U}\cdot\vec{n})ds_x-\int_\Gamma \gamma_N\mathbf{U}\cdot\gamma_D\overline{\mathbf{V}}ds_x+\int_\Gamma \gamma_N\overline{\mathbf{V}}\cdot\gamma_D\mathbf{U}ds_x.$$

Setzt man nun $\overline{\mathbf{V}}=(g_\kappa(x,y),0,0)^t$, so erhält man

$$\begin{aligned}-\mathbf{U}_1(y)&=\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}g_\kappa(x,y)\cdot\gamma_n\mathbf{U}ds_x-\int_\Gamma g_\kappa(x,y)(\gamma_N\mathbf{U})_1ds_x\\&\quad+\int_\Gamma (\mathbf{curl}_x\begin{pmatrix}g_\kappa(x,y)\\0\\0\end{pmatrix}\times\vec{n})\cdot\gamma_D\mathbf{U}ds_x.\end{aligned}$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial x_1}g_\kappa(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y_1}g_\kappa(x,y)$$

und somit auch

$$\mathbf{curl}_x g_\kappa(x,y)=-\mathbf{curl}_y g_\kappa(x,y),$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_1(y) = &\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial y_1} g_\kappa(x,y)\cdot \gamma_n \mathbf{U} ds_x + \int_\Gamma g_\kappa(x,y)(\gamma_N \mathbf{U})_1 ds_x \\ &+ \int_\Gamma (\mathbf{curl}_y \begin{pmatrix} g_\kappa(x,y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \vec{n}) \cdot \gamma_D \mathbf{U} ds_x.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 3.6 erhält man schlussendlich die klassische Darstellungsformel von Stratton-Chu

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(y) = &\,\mathbf{grad}_y \int_\Gamma g_\kappa(x,y)(\gamma_n \mathbf{U}) ds_x + \int_\Gamma g_\kappa(x,y)(\gamma_N \mathbf{U}) ds_x \\ &+ \mathbf{curl}_y \int_\Gamma g_\kappa(x,y)(\mathbf{U}\times\vec{n}) ds_x.\end{aligned}$$

■

Mit Hilfe der Darstellungsformel für den Innenraum kann nun auch jene für den Außenraum mit Hilfe des folgenden Lemmas hergeleitet werden.

Lemma 3.8. *Sei $y \in \Gamma$ ein fix gewählter Punkt und x ein Punkt auf der Kugel B_r mit Radius r. Dann gilt $(x-y)\times\vec{n} = O(1)$.*

Beweis: Aus $x = \vec{n}\cdot|x|$ folgt

$$(x-y)\times\vec{n} = |x|\cdot\vec{n}\times\vec{n} - y\times\vec{n} = -y\times\vec{n} = O(y).$$

Da aber y fix gewählt ist, gilt $O(y) = O(1)$. ■

Satz 3.9. *Für alle $\mathbf{U} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega^c)$ mit $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2\mathbf{U} = 0$ in Ω^c und $\mathrm{Re}(\kappa) \leq 0$, welche die Silver-Müller-Abstrahlbedingung (1.27) erfüllen, gilt die Darstellungsformel*

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(y) = &-\mathbf{grad}_y \int_\Gamma g_\kappa(x,y)(\gamma_n \mathbf{U}) ds_x - \int_\Gamma g_\kappa(x,y)(\gamma_N \mathbf{U}) ds_x \\ &- \mathbf{curl}_y \int_\Gamma g_\kappa(x,y)(\mathbf{U}\times\vec{n}) ds_x.\end{aligned}$$

Beweis: Die Idee des Beweises richtet sich nach [13]. An dieser Stelle sei nur der Beweis für $\kappa = ik$ angeführt, da er für $\mathrm{Re}(\kappa) < 0$ trivial ist. Betrachtet werde zunächst das Gebiet $B_r \setminus \Omega$, wobei r groß genug sei, sodass Ω ganz in B_r enthalten ist. Für dieses Gebiet kann dann die Darstellungsformel für den Innenraum verwendet werden, d.h. für $y \in B_r \setminus \Omega$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(y) = -\mathbf{grad}\,_y \int\limits_{\Gamma} g_\kappa(x,y)(\gamma_n \mathbf{U}) ds_x - \int\limits_{\Gamma} g_\kappa(x,y)(\gamma_N \mathbf{U}) ds_x \\ - \mathbf{curl}\,_y \int\limits_{\Gamma} g_\kappa(x,y)(\mathbf{U} \times \vec{n}) ds_x + \mathbf{grad}\,_y \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\gamma_n \mathbf{U}) ds_x \\ + \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\gamma_N \mathbf{U}) ds_x + \mathbf{curl}\,_y \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\mathbf{U} \times \vec{n}) ds_x.\end{aligned}$$

Um nun die im Satz gegebene Darstellungsformel zu erhalten, muss gezeigt werden, dass die letzten drei Terme für $r \to \infty$ gegen Null gehen. Hierzu betrachtet man zunächst die Gleichung

$$\begin{aligned}&\mathbf{grad}\,_y \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\gamma_n \mathbf{U}) ds_x + \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\gamma_N \mathbf{U}) ds_x + \mathbf{curl}\,_y \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\mathbf{U} \times n) ds_x \\ &= \int\limits_{\partial B_r} \mathbf{U}(x) \times (\mathbf{grad}\,_y g_\kappa(x,y) \times \vec{n}_x) ds_x + \int\limits_{\partial B_r} \mathbf{U}(x) \left(\frac{\partial g_\kappa(x,y)}{\partial \vec{n}_y} + ik g_\kappa(x,y) \right) ds_x \\ &\quad + \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)((\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \times \vec{n}) - ik\mathbf{U}) ds_x.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Diese Gleichheit kann am einfachsten gesehen werden, wenn man die Operatoren formal beschreibt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\partial B_r} \mathbf{U}(x) \times (\mathbf{grad}\,_y g_\kappa(x,y) \times \vec{n}_x) ds_x + \int\limits_{\partial B_r} \mathbf{U}(x) \left(\frac{\partial g_\kappa(x,y)}{\partial \vec{n}_y} + ik g_\kappa(x,y) \right) ds_x \\ &\qquad + \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)((\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \times \vec{n}) - ik\mathbf{U}) ds_x \\ &\quad = \int\limits_{\partial B_r} \left(\mathbf{U} \times (\nabla_y \times \vec{n}) + \mathbf{U}(\nabla_y \cdot \vec{n}) + (\nabla_x \times \mathbf{U}) \times \vec{n} \right) g_\kappa(x,y) ds_x \\ &\quad = \int\limits_{\partial B_r} \left((\mathbf{U} \cdot \vec{n})\nabla_y - (\mathbf{U} \cdot \nabla_y)\vec{n} + \mathbf{U}(\nabla_y \cdot \vec{n}) + (\nabla_x \times \mathbf{U}) \times \vec{n} \right) g_\kappa(x,y) ds_x\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{grad}_y \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\gamma_n \mathbf{U}) ds_x + \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\gamma_N \mathbf{U}) ds_x + \mathbf{curl}_y \int\limits_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)(\mathbf{U}\times\vec{n}) ds_x \\
&\quad = \int\limits_{\partial B_r} \left(\nabla_y(\vec{n}\cdot\mathbf{U}) + (\nabla_x\times\mathbf{U})\times\vec{n} + \nabla_y\times(\mathbf{U}\times\vec{n})\right) g_\kappa(x,y) ds_x \\
&\quad = \int\limits_{\partial B_r} \left(\nabla_y(\vec{n}\cdot\mathbf{U}) + (\nabla_x\times\mathbf{U})\times\vec{n} + (\nabla_y\cdot\vec{n})\mathbf{U} - (\nabla_y\cdot\mathbf{U})\vec{n}\right) g_\kappa(x,y) ds_x,
\end{aligned}$$

womit Gleichung (3.2) gezeigt wäre. Um nun den Grenzwert bestimmen zu können werden einige Hilfsüberlegungen benötigt. Aus der Abstrahlbedingung (1.27) folgt zunächst

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B_r} |\gamma_N \mathbf{U} - ik\mathbf{U}|^2 ds_x &= \int\limits_{\partial B_r} \left(|\gamma_N \mathbf{U}|^2 + k^2|\mathbf{U}|^2 - 2\mathrm{Re}(\gamma_N\mathbf{U}\cdot\overline{ik\mathbf{U}})\right) ds_x \\
&= \int\limits_{\partial B_r} \left(|\gamma_N \mathbf{U}|^2 + k^2|\mathbf{U}|^2 - 2k\mathrm{Im}(\gamma_N\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{U}})\right) ds_x \to 0
\end{aligned}$$

für $r\to\infty$. Aus der 1. Greenschen Formel erhält man für $\mathbf{U} = \overline{\mathbf{V}}$

$$\int\limits_{B_r\setminus\Omega} \left(k^2|\mathbf{U}|^2 + |\mathbf{curl}\,\mathbf{U}|^2\right) dx = -\int\limits_{\Gamma} \gamma_N\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{U}} ds_x + \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{U}} ds_x.$$

Betrachtet man nun den Imaginärteil der letzten Gleichung und setzt diesen in die vorherige Gleichung ein, so erhält man

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\partial B_r} \left(|\gamma_N\mathbf{U}|^2 + k^2|\mathbf{U}|^2\right) ds_x = 2k\cdot\mathrm{Im}\int\limits_{\Gamma} \gamma_N\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{U}} ds_x.$$

Hieraus folgt nun

$$\int\limits_{\partial B_r} |\mathbf{U}|^2 ds_x = O(1) \quad \text{für } r\to\infty.$$

Weiters gilt

$$\mathbf{grad}_x g_\kappa(x,y)\times\vec{n}_x = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r\to\infty, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial g_\kappa(x,y)}{\partial\vec{n}_x} - ikg_\kappa(x,y) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r\to\infty, \tag{3.4}$$

wenn $x \in \mathbb{R}^3$ fix gewählt ist. Formel (3.3) folgt hierbei aus Lemma 3.8. Formel (3.4) gilt, da $g_\kappa(x,y)$ eine abstrahlende Lösung der Differentialgleichung ist. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung und durch Ändern der Differentiationsvariablen folgt nun

$$\int_{\partial B_r} \mathbf{U}(x) \times (\mathbf{grad}_y g_\kappa(x,y) \times \vec{n}_x) ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\int_{\partial B_r} \mathbf{U}(x) \left(\frac{\partial g_\kappa(x,y)}{\partial \vec{n}_y} + ikg_\kappa(x,y) \right) ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aufgrund der Abstrahlbedingung und $g_\kappa(x,y) = O(\frac{1}{r})$ folgt

$$\int_{\partial B_r} g_\kappa(x,y)((\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \times \vec{n}) - ik\mathbf{U}) ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

womit der Satz gezeigt wäre.

■

Schlussendlich soll noch eine Darstellungsformel für Innen- und Außenraum erwähnt werden.

Satz 3.10. *Sei* $\mathrm{Re}(\kappa) \le 0$, $\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ *mit* $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2 \mathbf{U} = 0$ *in* $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. *Erfüllt* $\mathbf{U}$ *die Abstrahlbedingung (1.27), dann besitzt* $\mathbf{U}$ *die folgende Darstellung für* $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(y) = -\mathbf{grad}_y \int_\Gamma g_\kappa(x,y)([\gamma_n \mathbf{U}]_\Gamma) ds_x - \int_\Gamma g_\kappa(x,y)([\gamma_N \mathbf{U}]_\Gamma) ds_x \\ - \mathbf{curl}_y \int_\Gamma g_\kappa(x,y)([\gamma_D \mathbf{U}]_\Gamma \times \vec{n}) ds_x. \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [21]. ■

3.3 Potentialoperatoren

Motiviert durch die Herleitung der Stratton-Chu-Formel werden zunächst die folgenden Potentialoperatoren eingeführt.

Definition 3.11. *Das skalare Einfachschichtpotential ist durch*

$$\Psi_V^\kappa(\lambda)(x) := \int_\Gamma g_\kappa(x,y)\lambda(y) ds_y \quad \text{für } x \notin \Gamma$$

definiert, das vektorielle Einfachschichtpotential durch

$$\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\lambda})(x) := \int_\Gamma g_\kappa(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)ds_y \quad \textit{für } x \notin \Gamma.$$

Das Maxwell'sche Doppelschichtpotential (oder auch vektorielles Doppelschichtpotential) ist durch

$$\mathbf{\Psi}_M^\kappa(\boldsymbol{\lambda})(x) := \mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathrm{R}\boldsymbol{\lambda})(x) \quad \textit{für } x \notin \Gamma$$

gegeben, wobei $\mathrm{R}\mathbf{U} = \mathbf{U} \times \vec{n}$ *gilt.*

Satz 3.12. *Die Operatoren erfüllen folgende Abbildungseigenschaften:*

$$\begin{aligned} \Psi_V^\kappa &: H^{-1/2}(\Gamma) \to H^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \cap H(\Delta, \Omega \cup \Omega^c), \\ \mathbf{\Psi}_A^\kappa &: \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Beweis: Die Aussage für Ψ_V^κ findet sich in [21]. Wegen $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ (siehe [7]) folgt auch die vektorielle Abbildungseigenschaft sofort. ■

Die Stratton-Chu-Darstellungsformel kann nun mit Hilfe der Potentialoperatoren in folgender Weise geschrieben werden,

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_M^\kappa(\gamma_D\mathbf{U})(x) + \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\gamma_N\mathbf{U})(x) + \mathbf{grad}\,\Psi_V^\kappa(\gamma_n\mathbf{U})(x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Besonders auffallend ist hierbei, dass man es mit drei anstatt mit zwei Spuroperatoren zu tun hat. Ist $\kappa \neq 0$, kann dieses Problem aber mit Hilfe des folgenden Satzes umgangen werden.

Satz 3.13. *Es gilt*

$$\gamma_n \circ \mathbf{curl}\,\mathbf{U} = \mathrm{curl}_\Gamma \circ \gamma_D\mathbf{U} = \mathrm{div}_\Gamma \circ \gamma_\times\mathbf{U}$$

auf $\mathbf{H}(\mathbf{curl}\,, \Omega)$*, wobei die Gleichheit im Sinne von* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *gilt.*

Beweis: Siehe [21]. ■

Für Lösungen der Differentialgleichung $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2\mathbf{U} = 0$ ergibt sich nun

$$\gamma_n\mathbf{U} = -\frac{1}{\kappa^2}\mathrm{div}_\Gamma\,(\gamma_N\mathbf{U}),$$

womit γ_n aus der Darstellungsformel eliminiert werden kann.

Definition 3.14. *Das Maxwell'sche Einfachschichtpotential wird nun durch*

$$\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\boldsymbol{\mu}) := \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{\kappa^2}\mathbf{grad}\,\Psi_V^\kappa(\mathrm{div}_\Gamma\,(\boldsymbol{\mu}))$$

definiert.

Durch die Einführung des Maxwell'schen Einfachschichtpotentials kann die Darstellungsformel kompakt durch

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\Psi}_M^\kappa(\gamma_D \mathbf{U}) + \boldsymbol{\Psi}_S^\kappa(\gamma_N \mathbf{U}) \tag{3.5}$$

für $x \in \Omega$, bzw.

$$\mathbf{U} = -\boldsymbol{\Psi}_M^\kappa(\gamma_D \mathbf{U}) - \boldsymbol{\Psi}_S^\kappa(\gamma_N \mathbf{U}) \tag{3.6}$$

für $x \in \Omega^c$ dargestellt werden. Die kombinierte Darstellungsformel für Innen- und Außenraum lautet dann

$$\mathbf{U} = -\boldsymbol{\Psi}_M^\kappa([\gamma_D \mathbf{U}]_\Gamma) - \boldsymbol{\Psi}_S^\kappa([\gamma_N \mathbf{U}]_\Gamma). \tag{3.7}$$

3.3.1 Eigenschaften der Potentialoperatoren

Lemma 3.15. *Es gilt*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu}) = \Psi_V^\kappa(\operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\mu}))$$

für alle $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$*, im Sinne von* $\mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Beweis: Für Punkte $x \notin \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_x \boldsymbol{\Psi}_A(\boldsymbol{\mu}) &= \int_\Gamma \boldsymbol{\mu}(y) \cdot \mathbf{grad}_x g_\kappa(x,y) ds_y = -\int_\Gamma \boldsymbol{\mu}(y) \cdot \mathbf{grad}_y g_\kappa(x,y) ds_y \\ &= -\int_\Gamma \boldsymbol{\mu}(y) \cdot \nabla_\Gamma g_\kappa(x,y) ds_y = \int_\Gamma (\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\mu})(y) g_\kappa(x,y) ds_y\end{aligned}$$

für $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$. Da $\operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}_A^\kappa$ ein stetiger Operator von $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ nach $\mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ ist, folgt die Gleichheit im Sinne von $\mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ durch stetige Fortsetzung. ■

Satz 3.16. *Das Maxwell'sche Einfachschichtpotential und das Maxwell'sche Doppelschichtpotential sind für beliebige* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ *bzw.* $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ *Lösungen der Differentialgleichung* $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} + \kappa^2 \mathbf{U} = 0$.

Beweis: Wegen $\mathbf{curl}\,\mathbf{grad}\, U = 0$ für $U \in H^1(\Omega)$ folgt $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\Psi}_S^\kappa \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Psi}_M^\kappa(\vec{n} \times \boldsymbol{\mu})$ für $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$. Weiters gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\Psi}_M^\kappa(\vec{n} \times \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu}) = (-\Delta + \mathbf{grad}\operatorname{div})\boldsymbol{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu}) \\ &= -\kappa^2 \boldsymbol{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{grad}\, \Psi_V^\kappa(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\mu}) = -\kappa^2 \boldsymbol{\Psi}_S^\kappa(\boldsymbol{\mu}),\end{aligned}$$

wobei hier die Eigenschaft $\Delta\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu}) = \kappa^2\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu})$ ausgenutzt wurde. Somit folgt

$$(\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\, + \kappa^2 I)\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\boldsymbol{\mu}) = 0,$$
$$(\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\, + \kappa^2 I)\mathbf{\Psi}_M^\kappa(\boldsymbol{\mu}) = 0.$$

Diese Gleichungen gelten im Sinne von $\mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Da die Gleichungen im $\mathbf{H}^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ gelten, können die Gleichungen mit Funktionen aus dem Raum $\mathbf{H}^1_{komp}(\mathbb{R}^3)$ getestet werden. Da dieser Raum dicht im $\mathbf{L}^2_{komp}(\mathbb{R}^3)$ liegt und $\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\boldsymbol{\mu})$ im Raum $\mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ ist, kann die Funktion $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\boldsymbol{\mu})$ stetig auf $\mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ fortgesetzt werden. ∎

Folgerung 3.17. *Für das Maxwell'sche Einfach- und Doppelschichtpotential gelten die folgenden Abbildungseigenschaften:*

$$\mathbf{\Psi}_S^\kappa : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma) \to \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{curl}^{\,2}, \Omega \cup \Omega^c),$$
$$\mathbf{\Psi}_M^\kappa : \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma) \to \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{curl}^{\,2}, \Omega \cup \Omega^c).$$

Lemma 3.18. *Die radialen Komponenten des Einfach- bzw. des Doppelschichtpotentials verhalten sich wie $O(\frac{1}{r^2})$, d.h. $\mathbf{\Psi}_S^\kappa\mathbf{u}(x)\cdot\vec{n} = O(\frac{1}{r^2})$ bzw. $\mathbf{\Psi}_M^\kappa\mathbf{u}(x)\cdot\vec{n} = O(\frac{1}{r^2})$ für $x \in B_r$.*

Beweis: Zunächst wird das Doppelschichtpotential

$$\mathbf{\Psi}_M^\kappa\mathbf{u}(x)\cdot\vec{n} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{curl}\,_x \int_\Gamma \frac{e^{\kappa|x-y|}}{|x-y|}\mathbf{u}(y)ds_y\right)\cdot\vec{n}$$

betrachtet. Untersucht man den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{e^{\kappa|x-y|}}{|x-y|}\right) = -\frac{e^{\kappa|x-y|}(x_i-y_i)}{|x-y|^3} + \frac{\kappa e^{\kappa|x-y|}(x_i-y_i)}{|x-y|^2}$$

etwas näher, so erkennt man, dass $\frac{e^{\kappa|x-y|}(x_i-y_i)}{|x-y|^3} = O(\frac{1}{r^2})$ gilt. Deshalb wird nur noch der zweite Teil betrachtet. Somit folgt

$$\mathbf{\Psi}_M^\kappa\mathbf{u}(x)\cdot\vec{n} = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma (x-y)\times\left(\frac{\kappa e^{\kappa|x-y|}}{|x-y|^2}\cdot\vec{e}\right)ds_y\cdot\vec{n} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

wobei $\vec{e} = (1,1,1)^t$. Nun ist

$$\mathbf{\Psi}_M^\kappa\mathbf{u}(x)\cdot\vec{n} = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma (\vec{n}\times(x-y))\cdot\left(\frac{\kappa e^{\kappa|x-y|}}{|x-y|^2}\cdot\vec{e}\right)ds_y + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Mit Lemma 3.8 folgt nun die Behauptung für das Doppelschichtpotential. Für das Einfachschichtpotential wird die Darstellung

$$\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\kappa^2}\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_M^\kappa(\vec{n}\times\mathbf{u}) = -\frac{1}{\kappa^2}\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u})$$

verwendet (siehe Satz 3.16). Mit der Formel $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl} = -\Delta + \mathbf{grad}\,\mathrm{div}$ erhält man schließlich

$$\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}) \cdot \vec{n} = -\frac{1}{\kappa^2}(-\Delta \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u})) \cdot \vec{n}.$$

Da $\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u})$ eine Lösung der vektoriellen Helmholtzgleichung ist, folgt

$$\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}) \cdot \vec{n} = -\frac{1}{\kappa^2}(-\kappa^2 \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u})) \cdot \vec{n}.$$

Aus

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{e^{\kappa|x-y|}}{|x-y|}\right) = e^{\kappa|x-y|}\Bigg(&\frac{3(x_i-y_i)^2}{|x-y|^5} - \frac{1}{|x-y|^3} - \frac{2\kappa(x_i-y_i)^2}{|x-y|^4} \\ &- \frac{\kappa(x_i-y_i)^2}{|x-y|^4} + \frac{\kappa^2(x_i-y_i)^2}{|x-y|^3} + \frac{\kappa}{|x-y|^2}\Bigg)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{\kappa|x-y|}}{|x-y|}\right) = e^{\kappa|x-y|}\Bigg(&\frac{3(x_i-y_i)(x_j-y_i)}{|x-y|^5} \\ &- \frac{3\kappa(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^4} + \frac{\kappa^2(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3}\Bigg)\end{aligned}$$

und Vernachlässigung von Termen der Ordnung $O(\frac{1}{r^2})$, erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}_S\mathbf{u}(x) \cdot \vec{n} = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma e^{\kappa|x-y|}\Bigg(&\sum_{i=1}^3 \frac{-\vec{n}_i}{|x-y|} \\ &+ \frac{(x_i-y_i)\vec{n}_i((x_1-y_1)+(x_2-y_2)+(x_3-y_3))}{|x-y|^3}\Bigg) + O\left(\frac{1}{r^2}\right).\end{aligned}$$

Der Ausdruck in der Klammer lässt sich nun aber auch folgendermaßen schreiben,

$$\begin{aligned}&\frac{(\vec{e}\cdot(x-y))((x-y)\cdot\vec{n}) - ((x-y)\cdot(x-y))(\vec{n}\cdot\vec{e})}{|x-y|^3} \\ &= \frac{\vec{e}\cdot((x-y)((x-y)\cdot\vec{n}) - \vec{n}((x-y)\cdot(x-y)))}{|x-y|^3} \\ &= \frac{\vec{e}\cdot((x-y)\times((x-y)\times\vec{n}))}{|x-y|^3} \\ &= O\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right),\end{aligned}$$

womit alles gezeigt wäre. ■

Bemerkung 3.19. *Es macht keinen Unterschied, ob die Abstrahlbedingung*

$$\int\limits_{\partial B_r} |\gamma_N \mathbf{U} - ik\mathbf{U}|^2 ds_x \to 0 \qquad \textit{für } r \to \infty$$

oder die oft verwendete Abstrahlbedingung

$$\int\limits_{\partial B_r} |\gamma_N \mathbf{U} - ik\gamma_D \mathbf{U}|^2 ds_x \to 0 \qquad \textit{für } r \to \infty$$

betrachtet wird.

Satz 3.20. *Das Maxwell'sche Einfachschichtpotential bzw. Doppelschichtpotential erfüllen die Silver-Müller-Abstrahlbedingung (1.27).*

Beweis: Für das Maxwell'sche Einfachschichtpotential ist zu zeigen, dass

$$\int\limits_{\partial B_r} |\gamma_N \mathbf{\Psi}_S(\mathbf{u}) - ik\gamma_D \mathbf{\Psi}_S(\mathbf{u})|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt. Um dies zu zeigen, werden die zwei Terme des Einfachschichtpotentials getrennt voneinander betrachtet. Dies kann getan werden, da

$$f(a) := \gamma_N a - ik\gamma_D a$$

ein lineares Funktional ist und somit $|f(a+b)|^2 \leq 2(|f(a)|^2 + |f(b)|^2)$ gilt. Die Silver-Müller-Bedingung lässt sich auch in folgender Form schreiben,

$$\int\limits_{\partial B_r} |(\nabla \times \mathbf{U}) \times \vec{n} - ik(\vec{n} \times \mathbf{U}) \times \vec{n}|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen der Vektoridentität

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$$

kann dies auch in folgender Weise formal geschrieben werden als

$$\int\limits_{\partial B_r} |(\nabla \cdot \vec{n})\mathbf{U} - \nabla(\mathbf{U} \cdot \vec{n}) - ik((\vec{n} \cdot \vec{n})\mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \vec{n})\vec{n})|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dies ist aber erfüllt, falls

$$\int\limits_{\partial B_r} \left| \frac{U_l}{\partial x_i} - ikU_l n_i \right|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt. Für $\mathbf{U}(x) = \int\limits_\Gamma \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\mathbf{w}(y)ds_y$ ist

$$\int\limits_{\partial B_r} \left| \int\limits_\Gamma (\partial_{x_i} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - ik\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} n_i) w_l(y) ds_y \right|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

zu zeigen, bzw.

$$\int\limits_{\partial B_r} \left| \int\limits_\Gamma \left(\frac{ike^{ik|x-y|}(x_i - y_i) - e^{ik|x-y|}\frac{(x_i-y_i)}{|x-y|}}{|x-y|^2} - ik\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} n_i \right) w_l(y) ds_y \right|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen $(x_i - y_i) - n_i|x-y| = o(1)$ gilt die letzte Behauptung. Für den zweiten Teil des Einfachschichtpotentials, also

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{grad}_x V_k \mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{w}(x) = \mathbf{grad}_x \int\limits_\Gamma \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{w}(y) ds_y$$

muss noch überprüft werden, ob der Ausdruck

$$\int\limits_{\partial B_r} |(\nabla \times \mathbf{U}) \times \vec{n} - ik(\vec{n} \times \mathbf{U}) \times \vec{n}|^2 ds_x$$

für $r \to \infty$ gegen Null strebt. Aufgrund der Identität (vgl. Satz 2.39)

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{grad} = 0 \tag{3.8}$$

ist dies aber erfüllt, falls

$$\int\limits_{\partial B_r} \left| \int\limits_\Gamma \vec{n} \times \left(\frac{ike^{ik|x-y|}(x_j - y_j) - e^{ik|x-y|}\frac{(x_j-y_j)}{|x-y|}}{|x-y|^2} \right)_{j=1,3} \times \vec{n}\, ds_y \right|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.9}$$

gilt. Nach Lemma 3.8 gilt jedoch $\vec{n} \times (x-y) = O(1)$, daher ist auch die Aussage (3.9) richtig.
Für das Doppelschichtpotential ist

$$\int\limits_{\partial B_r} |\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u} \times \vec{n}) \times \vec{n} - \kappa\vec{n} \times \mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u} \times \vec{n}) \times \vec{n}|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

zu zeigen, dies kann aber aufgrund der Identität (3.8) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial B_r} |\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}\times\vec{n})\times\vec{n} - \kappa\vec{n}\times\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}\times\vec{n})\times\vec{n}|^2 ds_x \\
&= \int\limits_{\partial B_r} |-\kappa^2\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}\times\vec{n})\times\vec{n} - \kappa\vec{n}\times\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}\times\vec{n})\times\vec{n}|^2 ds_x \\
&= \int\limits_{\partial B_r} \kappa|\vec{n}\times -\kappa\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}\times\vec{n})\times\vec{n} + \mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}\times\vec{n})\times\vec{n}|^2 ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Dies wurde aber bereits gezeigt. ■

Folgerung 3.21. *Aus Satz 3.16 und Satz 3.20 folgt somit, dass auch ein indirekter Ansatz zur Lösung des Problems möglich ist, d.h. es gibt die folgenden Ansätze:*

- *Einfachschichtpotentialansatz (indirekt):*

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_S\mathbf{w}(x)$$

- *Doppelschichtpotentialansatz (indirekt):*

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_M\mathbf{v}(x)$$

- *Direkter Ansatz:*

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_S\gamma_N\mathbf{U}(x) + \mathbf{\Psi}_M\gamma_D\mathbf{U}(x)$$

Satz 3.22. *Für eine Lösung der Maxwell-Gleichungen, welche die Abstrahlbedingung (1.27) erfüllt, gilt die asymptotische Darstellungsformel*

$$\mathbf{U}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left(\mathbf{U}_\infty(\vec{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right), \quad |x|\to\infty,$$

für alle Richtungen $\vec{x} = \frac{x}{|x|}$, wobei $\mathbf{U}_\infty(\vec{x})$ auf der Einheitssphäre definiert ist. Außerdem gilt

$$\vec{n}\cdot\mathbf{U}_\infty(\vec{x}) = 0.$$

Beweis: Siehe [13, Seite 164]. ■

3.4 Randintegraloperatoren

Nachdem alle benötigten Eigenschaften der Potentialoperatoren gezeigt sind, wird nun ihr Verhalten beim Übergang auf den Rand untersucht. Hieraus ergeben sich dann die für diesen Teilabschnitt namensgebenden Randintegraloperatoren.

Lemma 3.23. *Es gilt*

$$\gamma_N \mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}) = (\gamma_D \mathbf{\Psi}_M^\kappa(\vec{n} \times \mathbf{u})) \times \vec{n},$$
$$\gamma_N \mathbf{\Psi}_M^\kappa(\mathbf{v}) = -\kappa^2 (\gamma_D(\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{v} \times \vec{n}))) \times \vec{n}.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\, \mathbf{\Psi}_S^\kappa(\mathbf{u}) \times \vec{n} = \mathbf{curl}\, \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u}) \times \vec{n} &= \gamma_\times \mathbf{\Psi}_M^\kappa(\vec{n} \times \mathbf{u}) \\ &= (\gamma_D(\mathbf{\Psi}_M^\kappa(\vec{n} \times \mathbf{u}))) \times \vec{n}\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\, \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{v} \times \vec{n}) \times \vec{n} = -\kappa^2 \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{v} \times \vec{n}) \times \vec{n} = -\kappa^2 (\gamma_D(\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{v} \times \vec{n}))) \times \vec{n}.$$

■

Bemerkung 3.24. *Betrachtet man Lemma 3.23 etwas genauer, so erkennt man eine gewisse Symmetrie zwischen den Operatoren. Würde man die Spuroperatoren etwas modifizieren, konkret*

$$\tilde{\gamma}_D := \gamma_\times, \qquad \tilde{\gamma}_N = \frac{1}{\kappa} \gamma_\times \circ \mathbf{curl}\,,$$

und die Potentialoperatoren entsprechend ändern,

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_S(\boldsymbol{\mu}) := \kappa \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{\kappa} \mathbf{grad}\, \Psi_V^\kappa \mathrm{div}_\Gamma\,(\boldsymbol{\mu}),$$
$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_M(\boldsymbol{\mu}) := \mathbf{curl}\, \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\boldsymbol{\mu}),$$

dann würde Lemma 3.23 folgendermaßen lauten:

$$\tilde{\gamma}_N \mathbf{\Psi}_S^\kappa(\boldsymbol{\mu}) = \tilde{\gamma}_D \mathbf{\Psi}_M^\kappa(\boldsymbol{\mu}), \qquad \tilde{\gamma}_N \mathbf{\Psi}_M^\kappa(\boldsymbol{\mu}) = \tilde{\gamma}_D \mathbf{\Psi}_S^\kappa(\boldsymbol{\mu}).$$

Weiters müsste in diesem Fall auch noch das Skalarprodukt verändert werden:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\tilde{\Gamma}} := \int_\Gamma (\mathbf{u} \times \vec{n}) \cdot \mathbf{v} ds_x.$$

Dies hätte zur Folge, dass man nur zwei anstelle von vier Randintegraloperatoren benötigen würde, außerdem würde man nur noch den Sobolev-Raum $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma)$ *anstatt* $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma)$ *und* $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma)$ *benötigen. Jedoch hätte man einen Spuroperator, der von der Frequenz* κ *abhängig ist, und ein unsymmetrisches Skalarprodukt. Jedoch erkennt man dennoch sehr schön einige Unterschiede zur Helmholtz-Gleichung, da zum Beispiel das Einfachschichtpotential und der hypersinguläre Operator (wird in Folge definiert) für die Maxwell-Gleichungen die selbe Ordnung besitzen.*

Aufbauend auf den Potentialoperatoren können nun die Randintegraloperatoren eingeführt werden. Dies passiert durch Anwendung des Dirichlet- bzw. Neumanndatums auf das Maxwell'sche Einfachschicht bzw. Doppelschichtpotential.

Satz 3.25 (Sprungbedingungen). *Für den Übergang aus dem Innenraum gelten fast überall die folgenden Darstellungen für $x \in \Gamma$:*

$$\begin{aligned}
\gamma \Psi_V^\kappa u(x) &= \int_\Gamma g_\kappa(x,y) u(y) ds_y =: V_\kappa u(x), \\
\gamma_D \mathbf{\Psi}_A^\kappa \mathbf{w}(x) &= \int_\Gamma \gamma_{D,x}(g_\kappa(x,y)\mathbf{w}(y)) ds_y =: \mathsf{A}_\kappa \mathbf{w}(x), \\
\gamma_D \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) &= \int_\Gamma \gamma_{D,x}(g_\kappa(x,y)\mathbf{w}(y)) ds_y - \frac{1}{\kappa^2}\nabla_{|\Gamma} \Psi_V^\kappa(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{w}(x)) =: \mathsf{S}^\kappa \mathbf{w}(x), \\
\gamma_D \mathbf{\Psi}_M^\kappa \mathbf{v}(x) &= \gamma_{D,x} \mathbf{curl}_x \int_\Gamma g_\kappa(x,y)(v(y) \times \vec{n}_y) ds_y =: \left(\frac{1}{2} I + \mathsf{C}_\kappa\right) \mathbf{v}(x), \\
\gamma_N \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) &= \frac{1}{2}\mathbf{w}(x) + \int_\Gamma \gamma_{N,x}(g_\kappa(x,y)\mathbf{w}(y)) ds_y =: \left(\frac{1}{2} I + \mathsf{B}_\kappa\right) \mathbf{w}(x), \\
\gamma_N \mathbf{\Psi}_M^\kappa \mathbf{v}(x) &= \gamma_{N,x} \mathbf{curl}_x \int_\Gamma (g_\kappa(x,y)\mathbf{v}(y) \times \vec{n}_y) ds_y =: \mathsf{N}_\kappa \mathbf{v}(x).
\end{aligned}$$

Für den Übergang aus dem Außenraum gilt dementsprechend für $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
\gamma^c \Psi_V^\kappa u(x) &=: V_\kappa u(x), \\
\gamma_D^c \mathbf{\Psi}_A^\kappa \mathbf{w}(x) &=: \mathsf{A}_\kappa \mathbf{w}(x), \\
\gamma_D^c \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) &=: \mathsf{S}^\kappa \mathbf{w}(x), \\
\gamma_D^c \mathbf{\Psi}_M^\kappa \mathbf{v}(x) &=: \left(-\frac{1}{2} I + \mathsf{C}_\kappa\right) \mathbf{v}(x), \\
\gamma_N^c \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) &=: \left(-\frac{1}{2} I + \mathsf{B}_\kappa\right) \mathbf{w}(x), \\
\gamma_N^c \mathbf{\Psi}_M^\kappa \mathbf{v}(x) &=: \mathsf{N}_\kappa \mathbf{v}(x).
\end{aligned}$$

Somit gelten die Sprungbedingungen

$$[\gamma \Psi_V^\kappa]_\Gamma = 0,$$

bzw.

$$\begin{aligned}
[\gamma_D \mathbf{\Psi}_A^\kappa]_\Gamma &= 0, & [\gamma_N \mathbf{\Psi}_A^\kappa]_\Gamma &= -I, \\
[\gamma_D \mathbf{\Psi}_S^\kappa]_\Gamma &= 0, & [\gamma_N \mathbf{\Psi}_S^\kappa]_\Gamma &= -I, \\
[\gamma_D \mathbf{\Psi}_M^\kappa]_\Gamma &= -I, & [\gamma_N \mathbf{\Psi}_M^\kappa]_\Gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Beweis: Die Sprungbedingungen für Ψ_V^κ finden sich in [32] . Aus diesen folgt $[\gamma_D \mathbf{\Psi}_A^\kappa]_\Gamma = 0$. Diese beiden Eigenschaften zusammengesetzt ergeben $[\gamma_D \mathbf{\Psi}_S^\kappa]_\Gamma = 0$. Aus der Darstellungsformel (3.7) folgt nun $[\gamma_D \mathbf{\Psi}_M^\kappa]_\Gamma = I$. Aus Lemma 3.23 folgen nun die anderen zwei Bedingungen für $\mathbf{\Psi}_S$ bzw. $\mathbf{\Psi}_M$. Die zweite Bedingung für $\mathbf{\Psi}_A$ folgt nun aus jener für $\mathbf{\Psi}_S$ und $\mathbf{curl}\,\mathbf{grad} = 0$. Die Aussagen für die Sprungbedingungen finden sich bei [11] bzw. [7]. ■

Satz 3.26. *Für die Randintegraloperatoren gelten die folgenden Abbildungseigenschaften:*

$$\begin{aligned}
V_\kappa &: H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma),\\
\mathsf{S}_\kappa &: \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma),\\
\mathsf{A}_\kappa &: \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma),\\
\mathsf{B}_\kappa &: \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma),\\
\mathsf{C}_\kappa &: \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma),\\
\mathsf{N}_\kappa &: \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma).
\end{aligned}$$

Für A_κ gibt es eine weitere wichtige Abbildungseigenschaft:

$$\mathsf{A}_\kappa \;:\; \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma).$$

Beweis: Für den ersten Block kombiniere man die Abbildungseigenschaften der Potentialoperatoren und der Spuroperatoren. Die zweite Aussage für A_κ findet sich in [22]. ■

Satz 3.27. *Für die Bilinearform des hypersingulären Operators N_κ gilt die Darstellung*

$$\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \kappa^2 \langle \mathsf{A}_\kappa(R\mathbf{u}), R\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{V}_\kappa(\mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{u}), \mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{v}\rangle$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma)$.

Beweis: Aufgrund der Sprungbedingungen gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle &= \langle \gamma_N \mathbf{\Psi}_M(\mathbf{u}), \gamma_D \mathbf{V}\rangle\\
&= \int_\Omega (\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_M^\kappa(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{V} - \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_M^\kappa(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{V})\, dx.
\end{aligned}$$

Verwendet man nun die Darstellung

$$\mathbf{\Psi}_M^\kappa = \mathbf{curl}_x \int_\Gamma (\mathbf{u} \times \vec{n})(y) g_\kappa(x,y) ds_y$$

und die Eigenschaft, dass $\mathbf{\Psi}_M^\kappa$ eine Lösung der Maxwell-Gleichungen ist, so erhält man

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega \mathbf{curl}_x \mathbf{curl}_x \int_\Gamma (\mathbf{u} \times \vec{n})(y) g_\kappa(x,y) ds_y \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{V}(x) dx\\
&\quad + \int_\Omega \kappa^2 \mathbf{\Psi}_M^\kappa(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{V} dx.
\end{aligned}$$

Verwendet man nun die Identität $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl} = -\Delta + \mathbf{grad}\,\mathrm{div}$, so folgt

$$= \int\limits_{\Omega} (-\Delta + \mathbf{grad}_x \mathrm{div}_x) \int\limits_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \vec{n}) g_\kappa(x,y) ds_y \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{V}(x) dx$$
$$+ \kappa^2 \int\limits_{\Omega} \mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_A^\kappa(u \times \vec{n}) \cdot \mathbf{V} dx.$$

Da $g_\kappa(x,y)$ eine Lösung der Helmholtzgleichung ist, folgt

$$= \int\limits_{\Omega} \mathbf{grad}_x \int\limits_{\Gamma} \mathrm{div}_\Gamma\,(\mathbf{u} \times \vec{n})(y) g_\kappa(x,y) ds_y \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{V}(x) dx$$
$$- \kappa^2 \int\limits_{\Omega} \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u} \times \vec{n}) \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{V} dx + \kappa^2 \int\limits_{\Omega} \mathbf{curl}\,\mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u} \times \vec{n}) \cdot \mathbf{v}\, dx.$$

Durch Verwenden der ersten Greenschen Formel folgt dann (mit $\mathbf{v} = \mathbf{V}_{|\Gamma}$)

$$= -\int\limits_{\Gamma} \nabla_\Gamma \int\limits_{\Gamma} \mathrm{div}_\Gamma\,(\mathbf{u} \times \vec{n})(y) g_\kappa(x,y) ds_y \cdot (\mathbf{v} \times \vec{n})(x) ds_x$$
$$+ \kappa^2 \int\limits_{\Gamma} \gamma_D \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u} \times \vec{n}) \cdot (\mathbf{v} \times \vec{n}) ds_x.$$

Mit Hilfe der Adjungiertheitseigenschaften von ∇_Γ folgt schließlich

$$= + \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \mathrm{div}_\Gamma\,(\mathbf{u} \times \vec{n})(y) g_\kappa(x,y) \mathrm{div}_\Gamma\,(\mathbf{v} \times \vec{n})(x) ds_y ds_x$$
$$+ \kappa^2 \int\limits_{\Gamma} \gamma_D \mathbf{\Psi}_A^\kappa(\mathbf{u} \times \vec{n}) \cdot (\mathbf{v} \times \vec{n}) ds_x.$$

Mit $\mathrm{div}_\Gamma\,(\mathbf{u} \times \vec{n}) = \mathrm{curl}_\Gamma\,\mathbf{u}$ folgt schließlich die Behauptung. ∎

3.4.1 Randintegralgleichungen und Calderon-Projektor

Wendet man nun die beiden Spuroperatoren auf die Darstellungsformel (3.5) an, so erhält man die Randintegralgleichungen

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_D \mathbf{E} = & \mathsf{S}^\kappa(\gamma_N \mathbf{E}) & + & (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)(\gamma_D \mathbf{E}), \\ \gamma_N \mathbf{E} = & (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)(\gamma_N \mathbf{E}) & + & \mathsf{N}_\kappa(\gamma_D \mathbf{E}). \end{array}$$

Für den Außenraum lauten diese entsprechend

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_D^c \mathbf{E} = & -\mathsf{S}^\kappa(\gamma_N^c \mathbf{E}) & + & (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)(\gamma_D^c \mathbf{E}), \\ \gamma_N^c \mathbf{E} = & (\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_\kappa)(\gamma_N^c \mathbf{E}) & + & -\mathsf{N}_\kappa(\gamma_D^c \mathbf{E}). \end{array}$$

Nun lässt sich leicht die so genannte Calderon-Projektionseigenschaft nachweisen.

Satz 3.28. *Für $\theta \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $\phi \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ erfüllt der Operator für den Innenraum*

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa & \mathsf{S}_\kappa \\ \mathsf{N}_\kappa & \frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa & -\mathsf{S}_\kappa \\ -\mathsf{N}_\kappa & \frac{1}{2}I - \mathsf{B}_\kappa \end{pmatrix}$$

für den Außenraum die Eigenschaft

$$\mathcal{C}^2 \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}.$$

Beweis: Da wie in Satz 3.16 gezeigt, das Maxwell'sche Einfach- und Doppelschichtpotential Lösungen der Differentialgleichung sind, kann der Beweis analog wie im skalaren Fall geführt werden (siehe hierzu [32, Seite 130]). ■

Folgerung 3.29. *Für die Randintegraloperatoren gelten im Innen- und Außenraum die folgenden Relationen*

$$\mathsf{S}_\kappa \mathsf{N}_\kappa = \frac{1}{4}I - \mathsf{C}_\kappa^2, \tag{3.10}$$

$$\mathsf{N}_\kappa \mathsf{S}_\kappa = \frac{1}{4}I - \mathsf{B}_\kappa^2, \tag{3.11}$$

$$-\mathsf{N}_\kappa \mathsf{C}_\kappa = \mathsf{B}_\kappa \mathsf{N}_\kappa, \tag{3.12}$$

$$-\mathsf{C}_\kappa \mathsf{S}_\kappa = \mathsf{S}_\kappa \mathsf{B}_\kappa. \tag{3.13}$$

Definition 3.30. *Ist der Operator S_κ invertierbar, so wird durch*

$$\mathsf{T}_\kappa := \mathsf{S}_\kappa^{-1}(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa) \quad : \quad \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_{\Gamma}, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma) \tag{3.14}$$

der Steklov-Poincarè Operator definiert, der eine Dirichlet zu Neumann-Abbildung darstellt. Eine weitere, symmetrische Darstellung ist

$$\mathsf{T}_\kappa := \mathsf{N}_\kappa + (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathsf{S}_\kappa^{-1}(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa). \tag{3.15}$$

Diese erhält man, wenn die erste Darstellung in die zweite Randintegralgleichung eingesetzt wird.

3.5 Eigenschaften der Randintegraloperatoren

Lemma 3.31. *Seien* $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{curl}\,, \Omega^c)$ *Lösungen der Differentialgleichung (1.25) im Außenraum, dann gilt*

$$\int\limits_{\partial B_r} (\gamma_D \mathbf{U} \gamma_N \mathbf{V} - \gamma_D \mathbf{V} \gamma_N \mathbf{U}) ds_x \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis: Der Beweis wird wie in [11, Seite 9] geführt. Aus der Abstrahlbedingung (1.24) folgt

$$\gamma_N \mathbf{U} - \kappa \gamma_D \mathbf{U} = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

für $r \to \infty$. Da aber für eine Lösung des Außenraumproblems auch $\mathbf{U} = O(1/r)$ gilt, folgt somit

$$\int\limits_{\partial B_r} (\gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \mathbf{V} - \gamma_N \mathbf{V} \gamma_D \mathbf{U})\, ds_x = \int\limits_{\partial B_r} (\kappa \gamma_D \mathbf{U} \gamma_D \mathbf{V} - \kappa \gamma_D \mathbf{V} \gamma_D \mathbf{U})\, ds_x + o(1) = o(1)$$

für $r \to \infty$ womit alles gezeigt wäre. ∎

Satz 3.32. *Es gilt*

$$\langle \mathsf{B}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathsf{C}_\kappa \mathbf{v} \rangle.$$

für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma\,, \Gamma)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma\,, \Gamma)$.

Beweis: Der Beweis soll ähnlich geführt werden wie in [4], [9] und [11]. Sei $\mathbf{U} = \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{u}$ bzw. $\mathbf{V} = \mathbf{\Psi}_M^\kappa \mathbf{v}$, dann gilt aufgrund der 1. Greenschen Formel für das Gebiet $B_r \setminus \Omega$

$$\langle \gamma_N^c \mathbf{U}, \gamma_D^c \mathbf{V} \rangle = -\int\limits_{B_r \setminus \Omega} \left(\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}} - \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{V}}\right) dx + \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x.$$

Da $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ Lösungen der Differentialgleichung sind, folgt

$$\begin{aligned} &= -\int\limits_{B_r \setminus \Omega} \left(\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\overline{\mathbf{V}}\right) dx + \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x \\ &= \langle \gamma_N^c \overline{\mathbf{V}}, \gamma_D^c \overline{\mathbf{U}} \rangle + \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x - \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \overline{\mathbf{V}} \gamma_D \mathbf{U} ds_x \end{aligned}$$

und aufgrund der Sprungbedingungen

$$
\begin{aligned}
&= \langle \gamma_N \overline{\mathbf{V}}, \gamma_D \overline{\mathbf{U}} \rangle + \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x - \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \overline{\mathbf{V}} \gamma_D \mathbf{U} ds_x \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(\mathbf{curl}\, \mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{V}} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\, \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{V}} \right) dx \\
&\quad + \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x - \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \overline{\mathbf{V}} \gamma_D \mathbf{U} ds_x \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(\mathbf{curl}\, \mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\mathbf{V}} - \mathbf{curl}\, \mathbf{curl}\, \mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{V}} \right) dx \\
&\quad + \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x - \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \overline{\mathbf{V}} \gamma_D \mathbf{U} ds_x \\
&= \langle \gamma_N \mathbf{U}, \gamma_D \mathbf{V} \rangle + \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \mathbf{U} \gamma_D \overline{\mathbf{V}} ds_x - \int\limits_{\partial B_r} \gamma_N \overline{\mathbf{V}} \gamma_D \mathbf{U} ds_x .
\end{aligned}
$$

Dank Lemma 3.31 gilt nun

$$\langle \gamma_N^c \mathbf{U}, \gamma_D^c \mathbf{V} \rangle = \langle \gamma_N \mathbf{U}, \gamma_D \mathbf{V} \rangle.$$

Aus den Sprungbedingungen folgt nun

$$
\begin{aligned}
\langle \mathsf{B}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= -\frac{1}{2} \langle \gamma_N^c \mathbf{U} + \gamma_N \mathbf{U}, \gamma_D \mathbf{V} - \gamma_D^c \mathbf{V} \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \langle \gamma_N^c \mathbf{U} - \gamma_N \mathbf{U}, \gamma_D^c \mathbf{V} + \gamma_D \mathbf{V} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathsf{C}_\kappa \mathbf{v} \rangle.
\end{aligned}
$$

■

Satz 3.33. *Die Operatoren A_0 und V_0 sind bezüglich den Räumen $\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ bzw. $H^{-1/2}(\Gamma)$ selbstadjungiert.*

Beweis: Siehe [11]. ■

Definition 3.34. *Das Newtonpotential wird durch*

$$(\mathcal{N}^\kappa \mathbf{w})(x) := \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{e^{\kappa |x-y|}}{|x-y|} \mathbf{w}(y) dy$$

definiert.

Satz 3.35. *Das Newtonpotential* $\mathcal{N}^\kappa$ *besitzt die Abbildungseigenschaft*

$$\mathcal{N}^\kappa : \tilde{H}^s(\Omega) \to H^{s+2}(\Omega)$$

für alle $s \in [-2, 0]$

Beweis: Siehe [29, Seite 82]. ■

Satz 3.36. *Es gilt die folgende Darstellung*

$$\mathbf{\Psi}_A^\kappa := \mathcal{N}^\kappa \gamma_D^* \quad : \quad \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}^1(\Omega),$$

wobei γ_D^* *der adjungierte Operator der Dirichletspur ist.*

Beweis: Sei $\mathbf{U} = \mathbf{\Psi}_A^\kappa \mathbf{w}$, dann gilt $U_i = e_i \cdot \mathbf{\Psi}_A^\kappa \mathbf{w}$. Da $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)$ ein tangentiales Vektorfeld ist gilt nun

$$\begin{aligned} u_i = e_i \cdot \mathbf{\Psi}_A^\kappa \mathbf{w} &= \int_\Gamma (g_\kappa(x,y)e_i) \cdot \mathbf{w}(y) ds_y = \int_\Gamma (g_\kappa(x,y)e_i) \cdot (\vec{n} \times \mathbf{w}(y) \times \vec{n}) ds_y \\ &= \int_\Gamma (\vec{n} \times g_\kappa(x,y) e_i \times \vec{n}) \cdot \mathbf{w}(y) ds_y = \int_\Omega g_\kappa(x,y) e_i \cdot \gamma_D^* \mathbf{w}(y) dy \\ &= e_i \cdot \int_\Omega g_\kappa(x,y) \gamma_D^* \mathbf{w}(y) dy = e_i \cdot \mathcal{N}^\kappa \gamma_D^* \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Da dies für $i = 1, 2, 3$ gilt, folgt

$$\mathbf{U} = \mathcal{N}^\kappa \gamma_D^* \mathbf{w}$$

■

Satz 3.37. *Der Operator* $\mathsf{B}_\kappa - \mathsf{B}_{\kappa'} : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ *ist kompakt.*

Beweis: Da

$$\gamma_N \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w} = \gamma_N \mathbf{\Psi}_A^\kappa \mathbf{w}$$

gilt, wird im folgenden $\mathbf{\Psi}_A^\kappa$ statt $\mathbf{\Psi}_S^\kappa$ betrachtet. Es ist $\mathsf{B}_\kappa - \mathsf{B}_{\kappa'} = \gamma_N(\mathbf{\Psi}_A^\kappa - \mathbf{\Psi}_A^{\kappa'})$ und mit Satz 3.36 folgt

$$\mathsf{B}_\kappa - \mathsf{B}_{\kappa'} = \gamma_N(\mathcal{N}^\kappa - \mathcal{N}^{\kappa'})\gamma_D^* \mathbf{w}.$$

Da

$$\gamma_D : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma)$$

stetig ist, gilt dies auch für den adjungierten Spuroperator

$$\gamma_D^* : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}^{-1}(\Omega).$$

Laut [29] ist $\mathcal{N}^\kappa - \mathcal{N}^{\kappa'}$ von $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbf{H}^3(\Omega)$ stetig, und die Einbettung von $\mathbf{H}^3(\Omega)$ in $\mathbf{H}^2(\Omega)$ kompakt. Weiters ist die Einbettung von $\mathbf{H}^2(\Omega)$ in $\mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega)$ stetig (da die Normen abgeschätzt werden können). Da aber auch die Neumannspur

$$\gamma_N : \mathbf{H}(\mathbf{curl}^2, \Omega) \to \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$$

stetig ist, ist $\mathsf{B}_\kappa - \mathsf{B}_{\kappa'} : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ kompakt, da aber

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)}$$

ist, gilt dies auch für die Räume, wie sie im Satz angegeben sind. ∎

Folgerung 3.38. *Aus dem Satz von Schauder (siehe [14]) folgt nun, dass auch*

$$\mathsf{C}_\kappa - \mathsf{C}_{\kappa'} : \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$$

kompakt ist.

Satz 3.39. *Die Operatoren*

$$\mathsf{A}_\kappa - \mathsf{A}_0 : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$$

und

$$V_\kappa - V_0 : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$$

sind kompakt.

Beweis: Dies kann analog wie für $\mathsf{B}_\kappa - \mathsf{B}_{\kappa'}$ gezeigt werden. ∎

Satz 3.40. *Für $\kappa \in \mathbb{R}$ mit $\kappa \leq 0$ gilt*

$$\langle V_\kappa \phi, \phi \rangle \geq C \cdot \|\phi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

für alle $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Beweis: Siehe [29, Seite 123]. ∎

Satz 3.41. *Für $\kappa \in \mathbb{R}$ mit $\kappa \leq 0$ gilt*

$$\langle \mathsf{A}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq C \cdot \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)}$$

für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)$.

Beweis: Für A_0 siehe [7], für A_κ folgt der Beweis analog, wenn man die Eigenschaft für V_κ benützt. ∎

Satz 3.42. *Für $\kappa \in \mathbb{R}$ mit $\kappa < 0$ ist das Einfachschichtpotential S_κ $\mathbf{H}_\|^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$-elliptisch und selbstadjungiert, dasselbe gilt für den hypersingulären Operator N_κ bezüglich dem Raum $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathsf{A}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{\kappa^2} \langle V_\kappa \mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{u}, \mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{u} \rangle \\
&\geq \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\|^{-1/2}(\Gamma)} + \frac{1}{\kappa^2} \|\mathrm{div}_\Gamma\, \mathbf{u}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\geq \frac{1}{\kappa^2} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\|^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)} .
\end{aligned}$$

Für den hypersingulären Operator ist

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \kappa^2 \langle \mathsf{A}_\kappa (\mathbf{u} \times \vec{n}), \mathbf{u} \times \vec{n} \rangle + \langle V_\kappa \mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{u}, \mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{u} \rangle \\
&\geq \kappa^2 \|\mathbf{u} \times \vec{n}\|^2_{\mathbf{H}_\|^{-1/2}(\Gamma)} + \|\mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{u}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\geq \kappa^2 \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} ,
\end{aligned}$$

da $\|\mathbf{u} \times \vec{n}\|^2_{\mathbf{H}_\|^{-1/2}(\Gamma)} = \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\Gamma)}$ gilt. ∎

Definition 3.43. *Für $\kappa < 0$ wird durch*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} := \sqrt{\langle \mathsf{S}_\kappa^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ eine in $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ äquivalente Norm definiert.

Die folgenden Aussagen wurden ursprünglich in [32] für den Laplace-Operator bewiesen. Diese können jedoch relativ leicht auf den Operator $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl} + \kappa^2 I$ übertragen werden, falls $\kappa \in \mathbb{R}$ mit $\kappa < 0$ gilt.

Satz 3.44. *Für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ gilt für $\kappa > 0$*

$$(1 - c_K) \|\mathbf{u}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \leq \left\| (\frac{1}{2} I - \mathsf{C}_\kappa) \mathbf{u} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \leq c_K \|\mathbf{u}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}$$

mit

$$c_K = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^S c_1^N} < 1.$$

Hierbei sind c_1^S und c_1^N die Elliptizitätskonstanten des Einfachschichtpotentials S_κ und des hypersingulären Operators N_κ.

Beweis: Es gilt

$$\left\|\left(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa\right)\mathbf{u}\right\|^2_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} = \langle \mathsf{S}_\kappa^{-1}(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}, (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}\rangle$$
$$= \langle \mathsf{T}_\kappa\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathsf{N}_\kappa\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$$

für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$, wobei T_κ wie in (3.15) definiert ist. Sei

$$J : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$$

die Rieszabbildung (die Räume $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ und $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ sind Hilberträume, siehe [7, Seite 8]), dann ist $A := J\mathsf{S}_\kappa^{-1}$ selbstadjungiert und $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$-elliptisch. Sei nun $A = A^{1/2}A^{1/2}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{T}_\kappa\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \langle \mathsf{S}_\kappa^{-1}(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \\
&= \langle J\mathsf{S}_\kappa^{-1}(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} \\
&= \langle A^{1/2}(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}, A^{1/2}\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} \\
&\leq \left\|A^{1/2}(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}\right\|_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} \left\|A^{1/2}\mathbf{u}\right\|_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)}
\end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}
\left\|A^{1/2}\mathbf{v}\right\|^2_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} &= \langle A^{1/2}\mathbf{v}, A^{1/2}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} \\
&= \langle J\mathsf{S}_\kappa^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} \\
&= \langle \mathsf{S}_\kappa^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\
&= \|\mathbf{v}\|^2_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}
\end{aligned}$$

erhält man schließlich

$$\langle \mathsf{T}_\kappa\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \leq \left\|(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}\right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \|\mathbf{u}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}.$$

Andererseits gilt für den hypersingulären Operator

$$\langle \mathsf{N}_\kappa\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geq c_1^N \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} \geq c_1^N c_1^S \langle \mathsf{S}_\kappa^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = c_1^N c_1^S \|\mathbf{u}\|^2_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}.$$

Insgesamt folgt somit

$$\begin{aligned}
\left\|(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}\right\|^2_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} &= \langle \mathsf{T}_\kappa\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathsf{N}_\kappa\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \\
&\leq \left\|(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u}\right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \|\mathbf{u}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} - c_1^N c_1^S \|\mathbf{u}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}.
\end{aligned}$$

Mit

$$a := \left\| (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{u} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \geq 0, \quad b := \|\mathbf{u}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} > 0$$

ist dies gleichbedeutend zu

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} + c_1^N c_1^S \leq 0$$

und damit

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^N c_1^S} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_1^N c_1^S}.$$

■

Folgerung 3.45. *Für* $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ *gilt*

$$(1 - c_K)\|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \leq \left\| (\frac{1}{2}I + \mathsf{C})\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \leq c_K \|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}.$$

Beweis: Mit der Kontraktionseigenschaft von $\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa$ folgt

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} &= \left\| (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} + (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \\
&\leq \left\| (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} + \left\| (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} \\
&\leq \left\| (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}} + c_K \|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}
\end{aligned}$$

womit die untere Abschätzung folgt. Mit den Darstellungen (3.14) und (3.15) folgt

$$\begin{aligned}
\left\| (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 &= \left\| (I - (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa))\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 \\
&= \|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 + \left\| (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 - 2\langle \mathsf{S}_\kappa^{-1}(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{L_2(\Gamma)} \\
&= \|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 + \left\| (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 - 2\langle \mathsf{T}_\kappa\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{L_2(\Gamma)} \\
&= \|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 - \left\| (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 - 2\langle \mathsf{N}_\kappa\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{L_2(\Gamma)} \\
&\leq (1 - (1 - c_K)^2 - 2c_1^S c_1^N)\|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 = c_K^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2,
\end{aligned}$$

womit der Satz gezeigt ist. ■

Folgerung 3.46. *Für* $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ *und der durch* S_κ *induzierten Norm gilt*

$$(1 - c_K) \|\mathbf{w}\|_{\mathsf{S}_\kappa} \leq \left\| (\frac{1}{2} I \pm \mathsf{B}_\kappa) \mathbf{w} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa} \leq c_K \|\mathbf{w}\|_{\mathsf{S}_\kappa} .$$

Beweis: Für $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ existiert ein eindeutig bestimmtes $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ mit $\mathbf{v} = \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}$. Mit der Symmetrieeigenschaft (3.13) gilt

$$\begin{aligned} \left\| (\frac{1}{2} I \pm \mathsf{B}_\kappa) \mathbf{w} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa}^2 &= \langle \mathsf{S}_\kappa (\frac{1}{2} I \pm \mathsf{B}_\kappa \mathsf{S}_\kappa^{-1} \mathbf{v}, (\frac{1}{2} I \pm \mathsf{B}_\kappa) \mathsf{S}_\kappa^{-1} \rangle \\ &= \langle (\frac{1}{2} I \mp \mathsf{C}_\kappa) \mathbf{v}, \mathsf{S}_\kappa^{-1} (\frac{1}{2} I \mp \mathsf{C}_\kappa) \mathbf{v} \rangle = \left\| (\frac{1}{2} I \mp \mathsf{C}_\kappa) \mathbf{v} \right\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathsf{S}_\kappa}^2 = \langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathsf{S}_\kappa^{-1} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|_{\mathsf{S}_\kappa^{-1}}^2 .$$

∎

In diesem Kapitel wurde die Elliptizität einiger Operatoren bewiesen, im Folgenden wird man es jedoch meist mit Operatoren zu tun haben, welche sich lediglich als Summe eines elliptischen und eines kompakten Operators darstellen lassen. Dies stellt jedoch kein großes Problem für die Analysis dar, da sich aus der Fredholmschen Alternative der folgende Satz ableiten lässt.

Definition 3.47. *Ein Operator* $A : X \to X^*$ *heißt koerziv, bzw. erfüllt eine Garding-Ungleichung falls ein kompakter Operator* $C : X \to X^*$ *existiert, so dass*

$$\langle (A + C)u, u \rangle \geq \|u\|_X^2$$

für alle $u \in X$ *gilt.*

Satz 3.48. *Ist der Operator* $A : X \to X^*$ *koerziv und injektiv, so besitzt die Gleichung*

$$Au = f$$

eine eindeutige Lösung.

Beweis: Siehe [16]. ∎

4 Modifizierte Randintegralgleichungen

Wie am Beginn des vorhergehenden Kapitels gezeigt wurde, ist das Ausgangsproblem (1.25)-(1.27) eindeutig lösbar, für die dazugehörigen Randintegralgleichungen kann dies jedoch nicht immer gewährleistet werden, insbesondere wenn die Frequenz einem Eigenwert des entsprechenden Innenraumproblems entspricht.

Satz 4.1. *Ist $k^2 = \lambda$ ein Eigenwert des inneren Dirichlet-Problems*

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U}(x) = k^2\mathbf{U}(x) \qquad \textit{in } \Omega, \tag{4.1}$$

$$\gamma_D\mathbf{U}(x) = 0 \qquad \textit{auf } \Gamma, \tag{4.2}$$

dann ist $\gamma_N\mathbf{U}(x)$ im Kern von S_κ und $(-\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)$ mit $\kappa = ik$.

Beweis: Dieses Eigenwertproblem entspricht dem Innenraumproblem der Maxwell-Gleichungen, d.h.

$$\begin{aligned} \gamma_D\mathbf{U} &= \mathsf{S}_\kappa(\gamma_N\mathbf{U}) + (\tfrac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)(\gamma_D\mathbf{U}), \\ \gamma_N\mathbf{U} &= (\tfrac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)(\gamma_N\mathbf{U}) + \mathsf{N}_\kappa(\gamma_D\mathbf{U}). \end{aligned}$$

Aus $\gamma_D\mathbf{U} = 0$ folgt $\mathsf{S}_\kappa(\gamma_N\mathbf{U}) = 0$ und $(-\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)(\gamma_N\mathbf{U}) = 0$. ■

Satz 4.2. *Ist $k^2 = \lambda$ ein Eigenwert des inneren Neumann-Problems*

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{U}(x) &= k^2\mathbf{U}(x) \qquad \textit{in } \Omega, \\ \gamma_N\mathbf{U}(x) &= 0 \qquad \textit{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

dann ist $\gamma_D\mathbf{U}(x)$ im Kern von N_κ und $(-\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)$ mit $\kappa = ik$

Beweis: Dieses Eigenwertproblem entspricht dem Innenraumproblem der Maxwell-Gleichungen, d.h.

$$\begin{aligned} \gamma_D\mathbf{U} &= \mathsf{S}_\kappa(\gamma_N\mathbf{U}) + (\tfrac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)(\gamma_D\mathbf{U}), \\ \gamma_N\mathbf{U} &= (\tfrac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)(\gamma_N\mathbf{U}) + \mathsf{N}_\kappa(\gamma_D\mathbf{U}). \end{aligned}$$

Aus $\gamma_N\mathbf{U} = 0$ folgt $\mathsf{N}_\kappa(\gamma_D\mathbf{U}) = 0$ und $(-\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)(\gamma_D\mathbf{U}) = 0$. ■

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, diese Schwierigkeiten im Zusammenhang mit Randintegralgleichungen zu behandeln. Die erste Methode wurde in [17] vorgeschlagen, und in [20] für elektromagnetische Probleme behandelt. Hierbei wird ein zweiter Hilfsrand konstruiert, auf dem eine weitere Randintegralgleichung eingeführt wird. Danach werden die Randintegralgleichungen auf dem ursprünglichen und dem künstlichen Rand geschickt addiert, wodurch man eine eindeutig lösbare Formulierung erhält. Jedoch kann auch diese Methode Stabilitätsprobleme hervorbringen. Ein kurzer einführender Artikel zu dieser Methode ist [31]. Die zweite, bekanntere Methode sind sogenannte kombinierte Randintegralgleichungen. Diese wurden zuerst für akustische Streuprobleme von Brakhage und Werner in [3] behandelt, und danach von Panich für elektromagnetische Probleme in [27]. Nun soll zunächst kurz auf den Ansatz von Brakhage und Werner eingegangen werden.

4.1 Ansatz von Brakhage und Werner

Die Idee von Brakhage und Werner beruht einfach darauf, eine geschickte Kombination aus Einfachschichtpotential und Doppelschichtpotential zu wählen. Genauer gesagt wählten sie die komplexe Linearkombination

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) - i\eta \mathbf{\Psi}_M^\kappa \mathbf{w}(x) \qquad \text{für } x \in \Omega^c.$$

Dies führt im Falle des äußeren Dirichletproblems zu der Randintegralgleichung

$$\gamma_D^c \mathbf{U}(x) = \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}(x) + i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma. \tag{4.3}$$

Im Falle der Helmholtz-Gleichung ist das Pendant der Randintegralgleichung (4.3) für hinreichend glatte Gebiete eindeutig lösbar (siehe [3]), im Falle der Maxwell-Gleichungen ist nicht einmal dies vollständig geklärt. Spätestens im Falle von nicht glatten Gebieten kann die eindeutige Lösbarkeit des obigen Ansatzes jedoch nicht mehr gewährleistet werden. Dies rührt daher, dass das Doppelschichtpotential in diesem Fall keine kompakte Abbildung mehr darstellt, und diese Eigenschaft wesentlich bei der Herleitung der eindeutigen Lösbarkeit ist. Daher wird es nötig, eine Regularisierung der Potentialoperatoren einzuführen. Hierfür gibt es nun zwei Möglichkeiten:

- Regularisierung des Einfachschichtpotentials, d.h.

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_S^\kappa R\mathbf{w}(x) - i\eta \mathbf{\Psi}_M^\kappa \mathbf{w}(x), \tag{4.4}$$

  mit $R : \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$.

- Regularisierung des Doppelschichtpotentials, d.h.

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) - i\eta \mathbf{\Psi}_M^\kappa B\mathbf{w}(x), \tag{4.5}$$

  mit $B : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$.

Bemerkung 4.3. *Da $\mathbf{\Psi}_S^\kappa$ bzw. $\mathbf{\Psi}_M^\kappa$ jeweils Lösungen der Differentialgleichung (1.25) sind und die Abstrahlbedingung (1.27) erfüllen, gilt dies auch für den Ansatz von Brakhage und Werner, bzw. für die Regularisierungen dieses Ansatzes.*

Für die Wahl dieser Regularisierungen gibt es nun mehrere Möglichkeiten, eine hiervon ist der Ansatz von Buffa und Hiptmair.

4.2 Ansatz von Buffa und Hiptmair

In diesem Teilkapitel soll nun der Ansatz von Buffa und Hiptmair (siehe [9]) für die Regularisierung des Doppelschichtpotentials betrachtet werden.
Aus dem Ansatz (4.5) ergibt sich nach Spurbildung die Randintegralgleichung

$$\gamma_D^c \mathbf{U}(x) = \mathsf{Z}_\kappa \mathbf{w}(x) = \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}(x) + i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)B\mathbf{w}(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma. \tag{4.6}$$

Eine Möglichkeit, die Invertierbarkeit des Operators $\mathsf{Z}_\kappa : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ zu gewährleisten, ist nachzuweisen, dass er injektiv und koerziv ist. Die Idee von Buffa und Hiptmair ist nun, den Operator B kompakt zu wählen, wodurch nur noch die Koerzivität von S_κ und die Injektivität des Operators Z_κ zu zeigen ist.

4.2.1 Koerzivität von S_κ

Um die Koerzivität von S_κ zeigen zu können, benötigen wir zunächst folgenden Hilfsoperator.

Definition 4.4. *Sei*

$$\mathsf{S}_{\kappa,0}\mathbf{u} := \mathsf{A}_0\mathbf{u} - \frac{1}{\kappa^2}\nabla_\Gamma V_0 \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{u}$$

für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$.

Satz 4.5. *Der Operator* $\mathsf{S}_{\kappa,0} - \mathsf{S}_\kappa : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ *ist kompakt.*

Beweis: Dies folgt aus der Kompaktheit von $\mathsf{A}_\kappa - \mathsf{A}_0$ und $V_\kappa - V_0$ (siehe Satz 3.39). ■

Da aber $\mathsf{S}_{\kappa,0}$ leider nicht wie im Falle der Helmholtz-Gleichung elliptisch ist, ist es notwendig, eine verallgemeinerte Gardingsche Ungleichung zu beweisen. Hierzu seien

$$\mathcal{X} : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{curl}_\Gamma (H^{1/2}(\Gamma))$$

und

$$\mathcal{Y} : \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \nabla_\Gamma (H^{3/2}(\Gamma)) \cap \mathbf{H}_\perp^{1/2}(\Gamma)$$

die Projektionen von $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ auf die beiden orthogonalen Unterräume, welche sich aus der Hodge-Zerlegung ergeben (siehe Satz 2.43). Der Operator X sei dann durch

$$X := \mathcal{X} - \mathcal{Y}$$

definiert.

Satz 4.6. S_κ *erfüllt die verallgemeinerte Gardingsche Ungleichung*

$$|\langle \mathsf{S}_\kappa \boldsymbol{\mu}, X\boldsymbol{\mu}\rangle + c_\Gamma(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu})| \geq c\,\|\boldsymbol{\mu}\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma)}$$

für alle $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma)$*, wobei* $c_\Gamma(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu})$ *eine kompakte Bilinearform ist (siehe [9]).*

Beweis: Da $\mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{curl}_\Gamma\,\mathbf{u} = 0$ für $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt (siehe [6]), folgt für $\kappa = ik$

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{S}_{\kappa,0}\boldsymbol{\mu}, X\boldsymbol{\mu}\rangle &= \langle \mathsf{A}_0\boldsymbol{\mu}, X\boldsymbol{\mu}\rangle + \frac{1}{k^2}\langle \nabla_\Gamma V_0 \mathrm{div}_\Gamma\,\boldsymbol{\mu}, X\boldsymbol{\mu}\rangle \\
&= \langle \mathsf{A}_0\boldsymbol{\mu}, X\boldsymbol{\mu}\rangle - \frac{1}{k^2}\langle V_0 \mathrm{div}_\Gamma\,\boldsymbol{\mu}, \mathrm{div}_\Gamma\,X\boldsymbol{\mu}\rangle \\
&= \langle \mathsf{A}_0\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\rangle + \langle \mathsf{A}_0\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\rangle - \langle \mathsf{A}_0\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle - \langle \mathsf{A}_0\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle \\
&\quad - \frac{1}{k^2}\langle V_0\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}, \mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\rangle - \frac{1}{k^2}\langle V_0\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\rangle \\
&\quad + \frac{1}{k^2}\langle V_0\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}, \mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle + \frac{1}{k^2}\langle V_0\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle.
\end{aligned}$$

Aus $\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{X}\boldsymbol{\mu} = 0$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{S}_{\kappa,0}\boldsymbol{\mu}, X\boldsymbol{\mu}\rangle &= \langle \mathsf{A}_0\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\rangle + \langle \mathsf{A}_0\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\rangle - \langle \mathsf{A}_0\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle - \langle \mathsf{A}_0\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle \\
&\quad + \frac{1}{k^2}\langle V_0\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle.
\end{aligned}$$

Da aber $\langle \mathsf{A}_0\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\rangle$, $\langle \mathsf{A}_0\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle$ und $\langle \mathsf{A}_0\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle$ kompakte Bilinearformen sind (siehe [22]) folgt aus Satz 4.5

$$\begin{aligned}
|\langle \mathsf{S}_\kappa\boldsymbol{\mu}, X\boldsymbol{\mu}\rangle + c_\Gamma(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu})| &= |\langle \mathsf{A}_0\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}, \mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\rangle + \frac{1}{k^2}\langle V_0\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}, \mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\rangle| \\
&\geq c_1\,\|\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + c_2\,\|\mathcal{X}\boldsymbol{\mu}\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\geq c\,\|\boldsymbol{\mu}\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma)},
\end{aligned}$$

da $\|\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\,\|\mathrm{div}_\Gamma\,\mathcal{Y}\boldsymbol{\mu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ gilt (siehe [22]). ■

Für die Injektivität des Operators Z_κ ist es nun notwendig, den Operator B so zu wählen, dass er die Ungleichung

$$\langle B\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}\rangle > 0 \tag{4.7}$$

für alle $0 \neq \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma)$ erfüllt. Die Konstruktion eines solchen Operators ist in [9] angeführt, da diese jedoch etwas technisch ist, soll an dieser Stelle nur kurz auf die Idee eingegangen werden. Diese besteht darin, den Operator B über die Variationsformulierung

$$\langle B\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathrm{div}_\Gamma\,B\mathbf{u}, \mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}\times\vec{n}, \mathbf{u}\rangle$$

zu definieren, wobei die Gleichheit für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$, $B\mathbf{u} \in X$ und alle $\mathbf{v} \in X$ gelten soll. X ist hierbei ein Raum, der kompakt in $\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ eingebettet werden kann und gleichzeitig dicht in diesem ist. Mit Hilfe von Dichtheitsargumenten kann dann die notwendige Bedingung (4.7) gezeigt werden. Die Kompaktheit des Operators ergibt sich direkt aus der kompakten Einbettung des Raumes X in $\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$.

4.3 Modifizierte Randintegralgleichungen

Im folgenden sollen nun regularisierende Operatoren für das Dirichlet- und Neumannproblem gefunden werden, welche auf die Kompaktheit verzichten und ausschließlich aus bereits bekannten Operatoren gebildet werden können. Die Motivation hierfür stammt wiederum von der Helmholtz-Gleichung ab, da in diesem Falle dieser Ansatz bereits erfolgreich umgesetzt werden konnte (siehe [15] bzw. [16]).

4.3.1 Dirichletproblem

Für das Dirichletproblem soll nun eine geeignete Modifizierung des Doppelschichtpotentials gewählt werden, d.h. man betrachtet den Ansatz

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) - i\eta \mathbf{\Psi}_M^\kappa B\mathbf{w}(x) \qquad \text{für } x \in \Omega^c,$$

welcher durch Spurbildung zur Randintegralgleichung

$$\mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}(x) + i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)B\mathbf{w}(x) = \mathbf{g}(x) \quad \text{für } x \in \Gamma$$

führt. Um Symmetrien ausnützen zu können, wird der Operator B durch

$$B = \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa) : \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$$

definiert, wobei $\mathsf{S}_0^* : \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ wiederum durch

$$\mathsf{S}_0^* \mathbf{u} := \vec{n} \times \mathsf{A}_0(\mathbf{u} \times \vec{n}) + \mathbf{curl}_\Gamma\, V_0 \mathrm{curl}_\Gamma\, \mathbf{u}$$

definiert ist.

Bemerkung 4.7. *Der Operator S_0^{*-1} kann hierbei durch diverse Operatoren ersetzt werden. Für die Theorie sind nur drei Dinge entscheidend:*

- *Der Operator bildet von $\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ nach $\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ ab,*
- *der Operator ist $\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$-elliptisch,*

- *der Operator ist selbstadjungiert bezüglich dem Raum* $\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$.

Die Tatsache, dass in dieser Arbeit ein inverser Operator gewählt wird, beruht darauf, dass dieser Ansatz besonders günstig für eine spätere Sattelpunktformulierung ist, welche eine Approximation der resultierenden Randintegralgleichung ermöglicht.

Diese notwendigen Eigenschaften sollen nun für den Operator S_0^{*-1} gezeigt werden. Hierzu wird gezeigt, dass S_0^* selbstadjungiert ist und bezüglich dem Raum $\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ elliptisch. Da der Operator auch beschränkt ist, folgt dann aus dem Satz von Lax-Milgram, dass der Operator S_0^* invertierbar ist. Die geforderten Eigenschaften für S_0^{*-1} folgen damit aus jenen von S_0^*.

Satz 4.8. *Der Operator* $\mathsf{S}_0^* : \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ *ist selbstadjungiert.*

Beweis: Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$, dann gilt aufgrund von Satz 3.33

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{S}_0^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \vec{n} \times \mathsf{A}_0(\mathbf{u} \times \vec{n}), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{curl}_\Gamma V_0 \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathsf{A}_0(\mathbf{u} \times \vec{n}), \mathbf{v} \times \vec{n} \rangle + \langle V_0 \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u}, \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u} \times \vec{n}, \mathsf{A}_0(\mathbf{v} \times \vec{n}) \rangle + \langle \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u}, V_0 \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u} \times \vec{n}, \mathsf{A}_0(\mathbf{v} \times \vec{n}) \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{curl}_\Gamma V_0 \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathsf{S}_0^* \mathbf{v} \rangle.
\end{aligned}$$

■

Satz 4.9. *Der Operator* $\mathsf{S}_0^* : \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ *ist elliptisch bezüglich dem Raum* $\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$.

Beweis: Wegen Satz 2.53 gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{S}_0^* \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathsf{A}_0(\mathbf{u} \times \vec{n}), (\mathbf{u} \times \vec{n}) \rangle + \langle V_0 \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u}, \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u} \rangle \\
&\geq c_1 \left\| \mathbf{u} \times \vec{n} \right\|^2_{\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\Gamma)} + c_2 \left\| \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u} \right\|^2_{\mathbf{H}^{-1/2}} \\
&= c_1 \left\| \mathbf{u} \right\|^2_{\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma)} + c_2 \left\| \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u} \right\|^2_{\mathbf{H}^{-1/2}} \\
&\geq c_{min} \left\| \mathbf{u} \right\|^2_{\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)}.
\end{aligned}$$

■

Somit wäre der Operator S_0^* invertierbar. Zu lösen ist dann also die Formulierung

$$\mathsf{Z}_\kappa = \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}(x) + i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}(x) = \mathbf{g}(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma. \tag{4.8}$$

Die Invertierbarkeitkeit von Z_κ kann nun nach Satz 3.48 gezeigt werden, indem die Koerzivität und die Injektivität des Operators nachgewiesen wird.

4.3.2 Koerzivität von Z_κ

Satz 4.10. *Für* S_0 *gilt*

$$\operatorname{Im}[\langle \mathsf{S}_{\kappa,0}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}\rangle] = 0$$

für alle $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$.

Beweis: Dies folgt aus der Selbstadjungiertheit von A_0 und V_0. ∎

Mit Hilfe dieser Eigenschaft kann nun die Koerzivität von Z_κ gezeigt werden.

Satz 4.11. *Der Operator* $\mathsf{Z}_\kappa = \mathsf{S}_\kappa + i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_k)$ *erfüllt die Gardingsche Ungleichung*

$$\operatorname{Im}[\langle \mathsf{Z}_\kappa\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}\rangle + c_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})] \geq C \cdot \|\boldsymbol{\mu}\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}$$

für alle $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ *mit einer kompakten Bilinearform* $c_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})$.

Beweis: $\langle \mathsf{S}_{\kappa,0}\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle$ ist reell. Das selbe gilt für das Dualitätsprodukt

$$\langle \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}\rangle.$$

Aufgrund von Folgerung 3.46 gilt aber für $\kappa' < 0$

$$\left\|(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_{\kappa'})\mathbf{w}\right\|_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)} \geq c \left\|\mathbf{w}\right\|_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}$$

für alle $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$. Da der Operator S_0^{*-1} elliptisch ist, folgt daraus

$$\langle \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_{\kappa'})\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_{\kappa'})\mathbf{w}\rangle \geq c_I c_E \left\|\mathbf{w}\right\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}.$$

Da sich nun Z_κ in folgender Form schreiben lässt,

$$\begin{aligned}\mathsf{Z}_\kappa = \mathsf{S}_{\kappa,0} + \underbrace{(\mathsf{S}_\kappa - \mathsf{S}_{\kappa,0})}_{\text{kompakt}} + i\eta\Big((\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_{k'})\mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_{k'}) \\ \underbrace{+ (\mathsf{C}_{\kappa'} - \mathsf{C}_\kappa)\mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa) + (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_{\kappa'})\mathsf{S}_0^{*-1}(\mathsf{B}_\kappa - \mathsf{B}_{\kappa'})}_{\text{kompakt}}\Big),\end{aligned}$$

gilt somit

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left[\langle \mathsf{Z}_\kappa\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + c_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})\right] &= \operatorname{Im}\left[\langle \mathsf{S}_{\kappa,0}\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + i\eta\langle \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_k)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_k)\mathbf{w}\rangle\right] \\ &= \operatorname{Im}\left[\langle \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_k)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_k)\mathbf{w}\rangle\right] \\ &\geq c_I c_E \left\|\mathbf{w}\right\|^2_{\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}.\end{aligned}$$

∎

4.3.3 Injektivität von Z_κ

Satz 4.12. *Ist $\kappa = ik$, so gilt*

$$\operatorname{Im}[\langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle] \geq 0$$

für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$.

Beweis: Der folgende Beweis beruht im wesentlichen auf der Beweisidee, wie sie in [16] für den Helmholtzoperator aufgeführt ist. Aus der 1. Greenschen Formel folgt

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{U} \cdot \mathbf{curl}\,\mathbf{V} dx - \int_\Gamma \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \mathbf{V} ds_x = k^2 \int_\Omega \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} dx.$$

Setzt man $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{U}}$, so erhält man

$$\int_\Omega \left(|\mathbf{curl}\,\mathbf{U}|^2 - k^2 |\mathbf{U}|^2 \right) dx = \int_\Gamma \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x.$$

$\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x)$ ist eine Lösung des Maxwellproblems, d.h. es gelten

$$\begin{aligned} \gamma_N \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) &= \frac{1}{2} \mathbf{w}(x) + \mathsf{B}_\kappa \mathbf{w}(x), \\ \gamma_D \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) &= \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}(x). \end{aligned}$$

Sei nun B_R groß genug, sodass $\Omega \subset B_R$, außerdem sei $\Omega_R = B_R \setminus \overline{\Omega}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \left(|\mathbf{curl}\,\mathbf{U}|^2 - k^2 |\mathbf{U}|^2 \right) dx &= \int_{\Omega_R} \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x \\ &= \int_{\partial B_R} \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x - \int_\Gamma \gamma_N^c \mathbf{U} \cdot \gamma_D^c \overline{\mathbf{U}} ds_x. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \gamma_N^c \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) &= -\frac{1}{2} \mathbf{w}(x) + \mathsf{B}_\kappa \mathbf{w}(x), \\ \gamma_D^c \mathbf{\Psi}_S^\kappa \mathbf{w}(x) &= \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\int_{B_R} \left(|\mathbf{curl}\,\mathbf{U}|^2 - k^2 |\mathbf{U}|^2 \right) dx = \langle \mathbf{w}, \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w} \rangle + \int_{\partial B_R} \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x.$$

Hieraus ergibt sich wiederum

$$\operatorname{Im}[\langle \mathbf{w}, \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}\rangle] = -\operatorname{Im}\left[\int_{\partial B_R} \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x\right].$$

Aus der Silver-Müller Abstrahlbedingung

$$\int_{\partial B_R} |\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \times \vec{n} - ik(\vec{n} \times \mathbf{U}) \times \vec{n}|^2 ds_x \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_R} \|\gamma_N \mathbf{U} - ik\gamma_D \mathbf{U}\|^2 \, ds_x &= \int_{\partial B_R} \|\gamma_N \mathbf{U}\|^2 + \|ik\gamma_D \mathbf{U}\|^2 - 2\operatorname{Re}[\gamma_N \mathbf{U} \cdot \overline{ik\gamma_D \mathbf{U}}] ds_x \\
&= \int_{\partial B_R} \|\gamma_N \mathbf{U}\|^2 + \|ik\gamma_D \mathbf{U}\|^2 - 2k\operatorname{Im}\left[\gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}}\right] ds_x \\
&= \int_{\partial B_R} \|\gamma_N \mathbf{U}\|^2 + \|ik\gamma_D \mathbf{U}\|^2 \, ds_x + 2k\operatorname{Im}[\langle \mathbf{w}, \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}\rangle] \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$2k \cdot \operatorname{Im}[\langle \mathbf{w}, \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}\rangle] \leq 0,$$

bzw.

$$2k \cdot \operatorname{Im}[\langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle] \geq 0.$$

■

Satz 4.13. *Ist k^2 kein Eigenwert des inneren Dirichletproblems (4.1)-(4.2), dann folgt aus $\mathsf{S}_\kappa \mathbf{w} = 0$ stets $\mathbf{w} = 0$.*

Beweis: Siehe [29, Seite 138]. ■

Satz 4.14. *Der Operator*

$$\mathsf{Z}_\kappa = \mathsf{S}_\kappa + i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)$$

mit der Abbildungseigenschaft $\mathsf{Z}_\kappa : \mathbf{H}_\|^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ ist für $\kappa = ik$ injektiv.

Beweis: Der folgende Beweis beruht im wesentlichen auf der Beweisidee, wie sie in [16] für den Helmholtzoperator aufgeführt ist.
Sei $w \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ eine Lösung der Gleichung

$$\mathsf{Z}_\kappa \mathbf{w}(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Daraus folgt

$$0 = \langle \mathsf{Z}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle + i\eta \langle \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w} \rangle$$

und somit

$$\operatorname{Im}\left[\langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle + i\eta \langle \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w} \rangle \right] = 0.$$

Aus dem vorigen Satz ergibt sich nun

$$\eta \langle \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w} \rangle = -\operatorname{Im}[\langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle] \leq 0$$

und daraus

$$(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w} = 0.$$

Ebenso gilt nun

$$\mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Dies ist für $\mathbf{w} = 0$ oder einen Eigenwert $\lambda = k^2$ erfüllt. Ist dies der Fall, so gilt aber

$$(\mathsf{S}_{\pm\sqrt{\lambda}} \gamma_N \mathbf{U}_\lambda)(x) = 0, \qquad (\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_{\pm\sqrt{\lambda}})\gamma_N \mathbf{U}_\lambda(x) = 0.$$

Also ist

$$(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_{\pm\sqrt{\lambda}})\mathbf{w}(x) = 0, \qquad (\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_{\pm\sqrt{\lambda}})\mathbf{w}(x) = 0$$

und somit $\mathbf{w} = 0$. ∎

Somit ist der Operator Z_κ invertierbar. Um jedoch eine Lösung näherungsweise berechnen zu können, wird noch eine Variationsformulierung benötigt.

4.3.4 Variationsformulierung

Testet man nun die Gleichung (4.6) mit Testfunktionen $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$, so erhält man die Variationsformulierung

$$\langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}\rangle - i\eta\langle(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}\rangle = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\tau}\rangle.$$

Setzt man nun

$$\mathbf{z} = \mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$$

als die eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\langle \mathsf{S}_0^* \mathbf{z}, \mathbf{v}\rangle = \langle(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$, so erhält man eine Sattelpunktformulierung:
Finde $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$, sodass

$$\begin{array}{rcccl} \langle \mathsf{S}_\kappa \mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}\rangle & - & i\eta\langle(\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{z}, \boldsymbol{\tau}\rangle & = & \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\tau}\rangle \\ -\langle(\frac{1}{2}I + \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle & + & \langle \mathsf{S}_0^* \mathbf{z}, \mathbf{v}\rangle & = & 0 \end{array} \tag{4.9}$$

für alle $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ gilt. Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, da es äquivalent zur ausgehenden Randintegralgleichung (4.8) ist. Leider zeigt sich, dass die Koerzivität des Systems (4.9) nicht wie im Helmholtzfall bewiesen werden kann. Eine solche Abschätzung würde die Verwendung von Standard-Argumenten bei der numerischen Analysis der Diskretisierung ermöglichen (siehe zum Beispiel [30]). Somit erscheint nur die Approximation des Operators Z_κ durch eine Galerkin-Approximation des inversen Operators analog zur Diskretisierung des Steklov-Poincarè Operators gangbar (siehe [33]).

4.4 Neumann-Problem

Hier geht man von dem Ansatz

$$\mathbf{U}(x) = \boldsymbol{\Psi}_M^\kappa \mathbf{v}(x) + i\eta \boldsymbol{\Psi}_S^\kappa R\mathbf{v}(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c$$

mit

$$R = \mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa) : \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$$

aus. Dabei ist

$$\langle \mathsf{N}_0^* \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle := \langle \mathsf{A}_0 \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle V_0 \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}\rangle$$

für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$.

Satz 4.15. *Der Operator* $\mathsf{N}_0^* : \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ *ist selbstadjungiert und* $\mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$*-elliptisch.*

Zu lösen ist also die Randintegralgleichung

$$\mathsf{U}_\kappa \mathbf{w}(x) = \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}(x) - i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_\kappa)\mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}(x) = \mathbf{g}(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma.$$

4.4.1 Koerzivität von U_κ

Definition 4.16. *Für* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ *sei*

$$\langle \mathsf{N}_{\kappa,0}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle := \kappa^2 \langle \mathsf{A}_0(\mathbf{u} \times \vec{n}), (\mathbf{u} \times \vec{n})\rangle + \langle V_0 \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u}, \mathrm{curl}_\Gamma \mathbf{u}\rangle.$$

Satz 4.17. *Für* $\mathsf{N}_{\kappa,0}$ *und* $\kappa = ik$ *gilt*

$$\mathrm{Im}[\langle \mathsf{N}_{\kappa,0}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}\rangle] = 0$$

für alle $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$.

Beweis: Dies ergibt sich aus der selbigen Eigenschaft von A_0 und V_0. ∎

Satz 4.18. *Der Operator*

$$\mathsf{U}_\kappa = \mathsf{N}_\kappa - i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_\kappa)\mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)$$

mit der Abbildungseigenschaft $\mathsf{U}_\kappa : \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \to \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ *ist koerziv.*

Beweis: $\langle \mathsf{N}_{\kappa,0}\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle$ ist reell. Dasselbe gilt für das Dualitätsprodukt

$$\langle \mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}\rangle.$$

Aufgrund von Folgerung 3.45 gilt

$$\left\| (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_{\kappa'})\mathbf{w} \right\|_{\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)} \geq c \left\| \mathbf{w} \right\|_{\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)}.$$

Da der Operator N_0^{*-1} elliptisch ist, folgt daraus

$$\langle \mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_{\kappa'})\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_{\kappa'})\mathbf{w}\rangle \geq c_I c_E \left\| \mathbf{w} \right\|^2.$$

Da sich nun U_κ in folgender Form schreiben lässt,

$$\mathsf{U}_\kappa = \mathsf{N}_{\kappa,0} + \underbrace{(\mathsf{N}_\kappa - \mathsf{N}_{\kappa,0})}_{\text{kompakt}} - i\eta\Big((\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_{\kappa'})\mathsf{S}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_{\kappa'})$$
$$+ \underbrace{(\mathsf{B}_{\kappa'} - \mathsf{B}_\kappa)\mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa) + (\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_{\kappa'})\mathsf{N}_0^{*-1}(\mathsf{C}_\kappa - \mathsf{C}_{\kappa'})}_{\text{kompakt}}\Big),$$

gilt somit

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Im}\left[\langle \mathsf{U}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + c(\mathbf{w},\mathbf{w})\right] &= -\mathrm{Im}\left[\langle \mathsf{N}_{\kappa,0}\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle - i\eta\langle \mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}\rangle\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[\langle \mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}\rangle\right] \\
&\geq c_I c_E \left\|\mathbf{w}\right\|^2_{\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)}
\end{aligned}
$$

mit einer kompakten Bilinearform $c(\mathbf{w},\mathbf{w})$. ∎

4.4.2 Injektivität von U_κ

Satz 4.19. *Es gilt*

$$
\mathrm{Im}[\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle] \leq 0
$$

für $\kappa = ik$ *und alle* $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$.

Beweis: Aus der 1. Greenschen Formel folgt

$$
\int_\Omega \mathbf{curl}\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{curl}\,\mathbf{V}dx - \int_\Gamma \gamma_N\mathbf{U}\cdot\gamma_D\mathbf{V}ds_x = k^2\int_\Omega \mathbf{U}\cdot\mathbf{V}dx.
$$

Setzt man $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{U}}$, so erhält man

$$
\int_\Omega \left(|\mathbf{curl}\,\mathbf{U}|^2 - k^2|\mathbf{U}|^2\right)dx = \int_\Gamma \gamma_N\mathbf{U}\cdot\gamma_D\overline{\mathbf{U}}ds_x.
$$

Sei nun $\mathbf{U}(x) = \mathbf{\Psi}_M^\kappa\mathbf{w}(x)$ und damit eine Lösung der Differentialgleichung (1.25), d.h. es gelten

$$
\begin{aligned}
\gamma_N\mathbf{\Psi}_M^\kappa\mathbf{w}(x) &= \mathsf{N}_\kappa\mathbf{w}(x), \\
\gamma_D\mathbf{\Psi}_M^\kappa\mathbf{w}(x) &= \frac{1}{2}\mathbf{w}(x) + \mathsf{C}_\kappa\mathbf{w}(x).
\end{aligned}
$$

Sei nun B_R groß genug, sodass $\Omega \Subset B_R$ gilt, außerdem sei $\Omega_R = B_R \setminus \overline{\Omega}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} \left(|\mathbf{curl}\,\mathbf{U}|^2 - k^2|\mathbf{U}|^2\right)dx &= \int_{\Omega_R} \gamma_N\mathbf{U}\cdot\gamma_D\overline{\mathbf{U}}ds_x \\
&= \int_{\partial B_R} \gamma_N\mathbf{U}\cdot\gamma_D\overline{\mathbf{U}}ds_x - \int_\Gamma \gamma_N^c\mathbf{U}\cdot\gamma_D^c\overline{\mathbf{U}}ds_x.
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt

$$\gamma_N^c \mathbf{\Psi}_M^\kappa(x) = \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}(x),$$
$$\gamma_D^c \mathbf{\Psi}_M^\kappa(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{w}(x) + \mathsf{C}_\kappa \mathbf{w}(x).$$

Daraus folgt nun

$$\int\limits_{B_R} \left(|\mathbf{curl}\,\mathbf{U}|^2 - k^2|\mathbf{U}|^2\right) dx = \langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + \int\limits_{\partial B_R} \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x.$$

Hieraus ergibt sich wiederum

$$\mathrm{Im}[\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle] = -\mathrm{Im}\left[\int\limits_{\partial B_R} \gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}} ds_x\right].$$

Aus der Silver-Müller Abstrahlbedingung

$$\int\limits_{\partial B_R} |\mathbf{curl}\,\mathbf{U} \times \vec{n} - ik(\vec{n} \times \mathbf{U}) \times \vec{n}|^2 ds_x \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

erhält man nun

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B_R} \|\gamma_N \mathbf{U} - ik\gamma_D \mathbf{U}\|^2 ds_x &= \int\limits_{\partial B_R} \|\gamma_N \mathbf{U}\|^2 + \|ik\gamma_D \mathbf{U}\|^2 - 2k\mathrm{Re}[\gamma_N \mathbf{U} \cdot \overline{ik\gamma_D \mathbf{U}}] ds_x \\
&= \int\limits_{\partial B_R} \|\gamma_N \mathbf{U}\|^2 + \|ik\gamma_D \mathbf{U}\|^2 - 2k\mathrm{Im}[\gamma_N \mathbf{U} \cdot \gamma_D \overline{\mathbf{U}}] ds_x \\
&= \int\limits_{\partial B_R} \|\gamma_N \mathbf{U}\|^2 + \|ik\gamma_D \mathbf{U}\|^2 ds_x + 2k\mathrm{Im}[\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle] \to 0
\end{aligned}$$

für $r \to \infty$. Daraus folgt

$$2k \cdot \mathrm{Im}[\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle] \leq 0.$$

■

Satz 4.20. *Der Operator*

$$\mathsf{N}_\kappa - i\eta(\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_\kappa)\mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)$$

ist injektiv

Beweis: Sei $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\|}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ eine Lösung der Gleichung

$$\mathsf{U}_\kappa \mathbf{w}(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Daraus folgt

$$0 = \langle \mathsf{U}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - i\eta \langle \mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w} \rangle$$

und somit

$$\mathrm{Im}\left[\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - i\eta \langle \mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w} \rangle\right] = 0.$$

Aus dem vorigen Satz ergibt sich nun

$$\eta \langle \mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, (\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w} \rangle = \mathrm{Im}[\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle] \leq 0$$

und daraus

$$(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w} = 0.$$

Ebenso gilt nun

$$\mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Dies ist für $w = 0$ oder einen Eigenwert $\lambda = k^2$ erfüllt. Ist dies der Fall, so gilt aber

$$(\mathsf{N}_{\pm\sqrt{\lambda}} \gamma_N \mathbf{U}_\lambda)(x) = 0, \qquad (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_{\pm\sqrt{\lambda}})\gamma_N \mathbf{U}_\lambda(x) = 0.$$

Also gilt

$$(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_{\pm\sqrt{\lambda}})\mathbf{w}(x) = 0, \qquad (\frac{1}{2}I - \mathsf{C}_{\pm\sqrt{\lambda}})\mathbf{w}(x) = 0$$

und somit $\mathbf{w} = 0$. ∎

4.4.3 Variationsformulierung

Testet man nun die Gleichung mit Funktionen $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$, so erhält man die Variationsformulierung

$$\langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \boldsymbol{\tau} \rangle - i\eta \langle (\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_\kappa)\mathsf{N}_0^{*-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau} \rangle = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\tau} \rangle.$$

Setzt man nun

$$\mathbf{z} = (\mathsf{N}_0^*)^{-1}(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$$

als die eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\langle \mathsf{N}_0^*\mathbf{z}, \mathbf{v}\rangle = \langle(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ kommt man zu einer Sattelpunktformulierung:
Finde $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$, sodass

$$\begin{array}{rcrcl} \langle \mathsf{N}_\kappa \mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}\rangle & - & i\eta\langle(\frac{1}{2}I - \mathsf{B}_\kappa)\mathbf{z}, \boldsymbol{\tau}\rangle & = & \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\tau}\rangle \\ -\langle(\frac{1}{2}I + \mathsf{C}_\kappa)\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle & + & \langle \mathsf{N}_0^*\mathbf{z}, \mathbf{v}\rangle & = & 0 \end{array} \tag{4.10}$$

für alle $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$ gilt. Wie im Falle des Dirichlet-Problems konnte auch hier die Koerzivität des Systems im Rahmen dieser Arbeit nicht nachgewiesen werden.

4.5 Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Hauptaugenmerk darauf gelegt, eine modifizierte Randintegralgleichung zu finden, welche die eindeutige Lösbarkeit der Randintegralgleichung für alle Frequenzen garantiert und dabei auf die Zuhilfenahme kompakter Operatoren oder der Hodge-Zerlegung verzichtet. Leider konnte die Koerzivität des Operators Z_κ nicht direkt auf die Sattelpunktformulierung (4.9) übertragen werden. Eine offene Frage ist somit, wie die Diskretisierung am besten zu bewerkstelligen ist. Könnte die Koerzivität des Systems (4.9) auf andere Weise gezeigt werden, z.B. durch Verwenden der Hodge-Zerlegung, so könnten Standard-Argumente für die numerische Analysis der Diskretisierung verwendet werden. Ist dies jedoch nicht der Fall, so muss wahrscheinlich der Operator Z_κ direkt behandelt werden. Eine weitere Herausforderung stellt die Implementierung dar, unabhängig davon, welcher Ansatz nun gewählt wird. Denn aufgrund der Spurräume $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\mathrm{curl}_\Gamma, \Gamma)$, können nicht einfach konstante oder stückweise lineare Ansatzfunktionen gewählt werden, stattdessen müssen konforme Ansatzräume gewählt werden. Diese sind zum Beispiel durch Raviart-Thomas Elemente gegeben (siehe [28]). Weiters müssen effiziente Lösungsverfahren untersucht werden, insbesondere eine geeignete Vorkonditionierung des jeweiligen Gleichungssystems, um eine zufriedenstellende Konvergenz der benützten iterativen Löser zu gewährleisten. Um jedoch praktische Beispiele mit komplexen Geometrien in ausreichender Genauigkeit rechnen zu können, müsste ein geeignetes Kompressionsverfahren implementiert werden. Kandidaten hierfür wären zum Beispiel die Multipolmethode oder der Ansatz mittels Hierarchischer Matrizen (siehe [18] bzw. [19] und [2]).

Eine weiterführende Problemstellung ist die Kopplung von Finite Element Methoden und der Randelementmethode. Hierbei wird das Gebiet Ω in mehrere Teilgebiete Ω_i aufgeteilt, und die Differentialgleichung auf den einzelnen Gebieten für sich betrachtet, wobei die Konsistenz des Gesamtsystems nur über geeignete Transmissionsbedingungen am Rand gewährleistet wird. Somit kann je nach Bedarf die geeignetere Methode für das Gebiet gewählt werden, zum Beispiel FEM für nichtlineares Materialverhalten, und BEM für die Behandlung von Außenraumproblemen.

Literaturverzeichnis

[1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces. 2nd ed.* Pure and Applied Mathematics 140. New York, NY: Academic Press. xiii, 305 p., 2003.

[2] M. Bebendorf and S. Rjasanow. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 70(1):1–24, 2003.

[3] H. Brakhage and P. Werner. Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Arch. Math.*, 16:325–329, 1965.

[4] J. Breuer. *Schnelle Randelementmethoden zur Simulation von elektrischen Wirbelstromfeldern sowie ihrer Wärmeproduktion und Kühlung.* Dissertation, Universität Stuttgart, 2005.

[5] A. Buffa and P. Ciarlet, Jr. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. I. An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1):9–30, 2001.

[6] A. Buffa and P. Ciarlet, Jr. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. II. Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1):31–48, 2001.

[7] A. Buffa, M. Costabel, and C. Schwab. Boundary element methods for Maxwell's equations on non-smooth domains. *Numer. Math.*, 92(4):679–710, 2002.

[8] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen. On traces for $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 276(2):845–867, 2002.

[9] A. Buffa and R. Hiptmair. A coercive combined field integral equation for electromagnetic scattering. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2):621–640 (electronic), 2004.

[10] A. Buffa and R. Hiptmair. Regularized combined field integral equations. *Numer. Math.*, 100(1):1–19, 2005.

[11] A. Buffa, R. Hiptmair, T. von Petersdorff, and C. Schwab. Boundary element methods for Maxwell transmission problems in Lipschitz domains. *Numer. Math.*, 95(3):459–485, 2003.

[12] S. H. Christiansen. Discrete Fredholm properties and convergence estimates for the electric field integral equation. *Math. Comp.*, 73(245):143–167 (electronic), 2004.

[13] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[14] M. Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis. Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen.* Berlin: Springer, 2006.

[15] S. Engleder. Stabilisierte Randintegralgleichungen für äussere Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung. Diplomarbeit, Institut für Numerische Mathematik, TU Graz, 2006.

[16] S. Engleder and O. Steinbach. Modified Boundary Integral Formulations for the Helmholtz Equation. *Journal of mathematical analysis and applications*, Januar 2006. published online.

[17] G. Fairweather and A. Karageorghis. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2):69–95, 1998. Numerical treatment of boundary integral equations.

[18] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 135(2):279–292, 1997. With an introduction by John A. Board, Jr., Commemoration of the 30th anniversary {of J. Comput. Phys.}.

[19] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on $\mathcal{H}$-matrices. I. Introduction to $\mathcal{H}$-matrices. *Computing*, 62(2):89–108, 1999.

[20] Ch. Hazard and M. Lenoir. On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(6):1597–1630, 1996.

[21] R. Hiptmair. Boundary element methods for eddy current computation. In *Computational electromagnetics (Kiel, 2001)*, volume 28 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 103–126. Springer, Berlin, 2003.

[22] R. Hiptmair and C. Schwab. Natural boundary element methods for the electric field integral equation on polyhedra. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1):66–86 (electronic), 2002.

[23] R. Kress. On the boundary operator in electromagnetic scattering. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 103(1-2):91–98, 1986.

[24] R. C. MacCamy and E. Stephan. Solution procedures for three-dimensional eddy current problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 101(2):348–379, 1984.

[25] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[26] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2003.

[27] O.I. Panich. Zum Problem der Lösbarkeit äußerer Randwertprobleme für die Wellengleichung und für das Maxwellsche Gleichungssystem. *Usp. Mat. Nauk., 20(A), pp. 221-226.*, 1965. In Russian.

[28] P.-A. Raviart and J. M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods (Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975)*, pages 292–315. Lecture Notes in Math., Vol. 606. Springer, Berlin, 1977.

[29] S. Sauter and Ch. Schwab. *Randelementmethoden. Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Stuttgart: Teubner, 2004.

[30] Albert H. Schatz, Vidar Thomée, and Wolfgang L. Wendland. *Mathematical theory of finite and boundary element methods.* DMV Seminar, 15. Basel etc.: Birkhäuser Verlag., 1990.

[31] R. A. Shore and A. D. Yaghjian. Dual-surface integral equations in electromagnetic scattering. *IEEE Transactions on Antennas ans Propagation, Vol. 53, No. 5*, 2005.

[32] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Algorithmen und Anwendungen*. Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.

[33] Olaf Steinbach. *Stability estimates for hybrid coupled domain decomposition methods.* Lecture Notes in Mathematics. 1809. Berlin: Springer., 2003.

[34] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1982. Sobolevräume und Randwertaufgaben. Mathematische Leitfäden.

Erschienene Preprints ab Nummer 2005/1

2005/1	O. Steinbach	Numerische Mathematik 1. Vorlesungsskript.
2005/2	O. Steinbach	Technische Numerik. Vorlesungsskript.
2005/3	U. Langer G. Of O. Steinbach W. Zulehner	Inexact Fast Multipole Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/4	U. Langer G. Of O. Steinbach W. Zulehner	Inexact Data–Sparse Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/5	U. Langer O. Steinbach W. L. Wendland	Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications Söllerhaus Workshop, 25.–28.9.2005, Book of Abstracts.
2005/6	U. Langer A. Pohoata O. Steinbach	Dual–Primal Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/7	O. Steinbach (ed.)	Jahresbericht 2004/2005
2006/1	S. Engleder O. Steinbach	Modified Boundary Integral Formulations for the Helmholtz Equation.
2006/2	O. Steinbach	2nd Austrian Numerical Analysis Day. Book of Abstracts.
2006/3	B. Muth G. Of P. Eberhard O. Steinbach	Collision Detection for Complicated Polyhedra Using the Fast Multipole Method of Ray Crossing
2006/4	G. Of B. Schneider	Numerical Tests for the Recovery of the Gravity Field by Fast Boundary Element Methods
2006/5	U. Langer O. Steinbach W. L. Wendland	4th Workshop on Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications. Book of Abstracts.
2006/6	O. Steinbach (ed.)	Jahresbericht 2005/2006
2006/7	G. Of	The All–floating BETI Method: Numerical Results
2006/8	P. Urthaler G. Of O. Steinbach	Automatische Positionierung von FEM–Netzen
2006/9	O. Steinbach	Challenges and Applications of Boundary Element Domain Decomposition Methods
2006/10	S. Engleder	Stabilisierte Randintegralgleichungen für äussere Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung

Erschienene Preprints ab Nummer 2005/1

2005/1	O. Steinbach	Numerische Mathematik 1. Vorlesungsskript.
2005/2	O. Steinbach	Technische Numerik. Vorlesungsskript.
2005/3	U. Langer G. Of O. Steinbach W. Zulehner	Inexact Fast Multipole Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/4	U. Langer G. Of O. Steinbach W. Zulehner	Inexact Data–Sparse Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/5	U. Langer O. Steinbach W. L. Wendland	Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications Söllerhaus Workshop, 25.–28.9.2005, Book of Abstracts.
2005/6	U. Langer A. Pohoata O. Steinbach	Dual–Primal Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/7	O. Steinbach (ed.)	Jahresbericht 2004/2005
2006/1	S. Engleder O. Steinbach	Modified Boundary Integral Formulations for the Helmholtz Equation.
2006/2	O. Steinbach	2nd Austrian Numerical Analysis Day. Book of Abstracts.
2006/3	B. Muth G. Of P. Eberhard O. Steinbach	Collision Detection for Complicated Polyhedra Using the Fast Multipole Method of Ray Crossing
2006/4	G. Of B. Schneider	Numerical Tests for the Recovery of the Gravity Field by Fast Boundary Element Methods
2006/5	U. Langer O. Steinbach W. L. Wendland	4th Workshop on Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications. Book of Abstracts.
2006/6	O. Steinbach (ed.)	Jahresbericht 2005/2006
2006/7	G. Of	The All–floating BETI Method: Numerical Results
2006/8	P. Urthaler G. Of O. Steinbach	Automatische Positionierung von FEM–Netzen
2006/9	O. Steinbach	Challenges and Applications of Boundary Element Domain Decomposition Methods
2006/10	S. Engleder	Stabilisierte Randintegralgleichungen für äussere Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung
2007/1	M. Windisch	Modofizierte Randintegralgleichungen für elektromagnetische Streuprobleme