Technische Universität Graz

Schnelle Auswertung von Volumenpotentialen in der Randelementmethode

P. Urthaler

Berichte aus dem Institut für Numerische Mathematik

Bericht 2008/1

Technische Universität Graz

Schnelle Auswertung von Volumenpotentialen in der Randelementmethode

P. Urthaler

Berichte aus dem Institut für Numerische Mathematik

Bericht 2008/1

Technische Universität Graz
Institut für Numerische Mathematik
Steyrergasse 30
A 8010 Graz

WWW: `http://www.numerik.math.tu-graz.at`

Schnelle Auswertung von Volumenpotentialen in der Randelementmethode

vorgelegt der Fakultät für Technische Mathematik und Technische Physik
der Technischen Universität Graz
zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Ingenieur (Dipl.-Ing.)

vorgelegt von

Peter Urthaler

Betreuung: Prof. Dr. O. Steinbach
Dr. G. Of

Institut für Numerische Mathematik
Technische Universität Graz

2008

Diplomarbeit:

Titel:	Schnelle Auswertung von Volumenpotentialen in der Randelementmethode
Name, Vorname:	Urthaler, Peter
Matrikelnummer:	0230210
Institut:	Institut für Numerische Mathematik
Betreuung:	Prof. Dr. O. Steinbach Dr. G. Of

Vorwort

Besonders möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Olaf Steinbach und Dr. Günther Of für die Unterstützung und die zahlreichen Anregungung während der Entstehung dieser Arbeit bedanken.
Mein Dank gilt weiters Herrn Prof. Dr.-Ing. Zoran Andjelic (ABB) für die gute Zusammenarbeit im Rahmen dieser Arbeit.
Außerdem möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Instituts für Numerische Mathematik für zahlreiche Diskussionen und die angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In den Natur- und Ingenieurswissenschaften treten bei der Modellbildung häufig Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen auf. Eine explizite Lösung der Randwertprobleme ist jedoch nur selten möglich, somit müssen geeignete numerische Verfahren verwendet werden. Eine Methode zur Bestimmung einer näherungsweisen Lösung von Randwertproblemen ist die Randelementmethode (BEM). Dabei werden ausgehend von der Variationsformulierung des Randwertproblems durch partielle Integration und durch Kenntnis der entsprechenden Fundamentallösung Integralgleichungen hergeleitet. Bei der Betrachtung von homogenen partiellen Differentialgleichungen genügt zum näherungsweisen Lösen der Integralgleichungen eine Diskretisierung des Randes. Dabei geht jedoch durch die Formulierung als Integralgleichungen der lokale Charakter der Differentialgleichungen verloren. Somit entstehen bei der Diskretisierung vollbesetzte Matrizen. Der Speicherbedarf sowie der Rechenaufwand für das Lösen des linearen Gleichungssystems schränken die Anwendbarkeit der Randelementmethoden zunächst wieder ein. Um den Speicherbedarf und den Aufwand zum Lösen des linearen Gleichungssystems zu reduzieren, existiert inzwischen eine Reihe von schnellen Randelementmethoden, wie beispielsweise

- Multipolmethode (vgl. [6]),
- Adaptive Cross Approximation (ACA) (vgl. [2]),
- $\mathcal{H}$-Matrizen (vgl. [8]),
- $\mathcal{H}^2$-Matrizen (vgl. [3, 7]).

Dabei werden die Randelemente in Cluster eingeteilt, wodurch eine Clusterung der Matrix entsteht. Für die so konstruierten Blöcke wird eine Niedrigrangapproximation generiert. Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich hauptsächlich in der Konstruktion und Realisierung der Niedrigrangapproximationen. Dabei verwendet die Multipolmethode spezielle Reihenentwicklungen, wie zum Beispiel harmonische Kugelfunktionen. Die Adaptive Cross Approximation (ACA) Methode verwendet algebraische Approximationen zur Konstruktion der Niedrigrangdarstellung. Die $\mathcal{H}$-Matrizen und $\mathcal{H}^2$-Matrizen bieten eine komplette Arithmetik für die Klasse der Matrizen mit Niedrigrangapproximation.
Bei der Behandlung von inhomogenen partiellen Differentialgleichungen durch die Randelementmethode treten zusätzlich noch Newtonpotentiale auf. Bei den Newtonpotentialen handelt es sich um Volumenpotentiale. Eine direkte Auswertung des klassischen Newtonpotentials ist möglich, jedoch aufwendig und es wird zusätzlich eine Diskretisierung des Volumens benötigt. Hat der inhomogene Anteil der Differentialgleichung eine gewisse Gestalt

können die Volumenpotentiale durch partielle Integration auf Randpotentiale zurückgeführt werden. Somit kann die Auswertung beschleunigt und auf die Volumendiskretisierung verzichtet werden.
In dieser Arbeit wird ausgehend von einer bestehenden Multipolmethode für die Laplace-Gleichung und das homogene System der linearen Elastostatik eine effiziente Auswertung der Newtonpotentiale mittels der Multipolmethode vorgestellt. Weiters wird mittels partieller Integration das Newtonpotential $N_0 f$ auf Randpotentiale zurückgeführt. Das Newtonpotential $N_1 f$ wird durch eine Randintegralgleichung aus dem Newtonpotential $N_0 f$ berechnet. Somit ist es möglich, die Poisson-Gleichung und das inhomogene System der linearen Elastostatik effizient zu lösen.
Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Im ersten Kapitel wird die Problemstellung definiert und daraus eine symmetrische Formulierung in Form von Randintegralgleichungen gewonnen. Zur näherungsweisen Lösung dieser Integralgleichungen wird dafür im zweiten Kapitel eine Galerkin-Approximationsmethode verwendet. Für die Näherungsmethode wird Konvergenz bewiesen und es werden geeignete Fehlerabschätzungen hergeleitet. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Auswertung der Newtonpotentiale $N_0 f$ und $N_1 f$ der Poisson-Gleichung. Zuerst wird eine direkte Auswertung für beide Newtonpotentiale besprochen. Für das Newtonpotential $N_1 f$ wird eine alternative Darstellung zur indirekten Auswertung vorgestellt. Die direkte als auch die indirekte Auswertung werden im Anschluss mit der Multipolmethode beschleunigt. Weiters wird für den zusätzlichen Approximationsfehler, der durch die Multipolmethode auftritt, eine Fehlerabschätzung hergeleitet, wobei eine optimale Konvergenzordnung bei genügend glatten Rand sichergestellt werden kann. Auch die Auswertungen der Newtonpotentiale $N_0^E f$ und $N_1^E f$ der linearen Elastostatik werden im vierten Kapitel mittels der Multipolmethode beschleunigt. Dabei wird im wesentlichen die Fundamentallösung der linearen Elastostatik auf die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung und deren Ableitungen zurückgeführt, wodurch die Multipolmethode der Poisson-Gleichung wiederverwendet werden kann. Für die Multipolapproximation wird eine Fehlerabschätzung hergeleitet, und erneut kann eine optimale Konvergenzordnung bei genügend glattem Rand sichergestellt werden. Im fünften Kapitel wird unter der Vorraussetzung eines harmonischen inhomogenen Anteils f der linearen Elastostatik das Newtonpotential $N_0 f$ durch partielle Integration auf ein Randpotential zurückgeführt. Diese Methode wird im folgenden auf die elektromechanische Kopplung angewandt. Alle beschriebenen Methoden wurden implementiert und deren Effizienz an Anwendungsbeispielen getestet.

1 Randwertprobleme und symmetrische Formulierung

1.1 Die Greenschen und Bettischen Formeln

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\Gamma = \partial\Omega$, auf dem fast überall der äußere Normalenvektor $n(x), x \in \Gamma$, gegeben ist. Betrachtet werden die Randwertprobleme der Poisson-Gleichung und der linearen Elastostatik. Um eine einheitliche Darstellung zu ermöglichen, werden sowohl das gesuchte skalarwertige Potential, als auch das gesuchte vektorwertige Verschiebungsfeld mit $u(x)$ bezeichnet. Dabei wird auf eine gesonderte Kennzeichnung der vektorwertigen Größen verzichtet.
Für die Poisson-Gleichung ist das Potential $u(x)$ als Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \tag{1.1}$$

gesucht. Im Falle der linearen Elastostatik ist das vektorwertige Verschiebungsfeld $u(x)$ zu bestimmen, sodass für einen Körper mit elastischem, reversiblem, isotropem und homogenem Materialverhalten in einem beschränkten Gebiet Ω die Gleichgewichtsgleichungen

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u, x) = f_i(x) \quad \text{für } x \in \Omega,\ i = 1, \ldots, 3 \tag{1.2}$$

erfüllt sind. Hierbei sind $\sigma_{ij}(u, x)$ die Komponenten des Spannungstensors, die sich über ein Materialgesetz aus den Komponenten $e_{ij}(u, x)$ des Verzerrungstensors zusammensetzen. Bei Annahme kleiner Deformationen gilt

$$e_{ij}(u, x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i(x)\right] \quad \text{für } x \in \Omega,\ i, j = 1, \ldots, 3. \tag{1.3}$$

Als Materialgesetz wird das Hookesche Gesetz für $x \in \Omega$

$$\sigma_{ij}(u, x) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} e_{kk}(u, x) + \frac{E}{1+\nu} e_{ij}(u, x) \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, 3 \tag{1.4}$$

mit dem Elastizitätsmodul $E > 0$ und der Querkontraktionszahl $\nu \in (0, \frac{1}{2})$ verwendet.
Im folgenden wird mit

$$\gamma_0 f(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \to x \in \Gamma} f(\tilde{x}) \quad \text{für } x \in \Gamma \tag{1.5}$$

die Spur einer im Gebiet Ω gegebenen Funktion f bezeichnet.
Ausgehend vom Integralsatz von Gauß-Ostrogradski

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)dx = \int_\Gamma \gamma_0 f(x) n_i(x) ds_x, \; i = 1, \ldots, 3$$

und durch Ersetzen von $f(x)$ durch $u(x)v(x)$ mit hinreichend oft differenzierbaren Funktionen u, v folgt daraus die Formel der partiellen Integration,

$$\int_\Omega v(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) dx = \int_\Gamma \gamma_0 u(x) \gamma_0 v(x) n_i(x) ds_x - \int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) dx.$$

Multipliziert man die Poisson-Gleichung (1.1) mit einer hinreichend glatten Testfunktion v und integriert über Ω, dann ergibt sich durch die Anwendung der partiellen Integration

$$\int_\Omega (-\Delta u(x)) v(x) dx = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \sum_{i=1}^{3} \int_\Gamma n_i(x) \gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right) \gamma_0 v(x) ds_x$$

und somit die erste Greensche Formel

$$a(u, v) = \int_\Omega (-\Delta u)(x) v(x) dx + \int_\Gamma \gamma_1 u(x) \gamma_0 v(x) ds_x \tag{1.6}$$

mit der symmetrischen Bilinearform

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

und der Konormalenableitung

$$\gamma_1 u(x) := \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \to x \in \Gamma} [n(x) \nabla u(\tilde{x})] = \frac{\partial}{\partial n_x} u(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{1.7}$$

Die erste Greensche Formel gilt auch für vertauschte Funktionen $u(x)$ und $v(x)$. Durch Gleichsetzen der symmetrischen Bilinearform in (1.6) ergibt sich dann die zweite Greensche Formel

$$\int_\Omega [-\Delta u(x)] v(x) dx + \int_\Gamma \gamma_1 u(x) \gamma_0 v(x) ds_x = \int_\Omega [-\Delta v(x)] u(x) dx + \int_\Gamma \gamma_1 v(x) \gamma_0 u(x) ds_x. \tag{1.8}$$

Im Falle der linearen Elastostatik ergibt sich nach Multiplikation der Gleichgewichtsgleichungen (1.2) mit einer Testfunktion v_i, anschließender Integration über Ω, und Anwendung der partiellen Integration (1.1) für $i = 1, \ldots 3$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_i(x) v_i(x) dx &= -\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u, x) v_i(x) dx \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(u, x) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(x) dx - \int_\Gamma \sum_{j=1}^{3} n_j(x) \sigma_{ij}(u, x) v_i(x) ds_x. \end{aligned}$$

Summation über $i = 1, \ldots, 3$ liefert die erste Bettische Formel

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u,x)v_i(x)dx = a(u,v) - \int_\Gamma [\gamma_0 v(x)]^T \gamma_1 u(x) ds_x \tag{1.9}$$

mit der Bilinearform

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u,x)\frac{\partial}{\partial x_j} v_i(x)dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u,x)\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}v_i(x) + \frac{\partial}{\partial x_i}v_j(x)\right]dx \qquad (1.10) \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u,x)e_{ij}(v,x)dx \end{aligned}$$

und der Konormalenableitung

$$(\gamma_1 u)_i(x) := \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(u,x)n_j(x) \quad \text{für } x \in \Gamma, \quad i = 1, \ldots, 3. \tag{1.11}$$

Für die Bilinearform (1.10) ergibt sich weiters

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \sigma_{ij}(u,x)e_{ij}(v,x)dx \\ &= 2\mu \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}(u,x)e_{ij}(v,x)dx + \lambda \int_\Omega \mathrm{div}u(x)\mathrm{div}v(x)dx \end{aligned}$$

und somit die Symmetrie $a(u,v) = a(v,u)$. Dabei sind

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

die Laméschen Elastizitätskonstanten.
Durch die Symmetrie gilt die erste Bettische Formel (1.9) auch für vertauschte Funktionen $u(x)$ und $v(x)$. Durch Gleichsetzen der Bilinearformen folgt dann die zweite Bettische Formel

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u,x)v_i(x)dx + \int_\Gamma \gamma_0 v(x)^T \gamma_1 u(x) ds_x \\ &\qquad = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(v,x)u_i(x)dx + \int_\Gamma \gamma_0 u(x)^T \gamma_1 v(x) ds_x. \qquad (1.12) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Verzerrungstensors (1.3) und des Hookeschen Gesetzes (1.4) lassen sich die Gleichgewichtsgleichungen (1.2) auch schreiben als

$$-\mu\Delta u(x) - (\lambda + \mu)\text{grad div } u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Die Konormalenableitung hat dann die Darstellung

$$\gamma_1 u(x) = \lambda \text{ div } u(x)\ n(x) + 2\mu \frac{\partial}{\partial n} u(x) + \mu\ n(x) \times \text{curl } u(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

1.2 Darstellungsformel

Sei $u(x)$ Lösung der Poisson-Gleichung (1.1). Dann ergibt sich aus der zweiten Greenschen Formel (1.8)

$$\int_\Omega [-\Delta v(y)]u(y)dy = \int_\Gamma \gamma_1 u(y)\gamma_0 v(y)ds_y - \int_\Gamma \gamma_1 v(y)\gamma_0 u(y)ds_y + \int_\Omega f(y)v(y)dy.$$

Kann für $x \in \Omega$ eine Funktion $v(y) := U^*(x,y)$ mit

$$\int_\Omega [-\Delta_y U^*(x,y)]u(y)dy = u(x) \quad \text{für } x \in \Omega$$

bestimmt werden, so folgt für $x \in \Omega$ die Darstellungsformel

$$u(x) = \int_\Gamma U^*(x,y)\gamma_1 u(y)ds_y + \int_\Gamma \gamma_{1,y} U^*(x,y)\gamma_0 u(y)ds_y + \int_\Omega U^*(x,y)f(y)dy. \tag{1.13}$$

Somit kann jede Lösung der partiellen Differentialgleichung allein aus der Kenntnis der Cauchy-Daten $[\gamma_0 u(x), \gamma_1 u(x)]$ für $x \in \Gamma$ bestimmt werden.
Wegen

$$u(x) = \int_\Omega \delta_0(y-x)u(y)dy \quad \text{für } x \in \Omega$$

ist die Bestimmungsgleichung der Fundamentallösung $U^*(x,y)$ äquivalent zur distributionellen Lösung der partiellen Differentialgleichung.

$$-\Delta_y U^*(x,y) = \delta_0(y-x) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt die Fundamentallösung des Laplace-Operators

$$U^*(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}.$$

Sei $u(x)$ eine Lösung des Systems der linearen Elastostatik (1.2), dann ergibt sich durch die zweite Bettische Formel (1.12)

$$\int_\Omega -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j}\sigma_{ij}(v,y)u_i(y)dy$$
$$= \int_\Gamma \gamma_0 v(y)\gamma_1 u(y)ds_y - \int_\Gamma \gamma_0 u(y)^T \gamma_1 v(y)ds_y + \int_\Omega f(y)^T v(y)dy.$$

Somit muss

$$\int_\Omega - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}(U_k^*(y-x),y)u_i(y)dy = u_k(x) \quad \text{für } x \in \Omega, k = 1, \ldots, 3,$$

gelöst werden. Dies ist wiederum äquivalent zu den distributionellen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$-\mu\Delta_y U_k^*(y-x) - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}_y \operatorname{div}_y U_k^*(y-x) = \delta_0(y-x)e^k \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $e_l^k = \delta_{kl}$ für $k, l = 1, 2, 3$. Die Lösungen $U_k^*(x)$ bilden die Fundamentallösung der linearen Elastostatik $U^*(x,y) = (U_1^*, U_2^*, U_3^*)$ mit den Komponenten

$$U_{k\ell}^*(x,y) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[(3-4\nu) \frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} + \frac{(x_k - y_k)(x_\ell - y_\ell)}{|x-y|^3} \right] \quad \text{für } k, \ell = 1, \ldots, 3.$$

Somit ergibt sich die Darstellungsformel für $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_\Gamma U^*(x,y)\gamma_1 u(y) ds_y + \int_\Gamma \gamma_{1,y} U^*(x,y)\gamma_0 u(y) ds_y + \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy. \tag{1.14}$$

Diese Darstellungsformel gleicht der Darstellungsformel der Poisson-Gleichung (1.13). Jedoch sind sämtliche Größen $u(x), \gamma_0 u(x), \gamma_1 u(x)$ als Vektor bzw. $U^*(x,y)$ als zweidimensionaler Tensor zu verstehen. Auf die explizite Unterscheidung kann in den folgenden Kapiteln verzichtet werden, da sich sämtliche Ergebnisse für beide Probleme nicht unterscheiden, sondern nur die Interpretation verschieden ist.

1.3 Sobolevräume

Im folgenden Kapitel wird ein kurzer Überblick über die Theorie der Sobolev-Räume gegeben. Für einen ausführlicheren Einblick siehe [1] oder [11].
Bevor die Sobolev-Räume definiert werden können, müssen einige andere Räume und ihre Normen definiert werden. Die L_p-Norm sei gegeben durch

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} := \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Definition 1.1. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und sei $p \in \mathbb{N}$. Dann ist $L_p(\Omega)$ der Raum der p-integrierbaren Funktionen,*

$$L_p(\Omega) = \left\{ v : \|v\|_{L_p(\Omega)} < \infty \right\}.$$

Der Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N}_0$ sei Multiindex mit dem Betrag $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $u(x)$ können die partiellen Ableitungen geschrieben werden als

$$D^\alpha u(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} u(x_1, \ldots, x_n).$$

Sei $C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ der Raum der beschränkten und k-mal stetig differenzierbaren Funktionen

$$C^k(\Omega) := \{u : D^\alpha u \text{ stetig für } |\alpha| \leq k\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Weiters sei $C^\infty(\Omega)$ der Raum der auf Ω beschränkten und unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen. Zusätzlich sei $C_0^k(\Omega)$ und $C_0^\infty(\Omega)$ der Raum der auf Ω beschränkten, k-mal bzw. unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger,

$$C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega\}, \quad C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega\}$$

mit

$$\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Der Rand wird definiert als

$$\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega).$$

Für den Rand wird eine gewisse Regularität vorausgesetzt, d. h. der Rand Γ von Ω muß lokal als Lipschitz Funktion dargestellt werden können. Der einfachste Fall tritt ein, falls eine Funktion $\xi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < \xi(x') \quad \text{für alle } x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

Sei

$$|D^\alpha\xi(x') - D^\alpha\xi(y')| \leq M|x' - y'| \quad \text{für alle } x', y' \in R^{n-1} \text{ und } |\alpha| = k,$$

dann ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^k-Hypograph.

Definition 1.2. *Das offene Gebiet Ω ist ein C^k-Gebiet, falls der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ kompakt ist und endliche Familien $\{W_j\}$ und $\{\Omega_j\}$ existieren, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:*

1. *Die Familie $\{W_j\}$ ist eine endliche offene Überdeckung von Γ, also $W_j \subset \Omega$ ist offen für alle j und $\Gamma \subseteq \bigcup_j W_j$.*

2. *Jedes Ω_j kann durch Translationen und Rotationen in einen C^k-Hypographen transformiert werden.*

3. *$W_j \cap \Omega = W_j \cap \Omega_j$ für alle j.*

Ein C^0-Gebiet wird auch ein Lipschitz-Gebiet genannt. Sei ab hier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ als ein Lipschitz Gebiet vorausgesetzt.

Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich nun die Sobolev-Räume definieren. Dabei erhält man die Sobolev-Räume durch Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ und $C_0^\infty(\Omega)$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ wird durch

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} := \left[\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \right]^{1/2}$$

eine Norm definiert. Für $s > 0$ zerlegt man $s = k + \kappa$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\kappa \in (0, 1)$. Dann ist die Sobolev-Slobodecki-Norm definiert als

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := [\|u\|^2_{H^k(\Omega)} + |u|^2_{H^\kappa(\Omega)}]^{1/2}$$

mit der Halbnorm

$$|u|^2_{H^\kappa(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=\kappa} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{3+2\kappa}} dxdy.$$

Definition 1.3. *Für $s > 0$ sei*

$$H^s(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}} \quad H^s_0(\Omega) := \overline{C^\infty_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}}.$$

Für die Sobolev-Räume für $s < 0$ müssen weitere Räume eingeführt werden:

Definition 1.4. *Für $s > 0$ sei*

$$\tilde{H}^s(\Omega) = \overline{C^\infty_0}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}}$$

Die Sobolev-Räume mit negativem Index ergeben sich als Dualräume der bereits eingeführten Räume bezüglich dem Dualitätsprodukt

$$\langle u, v \rangle_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Definition 1.5. *Für $s < 0$ sei*

$$H^s(\Omega) = [\tilde{H}^{-s}(\Omega)]', \quad \tilde{H}^s(\Omega) = [H^{-s}(\Omega)]'.$$

Die Norm ergibt sich als

$$\|w\|_{H^s(\Omega)} := \sup_{0 \ne v \in H^{-s}(\Omega)} \frac{\langle w, v \rangle_\Omega}{\|v\|_{H^{-s}(\Omega)}}.$$

Auf dem geschlossenen Rand $\Gamma = \partial\Omega$ wird durch die orthonormierten Tangentialvektoren e_i eine lokale Parametrisierung um den Punkt $x \in \Gamma$ eingeführt mit

$$y = x + \varphi(x,t)n(x) + \sum_{i=1}^{2} t_i e_i, \quad \varphi(x,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t_i}\varphi(x,t)|_{t=0} = 0.$$

Mit Hilfe der kovarianten Ableitungen

$$\partial_t^\alpha u(y) = \partial_t^\alpha \tilde{u}(x,t) = \partial_{t_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{t_n}^{\alpha_n} \tilde{u}(x,t)$$

lassen sich die Sobolev-Normen auf den Rand übertragen. Die Sobolev-Norm auf dem Rand ergibt sich für $m \in \mathbb{N}$ durch

$$\|u\|_{H^m(\Gamma)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_t^\alpha u\|_{L_2(\Gamma)}^2 \right]^{1/2}$$

und für $s > 0, s = m + \kappa, m \in \mathbb{N}_0, \kappa \in (0,1)$ durch

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left\{ \|u\|_{H^m(\Gamma)}^2 + |u|_{H^\kappa(\Gamma)} \right\}^{1/2}$$

mit der Halbnorm

$$|u|_{H^\kappa(\Gamma)}^2 := \sum_{|\alpha|=k} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\partial_t^\alpha u(x) - \partial_t^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{2+2\kappa}} ds_x ds_y.$$

Sei $C^k(\Gamma)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ der Raum der auf Γ beschränkten und k-mal stetig differenzierbaren Funktionen

$$C^k(\Gamma) = \{u : \partial_t^\alpha u \text{ stetig für } |\alpha| \leq k\}$$

und $C^\infty(\Gamma)$ der Raum der auf Γ beschränkten und unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen.

Definition 1.6. *Für $s > 0$ sei*

$$H^s(\Gamma) = \overline{C^\infty}^{\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}}. \tag{1.15}$$

Für $s < 0$ wird der Sobolev-Raum $H^s(\Gamma)$ erklärt als Dualraum von $H^{-s}(\Gamma)$,

$$H^s(\Gamma) := H^{-s}(\Gamma)$$

bezüglich dem Dualitätsprodukt

$$\langle w, v \rangle_\Gamma := \int_\Gamma w(x) v(x) ds_x$$

mit der Norm

$$\|w\|_{H^s(\Gamma)} := \sup_{0 \neq v \in H^{-s}(\Gamma)} \frac{\langle w, v \rangle_\Gamma}{\|v\|_{H^{-s}(\Gamma)}}.$$

Für eine offenes Randstück $\Gamma_0 \subset \Gamma$ wird der Sobolev-Raum definiert durch

$$H^s(\Gamma_0) := \{v = \tilde{v}|_{\Gamma_0} : \tilde{v} \in H^s(\Gamma)\}$$

versehen mit der Norm

$$\|v\|_{H^s(\Gamma_0)} := \inf_{\tilde{v}\in H^s(\Gamma):\tilde{v}|_{\Gamma_0}=v} \|\tilde{v}\|_{H^s(\Gamma)}.$$

Weiters sei

$$\tilde{H}^s(\Gamma_0) := \left\{v = \tilde{v}|_{\Gamma_0} : \tilde{v} \in H^s(\Gamma), \mathrm{supp}\ \tilde{v} \subset \Gamma_0\right\}.$$

Für $s < 0$ werden die Sobolev-Räume definiert durch

$$H^s(\Gamma_0) := [\tilde{H}^{-s}(\Gamma_0)]', \quad \tilde{H}^s(\Gamma_0) := [H^{-s}(\Gamma_0)]'.$$

Für den Fall eines stückweise glatten Randes mit

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{\Gamma}_i, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j.$$

wird für $s > 0$ durch

$$H^s_{\mathrm{pw}} := \{v \in L_2(\Gamma) : v|_{\Gamma_i} \in H^s(\Gamma_i), i = 1, \ldots, p\}$$

der Raum der stückweise glatten Funktionen mit der Norm

$$\|v\|_{H^s_{\mathrm{pw}}} := \left\{\sum_{i=1}^{p} \|v|_{\Gamma_i}\|^2_{H^s(\Gamma_i)}, i = 1, \ldots, p\right\}$$

definiert.
Die Sobolev-Räume lassen sich auch allgemeiner über Fourier-Transformation einführen [11, 24, 1]. Diese allgemeinen Räume sind jedoch auf Lipschitz-Gebieten mit obigen Räumen ident.

1.4 Integraloperatoren

Mit dem Newton-Potential

$$(\tilde{N}_0 f)(x) := \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^3,$$

dem Einfachschichtpotential

$$(\tilde{V} w)(x) := \int_\Gamma U^*(x,y) w(y) ds_y \qquad \text{für } x \in \Omega$$

und dem Doppelschichtpotential

$$(W v)(x) := \int_\Gamma [\gamma_{1,y} U^*(x,y)] v(y) ds_y \qquad \text{für } x \in \Omega$$

lässt sich die Darstellungsformel (1.13) bzw. (1.14) schreiben als

$$u(\tilde{x}) = (\tilde{V}\gamma_1 u)(\tilde{x}) - (W\gamma_0 u)(\tilde{x}) + (\tilde{N}_0 f)(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega. \tag{1.16}$$

Sind die vollständigen Cauchy-Daten $\gamma_0 u(x)$ und $\gamma_1 u(x)$ für $x \in \Gamma$ bekannt, kann die Lösung $u(\tilde{x})$ für alle $\tilde{x} \in \Omega$ berechnet werden. Um die fehlenden Cauchy-Daten zu bestimmen, müssen geeignete Integralgleichungen hergeleitet werden. Dazu werden die Spuroperatoren γ_0 und γ_1 auf die Darstellungsformel (1.16) angewendet. Für γ_0 ergibt sich dabei für das Newtonpotential

$$(N_0 f)(x) := \gamma_0(\tilde{N}_0 f)(\tilde{x}) = \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \to x \in \Gamma} (\tilde{N}_0)(\tilde{x}) = \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy,$$

für das Einfachschichtpotential

$$(Vw)(x) := \gamma_0(\tilde{V}w)(x) = \int_\Gamma U^*(x,y) w(y) ds_y,$$

und für das Doppelschichtpotential

$$\gamma_0(Wv)(x) = -\frac{1}{2} v(x) + (Kv)(x) \tag{1.17}$$

mit

$$(Kv)(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{y \in \Gamma : |y-x| \geq \varepsilon} [\gamma_1 U^*(x,y)] v(y) ds_y \qquad \text{für } x \in \Gamma.$$

Bei (1.17) handelt es sich um die Sprungbedingung des Doppelschichtpotentials, die erfüllt ist, solang x auf einem glatten Randstück liegt. Bei Anwendung der Konormalenableitung γ_1 ergibt sich für das Newtonpotential

$$(N_1 f)(x) := \gamma_1(\tilde{N}_0 f)(\tilde{x}) = \gamma_1 \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy,$$

für das Einfachschichtpotential

$$\gamma_1(\tilde{V}w)(x) = \frac{1}{2} w(x) + (K'w)(x)$$

mit dem adjungierten Doppelschichtpotentialoperator

$$(K'w)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{y \in \Gamma : |y-x| \geq \varepsilon} \gamma_{1,x} U^*(x,y) w(y) ds_y$$

und für das Doppelschichtpotential der hypersinguläre Integraloperator

$$(Dv)(x) := -\gamma_1(Wv)(x) = -\gamma_{1,x} \int_\Gamma \gamma_{1,y} U^*(x,y) v(y) ds_y.$$

Für die Randintegraloperatoren ergeben sich folgende Abbildungseigenschaften (vgl. [5]). Dabei sei $n = 1$ für die Poisson-Gleichung (1.1) und $n = 3$ für das System der linearen Elastostatik (1.2).

Satz 1.7. *Sei $\Gamma := \partial\Omega$ der Rand eines Lipschitz-Gebietes Ω. Dann sind die Randintegraloperatoren*

$$\begin{aligned} V: &\quad [H^{-1/2+s}(\Gamma)]^n &\to [H^{1/2+s}(\Gamma)]^n,\\ K: &\quad [H^{1/2+s}(\Gamma)]^n &\to [H^{1/2+s}(\Gamma)]^n,\\ K': &\quad [H^{-1/2+s}(\Gamma)]^n &\to [H^{-1/2+s}(\Gamma)]^n,\\ D: &\quad [H^{1/2+s}(\Gamma)]^n &\to [H^{-1/2+s}(\Gamma)]^n \end{aligned}$$

für alle $s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ beschränkt.

Bemerkung 1.1. *Falls der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ global glatt ist, $\Omega \in C^\infty$, dann gilt die Aussage des Satzes 1.7 für alle $s > -1/2$ (vgl. [17]).*

Satz 1.8. *Sei $w \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^n$. Dann gilt*

$$\langle Vw, w\rangle_\Gamma \geq c_1^V \|w\|^2_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^n} \tag{1.18}$$

mit einer positiven Konstanten c_1^V.

Die Invertierbarkeit des Einfachschichtpotentials V folgt somit aus dem Lemma von Lax-Milgram.
Der hypersinguläre Randintegraloperator D ist nicht auf dem ganzen $H^{1/2}(\Gamma)$ elliptisch. Sei nun $\Gamma_0 \subsetneq \Gamma$ ein offenes in Γ enthaltenes Randstück.

Satz 1.9. *Sei $v \in [\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_0)]^n$. Dann gilt*

$$\langle Dv, v\rangle_{\Gamma_0} \geq c_1^D \|v\|^2_{[\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_0)]^n}$$

mit einer positiven Konstante c_1^D.

Mit den Randintegraloperatoren ergeben sich aus der Darstellungsformel (1.13) zwei Integralgleichungen

$$\begin{pmatrix}\gamma_0 u\\ \gamma_1 u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}I - K & V\\ D & \frac{1}{2}I + K'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_0 u\\ \gamma_1 u\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}N_0 f\\ N_1 f\end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Diese können nun verwendet werden, um Integralgleichungen für ein Randwertproblem mit gemischten Randbedingungen herzuleiten. Im Falle der Poisson-Gleichung (1.1) wird von folgendem Randwertproblem ausgegangen.

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega,\\ \gamma_0 u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D,\\ \gamma_1 u(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

wobei γ_0 wie in (1.5) und γ_1 wie in (1.7) definiert sind.

Für das System der linearen Elastostatik (1.2) ergibt sich folgendes Randwertproblem:

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u,x) = f_i(x) \quad & \text{für } x \in \Omega,\ i=1,\dots,3 \\
\gamma_0 u(x) = g_D(x) \quad & \text{für } x \in \Gamma_D, \\
\gamma_1 u(x) = g_N(x) \quad & \text{für } x \in \Gamma_N,
\end{aligned}
$$

wobei γ_0 wie in (1.5) und γ_1 wie in (1.11) definiert ist.
Man verwendet die erste Integralgleichung in (1.19) auf dem Dirichlet-Rand Γ_D und die zweite Integralgleichung in (1.19) auf dem Neumann-Rand Γ_N und erhält

$$
\begin{aligned}
(V\gamma_1 u)(x) &= (\frac{1}{2}I + K)\gamma_0 u(x) - (N_0 f)(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_D, \\
(D\gamma_0 u)(x) &= (\frac{1}{2}I - K')\gamma_1 u(x) - (N_1 f)(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_N.
\end{aligned}
$$

Seien $\tilde{g}_D \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $\tilde{g}_N \in H^{-1/2}(\Gamma)$ geeignet gewählte Fortsetzungen der gegebenen Randdaten g_D und g_N mit

$$
\tilde{g}_D(x) = g_D(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_D, \qquad \tilde{g}_N(x) = g_N(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_N.
$$

Man teilt nun die Cauchy-Daten

$$
\gamma_0 u = \tilde{u} + \tilde{g}_D, \qquad \gamma_1 u = \tilde{t} + \tilde{g}_N
$$

in die unbekannten Daten $(\tilde{u}, \tilde{t}) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ und bekannten Daten $(\tilde{g}_D, \tilde{g}_N) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ auf. Daraus ergibt sich die symmetrische Formulierung zur Bestimmung von $(\tilde{u}, \tilde{t})$

$$
\begin{aligned}
(V\tilde{t})(x) - (K\tilde{u})(x) &= \left(\frac{1}{2}I + K\right)\tilde{g}_D(x) - (V\tilde{g}_N)(x) - (N_0 f)(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_D, \\
(D\tilde{u})(x) + (K'\tilde{t})(x) &= \left(\frac{1}{2}I - K'\right)\tilde{g}_N(x) - (D\tilde{g}_D)(x) - (N_1 f)(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_N.
\end{aligned}
$$

Um diese Formulierung zu lösen wird im folgenden Kapitel die entsprechende Variationsformulierung formuliert, die im Anschluss mit dem Galerkin-Verfahren diskretisiert wird.

2 Variationsformulierung und Näherungsmethoden

Im folgenden Kapitel wird zuerst die eindeutige Lösbarkeit der symmetrischen Formulierung (1.4) gezeigt. Um die symmetrische Formulierung zu lösen, wird eine numerische Näherungsmethode hergeleitet und deren eindeutige Lösbarkeit, Stabilität und Konvergenz gezeigt. Zusätzlich werden entsprechende Fehlerabschätzungen angegeben. Die Beweise findet man z.B. in [18, 20, 4].

2.1 Variationsformulierung

Sei X ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ und dem Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiters sei X' der zugehörige Dualraum mit der Norm

$$\|f\|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_X} \qquad \text{für alle } f \in X'.$$

$A : X \to X'$ sei linear und beschränkt mit

$$\|Av\|_{X'} \leq c_2^A \|v\|_X \qquad \text{für alle } v \in X.$$

Für gegebenes $f \in X'$ ist $u \in X$ als Lösung der Operatorgleichung

$$Au = f \tag{2.1}$$

zu bestimmen.

Lemma 2.1. *Die Operatorgleichung (2.1) ist äquivalent zur folgenden Variationsformulierung. Bestimme $u \in X$ als Lösung von*

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \textit{für alle } v \in X. \tag{2.2}$$

Beweis. Aus der Beziehung

$$\|Au - f\|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|\langle Au - f, v \rangle|}{\|v\|_X}$$

folgt unmittelbar die Behauptung. □

Der Operator $A : X \to X'$ induziert durch

$$a(u,v) := \langle Au, v\rangle \quad \text{für alle } u,v \in X$$

eine Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$. Der Operator A heißt X-elliptisch, falls

$$\langle Av, v\rangle \geq c_1^A \|v\|_X^2 \quad \text{für alle } v \in X$$

mit einer positiven Konstanten c_1^A erfüllt ist.

Satz 2.2 (Lemma von Lax-Milgram)**.** *Sei der Operator $A : X \to X'$ beschränkt und X-elliptisch. Dann besitzt die Gleichung (2.1) für jedes $f \in X'$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in X$ und es gilt*

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{c_1^A}\|f\|_{X'}.$$

Durch Anwendung des Lemma's von Lax-Milgram kann nun die eindeutige Lösbarkeit der symmetrischen Formulierung (1.4) gezeigt werden. Zuerst muss die zugehörige Variationsformulierung aufgestellt werden:
Gesucht sind $(\tilde{t},\tilde{u}) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$, sodass

$$a(\tilde{t},\tilde{u},\tau,\nu) = F(\tau,\nu) \tag{2.3}$$

für alle $(\tau,\nu) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ erfüllt ist. Hierbei sind

$$\begin{aligned} a(\tilde{t},\tilde{u},\tau,\nu) &= \langle V\tilde{t},\tau\rangle_{\Gamma_D} - \langle K\tilde{u},\tau\rangle_{\Gamma_D} + \langle K'\tilde{t},\nu\rangle_{\Gamma_N} + \langle D\tilde{u},\nu\rangle_{\Gamma_N}, \\ F(\tau,\nu) &= \langle(\frac{1}{2}I + K)\tilde{g}_D - V\tilde{g}_N - N_0 f,\tau\rangle_{\Gamma_D} + \langle(\frac{1}{2}I - K')\tilde{g}_N - D\tilde{g}_D - N_1 f,\nu\rangle_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Die Norm in $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ wird definiert als

$$\|(\tau,\nu)\|^2_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)\times\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)} := \|\tau\|^2_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)} + \|\nu\|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)}.$$

Lemma 2.3. *Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ ist beschränkt und $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$-elliptisch, d.h es gilt*

$$a(t,u,\tau,\nu) \leq c_2^A \|(t,u)\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)\times\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)} \|(\tau,\nu)\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)\times\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)}$$

sowie

$$a(\tau,\nu,\tau,\nu) \geq \min(c_1^V, c_1^D) \cdot \|(\tau,\nu)\|^2_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)\times\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)} \tag{2.4}$$

für alle $(t,u),(\tau,\nu) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$.

Die Elliptizität und Beschränktheit der Bilinearform aus (2.3) folgt aus der Elliptizität und Beschränktheit der Randintegraloperatoren V, K und D. Die Elliptizität des hypersingulären Integraloperators D gilt dabei jedoch nur für den Fall, dass der Dirichlet-Rand Γ_D ein Maß größer Null hat. Weiters ist auch die Linearform $F(\tau,\nu)$ für $(\tau,\nu) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ beschränkt. Somit kann das Lemma von Lax-Milgram (Satz 2.2) direkt angewandt werden und man erhält die eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung (2.3).

2.2 Ansatzräume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Sei $\{\overline{\mathcal{T}}_{N_\Omega}\}_{N_\Omega \in \mathbb{N}}$ ein Folge von Unterteilungen

$$\overline{\Omega} = \overline{\mathcal{T}}_{N_\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_\Omega} \overline{T_i}$$

mit finiten Elementen T_i. Für den Rand $\Gamma = \partial\Omega$ sei

$$\Gamma = \overline{\mathcal{T}}_{N_\Gamma} = \bigcup_{\ell=1}^{N_\Gamma} \tau_\ell$$

eine Folge von Unterteilungen $\{\overline{\mathcal{T}}_{N_\Gamma}\}_{N_\Gamma \in \mathbb{N}}$ mit Randelementen τ_ℓ. Eine Unterteilung heißt zulässig, falls zwei benachbarte Elemente entweder einen Knoten, eine Kante oder ein Dreieck gemeinsam haben. Hängende Knoten sind somit in einer zulässigen Unterteilung nicht erlaubt. Für jedes Randelement τ_ℓ ist

$$\Delta_\ell := \int_{\tau_\ell} dx$$

das Volumen, sowie

$$h_\ell = \Delta_\ell^{1/2}$$

die lokale Maschenweite und

$$d_\ell := \sup_{x,y \in \tau_\ell} |x - y|$$

der Durchmesser. Weiters bezeichnet r_ℓ den Radius des größten im Randelement τ_ℓ enthaltenen Kreises. Die globale Maschenweite ergibt sich schließlich als

$$h = h_{\max} = \max_{\ell=1,\ldots,N_\Gamma} h_\ell$$

Weiters sei

$$h_{\min} = \min_{\ell=1,\ldots,N_\Gamma} h_\ell.$$

Die Randelemente τ_ℓ heißen formregulär, falls

$$d_\ell \le c_F r_\ell \quad \text{für alle } \ell = 1, \ldots, N_\Gamma$$

mit einer von $\mathcal{T}_{N_\Gamma}$ unabhängigen Konstante c_F erfüllt ist. Außerdem bezeichnet man eine Familie von Unterteilungen $\mathcal{T}_{N_\Gamma}$ als global gleichmäßig, falls

$$\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \le c_G$$

mit einer von $N \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten $c_G \ge 1$ erfüllt ist.

Im folgenden sei eine Diskretisierung des Randes $\Gamma = \bigcup_{\ell=1}^{N_\Gamma} \tau_\ell$ durch N_Γ Dreiecke gegeben. M_Γ sei dabei die Anzahl der Randknoten. Die Diskretisierung wird als zulässig, global gleichmäßig und formregulär vorausgesetzt. Die Knoten der Diskretisierung werden mit $x_k, k = 1, \ldots, M_\Gamma$ bezeichnet. Weiters sei eine Diskretisierung des Gebietes $\overline{\Omega} = \bigcup_{\ell=1}^{N_\Omega} \overline{T}_\ell$ durch N_Ω Tetraeder gegeben. Die Anzahl der zugehörigen Knoten im Volumen wird mit M_Ω bezeichnet. Für die Randelementmethode werden Ansatzräume ausschließlich auf dem Rand und somit auf dem Oberlächennetz benötigt. Dabei werden hier ausschließlich zwei Ansatzräume verwendet. Der Ansatzraum der stückweisen konstanten Basisfunktionen und der Ansatzraum der stückweise linearen und global stetigen Basisfunktionen. Ansatzräume mit Funktionen höherer Ordnung können auf ähnliche Weise definiert werden. Der Raum

$$S_h^0(\Gamma) := \operatorname{span}\{\varphi_k^0\}_{k=1}^{N_\Gamma}$$

setzt sich aus Linearkombinationen der stückweise konstanten Basisfunktionen

$$\varphi_k^0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \tau_k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zusammen. Der Raum

$$S_h^1(\Gamma) := \operatorname{span}\{\varphi_k^1\}_{k=1}^{M_\Gamma}$$

sei der Raum der stückweise linearen und global stetigen Basisfunktionen

$$\varphi_k^1(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_k, \\ 0 & \text{für } x = x_j \neq x_k, \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für diese Räume gelten die folgenden Approximationseigenschaften

Satz 2.4. *Sei $\rho \in [-1, 0]$. Für $u \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in [\rho, 1]$ gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{v_h \in S_h^0(\Gamma)} \|u - v_h\|_{H^\rho(\Gamma)} \leq c h^{s-\rho} |u|_{H^s(\Gamma)}. \tag{2.5}$$

Eine ähnliche Eigenschaft gilt auch für den Raum der stückweise linearen und global stetigen Basisfunktionen.

Satz 2.5. *Sei $\rho \in [0, 1]$. Für $u \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in [\rho, 2]$ gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{w_h \in S_h^1(\Gamma)} \|u - w_h\|_{H^\rho(\Gamma)} \leq c h^{s-\rho} |u|_{H^s(\Gamma)}. \tag{2.6}$$

Weiters werden die Approximationseigenschaften der L_2-Projektion $Q_h u$ und der linear Interpolierenden $I_h u$ benötigt. Mit diesen Eigenschaften können unter anderem die Approximationseigenschaften der Ansatzräume $S_h^0(\Gamma)$ und $S_h^1(\Gamma)$ bewiesen werden. Die L_2-Projektion $Q_h u \in S_h^0(\Gamma)$ ist die eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\langle Q_h u, v_h \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle u, v_h \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v_h \in S_h^0(\Gamma).$$

Sei $u \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in [0,1]$ beliebig gegeben. Für $\rho \in [-1,0]$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - Q_h u\|_{H^\rho(\Gamma)} \leq c h^{s-\rho} |u|_{H^s(\Gamma)}. \tag{2.7}$$

Sei $I_h u$ die linear Interpolierende mit $I_h u(x_k) = u(x_k)$ für alle Knoten x_k der Randdiskretisierung und sei $u \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in (1,2]$, dann gilt für $\rho \in [0,1]$ die Fehlerabschätzung

$$\|u - I_h u\|_{H^\rho(\Gamma)} \leq c h^{s-\rho} |u|_{H^s(\Gamma)}. \tag{2.8}$$

Für alle $v_h \in S_h^\eta(\Gamma), \eta \in \{0,1\}$ und für eine global gleichmäßige Randdiskretisierung gilt die globale inverse Ungleichung

$$\|v_h\|_{H^s(\Gamma)} \leq c h^{\rho-s} \|v_h\|_{H^\rho(\Gamma)}. \tag{2.9}$$

mit $\rho \leq s \leq \eta$.

2.3 Näherungsmethoden für Variationsprobleme

Im folgenden Kapitel werden nun allgemeine Ergebnisse zu Näherungsmethoden zur Diskretisierung von Variationsproblemen der Gestalt (2.2) angegeben. Der unendlich dimensionale Raum X wird durch eine Folge von endlich-dimensionalen Ansatzräumen X_M angenähert. Für $M \in \mathbb{N}$ sei

$$X_M := \operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M \subset X.$$

$u \in X$ als Lösung der Variationsformulierung

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \qquad \text{für alle } v \in X$$

wird durch

$$u_M := \sum_{k=1}^M u_k \varphi_k \in X_M$$

angenähert, wobei u_M Lösung des Variationsproblems

$$\langle Au_M, v_M \rangle = \langle f, v_M \rangle \qquad \text{für alle } v_M \in X_M \tag{2.10}$$

ist. Diese Variationsformulierung ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$A_M \underline{u} = \underline{f} \tag{2.11}$$

wobei

$$A_M[\ell, k] = \langle A\varphi_k, \varphi_\ell \rangle, \quad f_\ell := \langle f, \varphi_\ell \rangle, \quad \text{für } k, \ell = 1, \ldots, M.$$

Die Eigenschaften der Matrix A_M ergeben sich aus den Eigenschaften des Operators A. Für einen elliptischen Operator A gilt

$$(A_M \underline{v}, \underline{v}) = \langle A v_M, v_M \rangle \geq c_1^A \|v_M\|_X^2 \quad \text{für } v_M \in X_M.$$

Somit ergibt sich für die Matrix A_M die positive Definitheit und die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (2.11).

Satz 2.6 (Cea's Lemma)**.** *Sei $A : X \to X'$ beschränkt und X-elliptisch. Für die eindeutige Lösung $u_M \in X_M$ der Variationsformulierung (2.10) gilt die Stabilitätsabschätzung*

$$\|u_M\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}$$

sowie die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_M\|_X \leq \frac{c_2^A}{c_1^A} \inf_{v_M \in V_M} \|u - v_M\|_X.$$

Für den Nachweis der Konvergenz benötigt man folglich eine Approximationseigenschaft des Ansatzraumes X_M,

$$\lim_{M \to \infty} \inf_{v_M \in X_M} \|v - v_M\|_X = 0 \quad \text{für alle } v \in X. \tag{2.12}$$

Im Falle der symmetrischen Formulierung (1.4) wird jedoch auch f durch einen Operator dargestellt, $f = Bg$. Dabei sind $B : Y \to X'$ ein beschränkter Operator und $g \in Y$ gegeben. Durch die Approximation dieses Operators entsteht ein zusätzlicher Approximationsfehler. Ausgehend von der Variationsformulierung, gesucht ist $u \in X$ als Lösung von

$$\langle Au, v \rangle = \langle Bg, v \rangle \qquad \text{für alle } v \in X,$$

wird $g \in Y$ durch eine Näherung g_N ersetzt,

$$g_N = \sum_{i=1}^{N} g_i \psi_i \in \text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^N \in Y_N \subset Y.$$

Zu bestimmen bleibt $\tilde{u}_M \in X_M$ als Lösung des gestörten Variationsproblems

$$\langle A\tilde{u}_M, v_M \rangle = \langle Bg_N, v_M \rangle \qquad \text{für alle } v_M \in X_M.$$

Dies ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$A_M \underline{u} = B_N \underline{g}$$

mit

$$A_M[\ell, k] = \langle A\varphi_k, \varphi_\ell \rangle, \quad B_N[\ell, i] = \langle B\psi_i, \varphi_\ell \rangle$$

mit $k, \ell = 1, \ldots, M$ und $i = 1, \ldots, N$. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems folgt wiederum aus der X-Elliptizät des Operators A.

Satz 2.7 (Strang-Lemma)**.** *Sei $A : X \to X'$ beschränkt und X-elliptisch. Sei $u \in X$ Lösung der kontinuierlichen Variationsformulierung (2.3), $\tilde{u}_M \in X_M$ Lösung der gestörten Variationsformulierung (2.3). Dann gilt die Fehlerabschätzung.*

$$\|u - \tilde{u}_M\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \left\{ c_2^A \inf_{v_M \in X_M} \|u - v_M\|_X + c_2^B \|g - g_N\|_Y \right\}. \tag{2.13}$$

Somit kann im Falle einer Approximationseigenschaft (2.12) des Ansatzraumes X_M und Konvergenz der Näherung g_N gegen die Randdaten g Konvergenz der Näherungslösung u_M gegen u gezeigt werden.
Wird neben der rechten Seite f auch der Operator A nur näherungsweise berechnet, muss ein alternatives Lemma von Strang formuliert werden. Anstelle der diskreten Variationsformulierung, gesucht sei $u_h \in X_h$, sodass

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in X_h$$

erfüllt ist, wird eine approximierte Variationsformulierung betrachtet. Gesucht sei $\tilde{u}_h \in X_h$ mit

$$\tilde{a}(\tilde{u}_h, v_h) = \tilde{f}(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in X_h. \tag{2.14}$$

Satz 2.8. *(Lemma von Strang) Sei die gestörte Bilinearform $\tilde{a}(v_h, v_h)$ aus (2.14) X_h-elliptisch. Dann gilt für das gestörte Variationsproblem folgende Fehlerabschätzung*

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_X \leq C\Bigg(\inf_{v_h \in X_h}\left[\|u_h - v_h\|_X + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|a(v_h, w_h) - \tilde{a}(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_X}\right] + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|f(w_h) - \tilde{f}(w_h)|}{\|w_h\|_X}\Bigg). \tag{2.15}$$

Beweis. Siehe [4]. □

2.4 Diskretisierung der symmetrischen Formulierung

Durch die theoretischen Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels ist es nun möglich, die symmetrische Formulierung (1.4) zu diskretisieren und Aussagen über Konvergenz und Fehlerabschätzungen zu treffen. Im folgenden stehen N_{Γ_D} und N_{Γ_N} für die Anzahl der Randelemente auf dem Dirichlet- und Neumann-Rand. Außerdem werden mit M_{Γ_D} und M_{Γ_N} die Anzahl der Knoten am Dirichlet- bzw. Neumann-Rand bezeichnet. Es werden die Ansätze

$$\tilde{t}_h(x) = \sum_{k=1}^{N_{\Gamma_D}} \tilde{t}_k \varphi_k^0(x) \subset S_h^0(\Gamma_D), \qquad \tilde{u}_h(x) = \sum_{i=1}^{M_{\Gamma_N}} \tilde{u}_i \varphi_i^1(x) \in S_h^1(\Gamma_N) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$$

mit stückweise konstanten Basisfunktionen φ_k^0 bzw. stückweise linearen Basisfunktionen φ_i^1 verwendet. Die Näherungen $(\tilde{t}_h, \tilde{u}_h)$ ergeben sich als Lösung der Variationsformulierung

$$a(\tilde{t}_h, \tilde{u}_h, \tau_h, \nu_h) = F(\tau_h, \nu_h) \quad \text{für alle } (\tau_h, \nu_h) \in S_h^0(\Gamma_D) \times S_h^1(\Gamma_N) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N).$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned} a(\tilde{t}_h, \tilde{u}_h, \tau_h, \nu_h) &= \langle V\tilde{t}_h, \tau_h\rangle_{\Gamma_D} - \langle K\tilde{u}_h, \tau_h\rangle_{\Gamma_D} + \langle K'\tilde{t}_h, \nu_h\rangle_{\Gamma_N} + \langle D\tilde{u}_h, \nu_h\rangle_{\Gamma_N}, \\ F(\tau, \nu) &= \langle (\frac{1}{2}I + K)\tilde{g}_D - V\tilde{g}_N - N_0 f, \tau\rangle_{\Gamma_D} + \langle (\frac{1}{2}I - K')\tilde{g}_N - D\tilde{g}_D - N_1 f, \nu\rangle_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Wie im kontinuierlichen Fall bereits gezeigt ist laut Lemma 2.3 die Bilinearform der Variationsformulierung (2.4) beschränkt und $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$-elliptisch. Somit ergibt sich aus Cea's Lemma (Satz 2.6) die eindeutige Lösbarkeit der diskreten Variationsformulierung (2.4) und die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &+ \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\le c \left\{ \inf_{v_h \in S^1_h(\Gamma_N) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)} \|\tilde{u} - v_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \inf_{\tau_h \in S^0_h(\Gamma_D)} \|\tilde{t} - \tau_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right\}.\end{aligned}$$

Durch Verwendung der Approximationseigenschaften (2.5) und (2.6) der Ansatzräume $S^0_h(\Gamma)$ und $S^1_h(\Gamma)$ folgt bei exakter Auswertung der rechten Seite und unter den Voraussetzungen $\tilde{u} \in H^{s_1}(\Gamma)$ und $\tilde{t} \in H^{s_2}_{\text{pw}}(\Gamma)$

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c_1 h^{2s_1-1} |\tilde{u}|^2_{H^{s_1}(\Gamma)} + c_2 h^{2s_2+1} |\tilde{t}|^2_{H^{s_2}_{\text{pw}}(\Gamma)}$$

mit

$$\frac{1}{2} \le s_1 \le 2, \quad -\frac{1}{2} \le s_2 \le 1.$$

Insbesondere für $s_1 = s$ und $s_2 = s - 1$ ergibt sich

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c h^{2s-1} \{ |\tilde{u}|^2_{H^s(\Gamma)} + |\tilde{t}|^2_{H^{s-1}_{\text{pw}}(\Gamma)} \}$$

für $\frac{1}{2} \le s \le 2$. Ist für die Lösung $u \in H^{5/2}(\Omega)$ erfüllt, so folgt

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c h^3 \{ |\tilde{u}|^2_{H^2(\Gamma)} + |\tilde{t}|^2_{H^1_{\text{pw}}(\Gamma)} \}.$$

Werden zusätzlich die Fortsetzungen der Randdaten $\tilde{g}_D \in H^{\rho-1/2}(\Gamma)$ und $\tilde{g}_N \in H^{\rho-3/2}(\Gamma)$ durch $\tilde{g}_{D,h} = \sum_{i=1}^N g_{D,i}\varphi^1_i \in S^1_h(\Gamma)$ und $\tilde{g}_{N,h} = \sum_{i=1}^M g_{N,i}\varphi^0_i \in S^0_h(\Gamma)$ approximiert, so ergibt sich aus dem Lemma von Strang (Satz 2.7) die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &+ \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\le c \Big\{ \inf_{v_h \in S^1_h(\Gamma_N) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)} \|\tilde{u} - v_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \inf_{\tau_h \in S^0_h(\Gamma_D)} \|\tilde{t} - \tau_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\qquad + \|\tilde{g}_D - g_{D,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{g}_N - g_{N,h}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \Big\}.\end{aligned}$$

Dabei wird eine exakte Auswertung der Newtonpotentiale $N_0 f$ und $N_1 f$ vorausgesetzt.
Sei nun $\tilde{g}_{D,h} = I_h \tilde{g}_D$ und $\tilde{g}_{N,h} = Q_h \tilde{g}_N$, $u \in H^{5/2}(\Omega)$, und durch Verwendung hinreichend regulärer Fortsetzungen $\tilde{g}_D \in H^{\rho-1/2}(\Gamma)$ und $\tilde{g}_N \in H^{\rho-3/2}_{\text{pw}}(\Gamma)$. Dann folgt durch Verwendung der Approximationseigenschaften (2.5) und (2.6) und der Fehlerabschätzungen (2.7) und (2.8) die Fehlerabschätzung

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c h^{2s-1} \{ |\tilde{u}|^2_{H^s(\Gamma)} + |\tilde{t}|^2_{H^{s-1}_{pw}(\Gamma)} \}$$

für $1/2 \leq s \leq \max\{2, \rho - 1/2\}$. Sind die Fortsetzungen $\tilde{g}_D \in H^2(\Gamma)$ und $\tilde{g}_N \in H^1_{\mathrm{pw}}(\Gamma)$,so gilt

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq ch^3\{|\tilde{u}|^2_{H^2(\Gamma)} + |\tilde{t}|^2_{H^1_{pw}(\Gamma)}\}.$$

Aus der Fehlerabschätzung (2.4) können mithilfe des Aubin-Nitsche Tricks (siehe z.B. [10]) und der inversen Ungleichung (2.9) Fehlerabschätzungen für die L_2-Norm hergeleitet werden,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L_2(\Gamma)} &\leq ch^2\{|\tilde{u}|^2_{H^2(\Gamma)} + |\tilde{t}|^2_{H^1_{pw}(\Gamma)}\}^{1/2}. \\ \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{L_2(\Gamma)} &\leq ch\{|\tilde{u}|^2_{H^2(\Gamma)} + |\tilde{t}|^2_{H^1_{pw}(\Gamma)}\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Die Galerkin Variationsformulierung (2.4) ist äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} V_h & -K_h \\ K_h^T & D_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{t}} \\ \underline{\tilde{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{g_1} \\ \underline{g_2} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

mit den durch

$$V_h[\ell, k] = \langle V\varphi^0_k, \varphi^0_\ell \rangle_{\Gamma_D}, D_h[j, i] = \langle D\varphi^1_i, \varphi^1_j \rangle_{\Gamma_N}, K_h[\ell, i] = \langle K\varphi^1_i, \varphi^0_\ell \rangle_{\Gamma_D}$$

erklärten Blöcke und

$$g_{1,\ell} = \langle (\frac{1}{2}I + K)\tilde{g}_D - V\tilde{g}_N - N_0 f, \varphi^0_\ell \rangle_{\Gamma_D}, \quad g_{2,j} = \langle (\frac{1}{2}I - K')\tilde{g}_N - D\tilde{g}_D - N_1 f, \varphi^1_j \rangle_{\Gamma_N}$$

für $k, l = 1, \ldots, N_{\Gamma_D}$ und $i, j = 1, \ldots, M_{\Gamma_N}$. Dabei ist V_h die Diskretisierung des Einfachschichtpotentials V auf dem Dirichlet-Rand Γ_D mit konstanten Ansatzfunktionen, D_h die Diskretisierung des hypersingulären Operators D auf dem Neumann-Rand Γ_N mit linearen Ansatzfunktionen und K_h die Diskretisierung des Doppelschichtpotentials K auf dem Dirichlet-Rand Γ_D mit linearen Ansatzfunktionen. Für die Diskretisierung des adjungierten Doppelschichtpotentials K'_h gilt $K'_h = K_h^T$.
Somit ist die Matrix des linearen Gleichungssystems (2.16) block-schiefsymmetrisch und aufgrund der Elliptizität der Bilinearform (2.4) positiv definit.
Weiters werden die Fortsetzungen der Randdaten $\tilde{g}_D(x)$ und $\tilde{g}_N(x)$ entweder durch Interpolation oder durch eine L_2-Projektion approximiert. Dann lässt sich das Gleichungssystem (2.16) schreiben als

$$\begin{pmatrix} V_h & -K_h \\ K_h^T & D_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{t}} \\ \underline{\tilde{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{V}_h & \frac{1}{2}M_h + \hat{K}_h \\ \frac{1}{2}M_h^T - \hat{K}_h^T & -\hat{D}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g}_{N,h} \\ \tilde{g}_{D,h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{N}_0 f \\ \underline{N}_1 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

mit

$$\begin{aligned} &V_h[\ell, k] = \langle V\varphi^0_k, \varphi^0_\ell \rangle_{\Gamma_D}, D_h[j, i] = \langle D\varphi^1_i, \varphi^1_j \rangle_{\Gamma_N}, K_h[\ell, i] = \langle K\varphi^1_i, \varphi^0_\ell \rangle_{\Gamma_D} \\ &\hat{V}_h[\ell, p] = \langle V\varphi^0_p, \varphi^0_\ell \rangle_{\Gamma_D}, \hat{D}_h[q, i] = \langle D\varphi^1_q, \varphi^1_i \rangle_{\Gamma_N}, \hat{K}_h[\ell, q] = \langle K\varphi^1_q, \varphi^0_\ell \rangle_{\Gamma} \\ &M_h[\ell, q] = \langle \varphi^1_q, \varphi^0_\ell \rangle, (N_0 f)_\ell = \langle N_0 f, \varphi^0_\ell \rangle_\Gamma, (N_1 f)_j = \langle N_1 f, \varphi^1_j \rangle \end{aligned}$$

für $k, \ell = 1, \ldots, N_{\Gamma_D}$, $p = 1, \ldots, N_{\Gamma_N}$, $i, j = 1, \ldots, M_{\Gamma_N}$ und $q = 1, \ldots, M_{\Gamma_D}$. Anstelle des Gleichungssystems (2.16) kann durch die Invertierbarkeit von V_h auch das Schur-Komplement-System

$$[D_h + K_h^T V_h^{-1} K_h]\underline{\tilde{u}} = \underline{f}_2 - K_h^T V_h^{-1} \underline{f}_1$$

mit dem symmetrischen und positiv definitem Schur-Komplement

$$\tilde{S}_h = D_h + K_h^T V_h^{-1} K_h \tag{2.18}$$

gelöst werden.

Durch die Lösung des linearen Gleichungssystems (2.17) oder des linearen Gleichungssystems (2.18) kann somit die Poisson-Gleichung (1.1), sowie das System der linearen Elastostatik (1.2) näherungsweise gelöst werden. Da jedoch die Fundamentallösungen globale Funktionen sind, entstehen vollbesetzte Matrizen. Somit ist also sowohl die Berechnung der Matrizen V_h, K_h, K_h' und D_h als auch die Berechnung der Newtonpotentiale $N_0 f$ und $N_1 f$ mit einem hohen Aufwand verbunden. Um die Effizienz zu verbessern, wird in den folgenden Kapiteln die Multipolmethode verwendet. Die Realisierung sämtlicher Randintegraloperatoren sowohl für den Laplace Operator, als auch für das System der linearen Elastostatik wurde bereits in ([12, 13]) besprochen. Die folgenden Kapitel werden sich somit vor allem auf die Realisierung der verbleibenden Operatoren $N_0 f$ und $N_1 f$ konzentrieren.

3 Die Behandlung der Newtonpotentiale im Falle der Poisson-Gleichung

In diesem Kapitel wird die Auswertung der Newtonpotentiale $N_0 f$ und $N_1 f$ für die Poisson-Gleichung (1.1) besprochen. Dazu wird zuerst eine direkte Auswertung für beide Newtonpotentiale hergeleitet und anschließend eine Methode zur indirekten Auswertung des Newtonpotential $N_1 f$ vorgestellt. Weiters wird gezeigt, wie diese Auswertungen durch die Multipolmethode beschleunigt werden können. Dabei tritt ein weiterer Approximationsfehler auf, für den eine entsprechende Fehlerabschätzung angegeben wird. In Abschnitt 3.5 werden zur Bestätigung der theoretischen Ergebnisse numerische Beispiele angegeben.

3.1 Direkte Auswertung des Newtonpotentials

Wie bereits in Kapitel 2.2 besprochen wird neben dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ auch das Volumen $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_\Omega} T_i$ in N_Ω nichtüberlappende finite Elemente (Tetraeder) unterteilt. Sind entsprechende numerische oder analytische Integrationsformeln vorhanden, können jedoch auch beliebige andere zulässige Elemente verwendet werden. Für die Auswertung der Newtonpotentiale müssen folgende Integrale berechnet werden:

$$(N_0 f)_\ell = \langle N_0 f, \varphi_\ell^0 \rangle_{\Gamma_D} = \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy ds_x \quad \text{für } \ell = 1, \dots, N_{\Gamma_D}$$

für das Newtonpotential $N_0 f$ auf dem Dirichlet-Rand und

$$(N_1 f)_\ell = \langle N_1 f, \varphi_\ell^1 \rangle_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x) \gamma_{1,x} \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy ds_x \quad \text{für } \ell = 1, \dots, M_{\Gamma_N}$$

für das Newtonpotential $N_1 f$ auf dem Neumann-Rand.

3.1.1 Direkte Auswertung von $N_0 f$

Betrachtet man das Newtonpotential $N_0 f$, so kann man das Volumenintegral auf die einzelnen finiten Elemente T_i aufspalten:

$$\int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy = \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \int_{T_i} U^*(x,y) f(y) dy ds_x.$$

Weiters wird die Integrationsreihenfolge vertauscht.

$$\sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \int_{T_i} U^*(x,y) f(y) dy ds_x = \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{T_i} f(y) \int_{\Gamma_D} U^*(x,y) \varphi_\ell^0(x) ds_x dy. \tag{3.1}$$

Da die Funktion f beliebig vorgegeben sein kann, ist es nicht immer möglich, das Volumenintegral analytisch zu berechnen. Es wird daher eine Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung dieses Integrals verwendet. Das Referenzelement T ist gegeben durch das Tetraeder

$$T = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \xi_1 \le 1, 0 \le \xi_2 \le 1 - \xi_1, 0 \le \xi_3 \le 1 - \xi_1 - \xi_2\}.$$

Die Ecken des Tetraeders T_i werden mit $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$ und x_{i_4} bezeichnet. Für $y \in T_i$ gilt dann die lokale Parameterdarstellung

$$y = x_{i_1} + \sum_{j=1}^{3} \xi_j (x_{i_{j+1}} - x_{i_1}) = x_{i_1} + J_i \xi \quad \text{für } \xi \in T$$

mit

$$J_i = \begin{pmatrix} x_{i_2,1} - x_{i_1,1} & x_{i_3,1} - x_{i_1,1} & x_{i_4,1} - x_{i_1,1} \\ x_{i_2,2} - x_{i_1,2} & x_{i_3,2} - x_{i_1,2} & x_{i_4,2} - x_{i_1,2} \\ x_{i_2,3} - x_{i_1,3} & x_{i_3,3} - x_{i_1,3} & x_{i_4,3} - x_{i_1,3} \end{pmatrix}.$$

Für das Volumen des Tetraeders T_i ergibt sich

$$\Delta_i = \int_{T_i} dy = \int_T |\det J_i| d\xi = \frac{1}{6} |\det J_i|.$$

Die Quadraturformel habe auf dem Referenztetraeder T die Gestalt

$$\int_T \tilde{f}(\xi) d\xi \approx \sum_{j=1}^{q} w_j \tilde{f}(\xi_j).$$

Dabei sind w_j die Quadraturgewichte und ξ_j die Quadraturstützstellen. Für ein beliebiges Element T_i ergibt sich dann die numerische Integrationsformel

$$\int_{T_i} f(y) dy = \int_T f(x_{i_1} + J_i \xi) |\det J_i| d\xi \approx 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(x_{i_1} + J_i \xi_j).$$

Bezeichnet man mit $y_j^i = x_{i_1} + J_i \xi_j$ die abgebildeten Integrationsknoten in T_i, so ergibt sich folgende Formel für eine numerische Integration

$$\int_{T_i} f(y) dy \approx 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i).$$

Wendet man diese Integrationsformel auf das Volumenintegral in (3.1) an, ergibt sich die Approximation

$$\sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{T_i} f(y) \int_{\Gamma_D} U^*(x,y)\varphi_\ell^0(x) ds_x dy \approx \sum_{i=1}^{N_\Omega} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i) \int_{\Gamma_D} U^*(x,y_j^i)\varphi_\ell^0 ds_x$$

$$= \sum_{i=1}^{N_\Omega} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i)(V\varphi_\ell^0)(y_j^i).$$

Dabei ist $(V\varphi_\ell^0)(y_j^i)$ das Einfachschichtpotential angewandt auf konstante Testfunktionen ausgewertet in den Punkten y_j^i. Dieses Integral lässt sich exakt berechnen [16].
Somit ergibt sich folgende Formel für die näherungsweise Auswertung des Newtonpotentials

$$(N_0 f)_\ell \approx \sum_{i=1}^{N_\Omega} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i)(V\varphi_\ell^0)(y_j^i) \quad \text{für } \ell = 1, \dots, N_{\Gamma_D}. \tag{3.2}$$

3.1.2 Direkte Auswertung von $N_1 f$

Das Newtonpotential $N_1 f$ wird auf ähnliche wie das Newtonpotential $N_0 f$ in Kapitel 3.1.1 behandelt. Zuerst wird die Integration im Volumen auf die einzelnen Tetraeder aufgespalten,

$$(N_1 f)_\ell = \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x} \int_{\Omega} U^*(x,y)f(y)dy = \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x} \int_{T_i} U^*(x,y)f(y)dy ds_x.$$

Anschließend wird die Integrationsreihenfolge vertauscht,

$$(N_1 f)_\ell = \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{T_i} f(y) \int_{\Gamma_N} \gamma_{1,x} U^*(x,y)\varphi_\ell^1(x) ds_x dy$$

und ebenfalls eine numerische Integrationsformel mit q Integrationspunkten angewandt,

$$(N_1 f)_\ell = \sum_{i=1}^{N_\Omega} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i)(W\varphi_\ell^1)(y_j^i).$$

Das Oberflächenintegral lässt sich in diesem Fall schreiben als das Doppelschichtpotential angewandt auf lineare Ansatzfunktionen ausgewertet in den Punkten y_j^i. Dieses Oberflächenintegral kann wiederum exakt berechnet werden [16]. Somit ergibt sich als Näherungsformel für die Auswertung des Newtonpotentials $N_1 f$

$$(N_1 f)_\ell = \sum_{i=1}^{N_\Omega} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i)(W\varphi_\ell^1)(y_j^i) \quad \text{für } \ell = 1, \dots, M_{\Gamma_N}. \tag{3.3}$$

Bemerkung 3.1. *Hierbei ist bei der Wahl der Integrationsformel zu beachten, dass die Integrationspunkte y_j^i nicht am Rand des Tetraeders T_i liegen dürfen. Bei der Auswertung des Doppelschichtpotentials auf dem Rand Γ muss die Sprungbedingung (1.17) beachtet werden.*

3.2 Alternative Darstellung von $N_1 f$

Im vorangegangenen Abschnitt wurde bereits eine numerische Näherungsformel zur effizienten Auswertung des Newtonpotentials $N_1 f$ hergeleitet. Es ist jedoch auch möglich, diese direkte Auswertung zu vermeiden. Dies wird möglich durch die folgende Beziehung zwischen dem Newtonpotential $N_0 f$ und dem Newtonpotential $N_1 f$.

Lemma 3.1. *Für das Volumenpotential $(N_1 f)(x), x \in \Gamma$, gilt die Darstellung*

$$(N_1 f)(x) = (-\frac{1}{2}I + K')V^{-1}(N_0 f)(x). \tag{3.4}$$

Beweis. Aus der ersten Integralgleichung (1.19) folgt durch Invertieren des Einfachschichtpotentials

$$\gamma_1 u(x) = V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)\gamma_0 u(x) - V^{-1}(N_0 f)(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in die zweite Gleichung aus (1.19) erhält man

$$\begin{aligned}
\gamma_1 u(x) &= (D\gamma_0 u)(x) + (\frac{1}{2}I + K')\gamma_1 u(x) + (N_1 f)(x) \\
&= (D\gamma_0 u)(x) + (\frac{1}{2}I + K')[V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)\gamma_0 u(x) - V^{-1}(N_0 f)(x)] + (N_1 f)(x) \\
&= [D + (\frac{1}{2}I + K')V^{-1}(\frac{1}{2}I + K)]\gamma_0 u(x) - (\frac{1}{2}I + K')V^{-1}(N_0 f)(x) + (N_1 f)(x)
\end{aligned}$$

und somit die Gleichheit

$$-V^{-1}(N_0 f)(x) = -(\frac{1}{2}I + K')V^{-1}(N_0 f)(x) + (N_1 f)(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Durch einfaches Umformen ergibt sich die Aussage des Lemmas. □

Die Darstellung (3.4) kann verwendet werden, um das Newtonpotential $N_1 f$ zu berechnen. Dazu wird folgendermaßen vorgegangen. Zuerst wird $w = V^{-1}N_0 f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ eingeführt, d.h. w ergibt sich als Lösung der Gleichung

$$Vw = N_0 f.$$

w wird nun durch die Galerkin-Approximierende $w_h \in S_h^0(\Gamma)$ angenähert, d.h. w_h ergibt sich als Lösung der Variationsformulierung

$$\langle Vw_h, \varphi_i^0 \rangle = \langle N_0 f, \varphi_i^0 \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, N_\Gamma.$$

Diese Variationsformulierung ist äquivalent zu folgendem linearen Gleichungssystem

$$V_h \underline{w} = \underline{N}_0 f \tag{3.5}$$

mit

$$V_h[i,j] = \langle V\varphi_j^0, \varphi_i^0\rangle \quad \text{für } i,j = 1,\ldots,N_\Gamma,$$
$$(N_0 f)_i = \langle N_0 f, \varphi_i^0\rangle \quad \text{für } i = 1,\ldots,N_\Gamma.$$

Somit ergibt sich als Näherung des Newtonpotentials $N_1 f$

$$\tilde{N}_1 f = (-\frac{1}{2}I + K')w_h.$$

Testet man diese Gleichung mit linearen Ansatzfunktionen, ergibt sich folgende Beziehung

$$\underline{\tilde{N}}_1 f = (-\frac{1}{2}M_h^T + K_h')\underline{w} \tag{3.6}$$

mit

$$(\tilde{N}_1 f)_j = \langle N_1 f, \varphi_j^1\rangle, \quad M_h[i,j] = \langle \varphi_j^1, \varphi_i^0\rangle, \quad K_h'[j,i] = \langle K'\varphi_i^0, \varphi_j^1\rangle$$

für $i = 1,\ldots,N_\Gamma$ und $j = 1,\ldots,M_{\Gamma_N}$. Anstelle die Auswertung des Newtonpotentials $\underline{N}_1 f$ direkt zu berechnen, kann also die Darstellung (3.6) verwendet werden. Zu beachten ist, dass hier das Newtonpotential $N_0 f$ auf dem vollständigen Rand zu berechnen ist. Die Matrizen M_h, K_h' und V_h werden bereits für die rechte Seite und für die Matrix des linearen Gleichungssystems (2.16) benötigt. Im linearen Gleichungssystem (2.16) werden jedoch nur Teile der Matrix benötigt, während in der Beziehung (3.6) die komplette Matrix V_h und ein großer Teil der Matrix K_h berechnet werden muss. Es stellt sich daher die Frage, welche Methode der Auswertung zu bevorzugen ist. Diese Frage wird in Abschnitt 3.5 anhand von numerischen Beispielen näher untersucht.

3.2.1 Approximationsfehler durch die alternative Darstellung

Das Einfachschichtpotential V ist beschränkt (Satz 1.7) und $H^{-1/2}(\Gamma)$-elliptisch (siehe 1.18). Cea's Lemma (Satz 2.6) kann also direkt angewandt werden und es ergibt sich für den Approximationsfehler

$$\|w - w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c \inf_{v_h \in S_h^0(\Gamma)} \|w - v_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le ch^{s+1/2}|w|_{H^s(\Gamma)} \tag{3.7}$$

für $s \in [-\frac{1}{2}, 1]$. Für das Newtonpotential $N_1 f$ gilt dann

$$\|N_1 f - \tilde{N}_1 f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|(-\frac{1}{2}I + K')w - (-\frac{1}{2}I + K')w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Durch die Beschränktheit des Operators $(-\frac{1}{2}I + K')$ (Satz 1.7) folgt

$$\|(-\frac{1}{2}I + K')(w - w_h)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c\|w - w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{3.8}$$

Einsetzen von (3.7) ergibt

$$\|N_1 f - \tilde{N}_1 f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c h^{s+1/2} |w|_{H^s(\Gamma)} \tag{3.9}$$

für $s \in [-\frac{1}{2}, 1]$. Dabei wird $w \in H^s(\Gamma)$ vorausgesetzt. Für $f \in \tilde{H}^r(\Omega), r \in [-1, \frac{1}{2}]$ gilt für einen glatten Rand $\Gamma = \partial\Omega$ $N_0 f \in H^{r+3/2}(\Gamma)$ und somit $w \in H^{r+1/2}(\Gamma)$. Für einen Lipschitz-Rand kann aus $f \in \tilde{H}^r(\Omega)$ für $r \in [-1, \frac{1}{2}]$ nur gefolgert werden, dass $w \in H^{r+1/2}(\Gamma)$ für $r \in [-1, -\frac{1}{2}]$. Somit kann im Falle eines Lipschitz-Randes eine maximale Ordnung von 1/2 erreicht werden. Sei im folgenden der Rand glatt. Nach dem Lemma von Strang (Satz 2.7) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\qquad \leq c\Big\{ \inf_{v_h \in S_h^1(\Gamma_N) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)} \|\tilde{u} - v_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \inf_{\tau_h \in S_h^0(\Gamma_D)} \|\tilde{t} - \tau_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\qquad\qquad + \|\tilde{g}_D - g_{D,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{g}_N - g_{N,h}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|w - w_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \Big\}.
\end{aligned}$$

Bei hinreichend regulären Fortsetzungen $\tilde{g}_D \in H^{\rho-1/2}(\Gamma)$ und $\tilde{g}_N \in H^{\rho-3/2}_{\mathrm{pw}}(\Gamma)$ gilt

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c h^{2s-1} \{ |\tilde{u}|^2_{H^s(\Gamma)} + |\tilde{t}|^2_{H^{s-1}_{pw}(\Gamma)} + |f|_{\tilde{H}^{s-3/2}(\Omega)} \}$$

für $1/2 \leq s \leq \max\{2, \rho - 1/2\}$. Für eine hinreichend glatte Lösung $u \in H^{5/2}(\Omega)$ folgt somit die optimale Konvergenzordnung

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c h^{3/2} \{ |\tilde{u}|^2_{H^2(\Gamma)} + |\tilde{t}|^2_{H^1_{pw}(\Gamma)} + |f|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)} \}.$$

3.3 Die Realisierung der Newtonpotentiale mit der Multipolmethode

In folgendem Abschnitt wird die Auswertung der beiden Newtonpotentiale $N_0 f$ und $N_1 f$ mithilfe der Multipolmethode beschleunigt. Die Multipolmethode wird bei der Beschreibung der Realisierung von $N_0 f$ kurz nach [12, 15] beschrieben.

3.3.1 Die Realisierung von $N_0 f$

Für die Realisierung des Newtonpotentials $N_0 f$

$$\begin{aligned}
(N_0 f)_\ell =& \langle N_0 f, \varphi^0_\ell \rangle_{\Gamma_D} = \int_{\Gamma_D} \varphi^0_\ell(x) \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy ds_x \\
=& \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{\Gamma_D} \varphi^0_\ell(x) \int_{T_i} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} f(y) dy ds_x \quad \text{für } \ell = 1, \ldots, N_{\Gamma_D}
\end{aligned}$$

durch die Multipolmethode wird der Kern des Integrals durch eine Reihenentwicklung ersetzt und somit die Integration von x und y getrennt. Dazu werden harmonische Kugelfunktionen verwendet. Der Kern des Newtonpotentials $N_0 f$ kann für $x \neq y$ durch die Legendre-Polynome geschrieben werden als

$$k(x,y) = \frac{1}{|x-y|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{|y|^{n+1}} P_n(\hat{x} \cdot \hat{y}), \qquad \hat{x} = \frac{x}{|x|}, \qquad \hat{y} = \frac{y}{|y|},$$

wobei

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \qquad \text{für } |u| \leq 1.$$

Eine Approximation des Kerns erhält man durch Abschneiden der unendlichen Reihe beim Entwicklungsgrad p,

$$k_p(x,y) = \sum_{n=0}^{p} \frac{|x|^n}{|y|^{n+1}} P_n(\hat{x} \cdot \hat{y}).$$

Nun werden die Legendre-Polynome durch Kugelfunktionen dargestellt

$$P_n(\hat{x} \cdot \hat{y}) = \sum_{m=-n}^{n} Y_n^{-m}(\hat{x}) Y_n^m(\hat{y}).$$

Durch geeignete Umformulierung (vgl. [23, 25]) erhält man die Darstellung

$$k_p(x,y) = \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{n} \overline{S_n^m(y)} R_n^m(x) \tag{3.10}$$

mit

$$R_n^{\pm m}(x) = \frac{1}{(n+m)!} \frac{d^m}{du^m} P_n(u)|_{u=\hat{x}_3} (\hat{x}_1 \pm i\hat{x}_2)^m |x|^n,$$
$$S_n^{\pm m}(y) = (n-m)! \frac{d^m}{du^m} P_n(u)|_{u=\hat{y}_3} (\hat{y}_1 \pm i\hat{y}_2)^m \frac{1}{|y|^{n+1}}$$

und $m \geq 0$. Der Fehler lässt sich dabei abschätzen durch

$$|k(x,y) - k_p(x,y)| \leq \frac{1}{|y| - |x|} \left(\frac{|x|}{|y|} \right)^{p+1} \qquad \text{für } |y| > |x|. \tag{3.11}$$

Wie die Fehlerabschätzung zeigt, kann diese Darstellung nicht für alle x und y verwendet werden, sondern nur für Elemente T_i, die weit genug vom Randelement τ_ℓ entfernt sind. Das Gebiet muss also in ein Nahfeld $\mathrm{NF}(\ell)$, in dem die Darstellung nicht gilt, und in ein Fernfeld $\mathrm{FF}(\ell)$, in dem die Darstellung gilt, unterteilt werden. Die durch die Kernapproximation definierte Approximation des Newtonpotentials $N_0 f$ lautet dann

$$(\tilde{N}_0 f)_\ell = \sum_{i \in \mathrm{NF}(\ell)} \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \frac{1}{4\pi} \int_{T_i} k(x,y) f(y) dy ds_x$$
$$+ \sum_{i \in \mathrm{FF}(\ell)} \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \frac{1}{4\pi} \int_{T_i} k_p(x,y) f(y) dy ds_x. \tag{3.12}$$

Die erste Summe aus (3.12) kann wie in Abschnitt 3.1 behandelt werden. Dadurch ergibt sich die Darstellung

$$\sum_{i\in \mathrm{NF}(\ell)} \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \int_{T_i} U^*(x,y) f(y) dy ds_x \approx \sum_{i\in NF(\ell)} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i)(V\varphi_\ell^0)(y_j^i) = \sum_{i\in NF(\ell)} N[i,\ell].$$

Die zweite Summe wird durch Einsetzen der Approximation zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in \mathrm{FF}(\ell)} \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \int_{T_i} k_p(x,y) f(y) dy ds_x \\
&\qquad = \sum_{i\in \mathrm{FF}(\ell)} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) \int_{T_i} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{m} \overline{S_n^m}(y) R_n^m(x) f(y) dy ds_x \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{m} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x) R_n^m(x) ds_x \sum_{i\in \mathrm{FF}(\ell)} \int_{T_i} \overline{S_n^m}(y) f(y) dy.
\end{aligned}$$

Definiert man die Koeffizienten

$$M_n^m(O,\ell) = \int_{\tau_\ell} \varphi_\ell^0(x) R_n^m(x) ds_x \qquad \text{und} \qquad L_n^m(O,k) = \int_{T_k} \overline{S_n^m}(y) f(y) dy \tag{3.13}$$

mit Bezug auf einen Koordinatenursprung O eines lokalen Koordinatensystems bei τ_ℓ, dann kann das Newtonpotential $N_0 f$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
(N_0 f)_\ell &= \sum_{k\in NF(\ell)} N_0[\ell,k] + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{n} M_n^m(O,\ell) \sum_{k\in FF(\ell)} L_n^m(O,k) \\
&= \sum_{k\in NF(\ell)} N_0[\ell,k] + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{n} M_n^m(O,\ell) \tilde{L}_n^m(FF(\ell))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

mit

$$\tilde{L}_n^m(FF(\ell)) = \sum_{k\in FF(\ell)} L_n^m(O,k) \quad \text{für } n = 0,\ldots,p \text{ und } m = -n,\ldots,n. \tag{3.15}$$

Da die Koeffizienten $\tilde{L}_n^m(FF(\ell))$ vom jeweiligen Fernfeld abhängen, ist immer noch ein quadratischer Aufwand notwendig, um diese Summen zu berechnen. Für eine effizientere Berechnung werden nun immer möglichst viele Koeffizienten zusammengefasst. Zuerst wird eine hierarchische Struktur über den Volumenelementen T_i und den Oberflächenelementen τ_ℓ erstellt. Diese hierarchische Struktur wird wie folgt erstellt. Alle Elemente liegen in einem Würfel, der das Gebiet Ω umfasst. Dieser Würfel bildet den Cluster ω_0^1. Dieser Cluster wird gleichmäßig in acht Cluster ω_j^1 unterteilt. Jedes Element wird durch seinen Schwerpunkt einem der acht Söhne zugeordnet. Cluster, die keine Elemente enthalten, werden gelöscht. Diese Unterteilung wird bis zu einer gewünschten Baumtiefe L rekursiv fortgesetzt, solange die durchschnittliche Anzahl von Elementen pro Cluster nicht eine Mindestanzahl unterschreitet. Für jeden Cluster sei C_j^λ der Clustermittelpunkt und $r_j^\lambda = \sup_{x\in\omega_j^\lambda} |x - C_j^\lambda|$ der Clusterradius. Der Cluster ω_i^λ liegt im Nahfeld des Clusters ω_j^λ, sobald die Bedingung

$$\operatorname{dist}\{C_i^\lambda, C_j^\lambda\} \leq (d+1)\max\{r_i^\lambda, r_j^\lambda\} \tag{3.16}$$

erfüllt ist. Wichtig ist weiters, dass das Nahfeld aller Söhne $w_i^\lambda \subset w_i^{\lambda-1}$ im Nahfeld des Vaters enthalten ist. Der Cluster ω_i^L sei der Cluster von τ_ℓ und ω_j^L sei der Cluster von T_k. Für ein Element τ_ℓ kann das Nahfeld $\mathrm{NF}(\ell)$ und das Fernfeld $\mathrm{FF}(\ell)$ definiert werden als

$$\begin{aligned}\mathrm{NF}(\ell) &:= \{k, 1 \leq k \leq N_\Omega : (3.16) \text{ ist erfüllt}\},\\ \mathrm{FF}(\ell) &:= \{1,\dots,N_\Omega\} \setminus \mathrm{NF}(\ell).\end{aligned}$$

Jetzt müssen noch die Koeffizienten $\tilde{L}_n^m(FF(\ell))$ effizient berechnet werden. Um dies zu erreichen, werden Entwicklungen mit einem verschiedenen Koordinatenursprung verwendet. Sei w_j^L ein Cluster im Fernfeld des Clusters w_i^L und sei das Randelement τ_ℓ in w_i^L enthalten. Laut (3.14) ist der Fernfeldanteil des Randelements gegeben durch

$$\tilde{\omega}_{1,\ell}^{\omega_j^L} = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=-n}^{n} M_n^m(C_i^\lambda, \ell) \sum_{T_k\in\omega_j^L} L_n^m(C_i^L, k). \tag{3.17}$$

Dabei wird der Koordinatenursprung im Cluster w_i^L gewählt. Diese Entwicklung wird als die lokale Entwicklung bezeichnet. Alternativ kann jedoch auch eine Approximation durch die sogenannte Multipolentwicklung

$$\hat{\omega}_{1,\ell}^{\omega_j^L} = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=-n}^{n} L_n^m(C_j^L, \ell) \sum_{T_k\in\omega_j^L} M_n^m(C_j^L, k) \tag{3.18}$$

verwendet werden, wobei in diesem Fall der Koordinatenursprung im Cluster ω_j^L liegt. Die aufsummierte lokale Entwicklung enthält alle Informationen der Elemente außerhalb des Nahfeldes des Cluster ω_i^L, während die Multipolentwicklung alle Informationen der Elemente, die im Cluster ω_j^L liegen, enhält.
Für jedes Tetraeder T_k werden die Koeffizienten

$$\hat{M}_n^m(C_j^L, k) = \int_{T_k} R_n^m(x) f(x) dx \tag{3.19}$$

berechnet. Zuerst werden die Koeffizienten der Multipolentwicklung (3.19) für alle Cluster ω_j^L auf dem feinsten Level berechnet

$$\tilde{M}_1^m(C_j^L, \cdot) = \sum_{T_k\in\omega_j^\lambda} \hat{M}_n^m(C_j^L, k).$$

Durch eine Translation

$$\tilde{M}_j^k(C_j^\lambda,\cdot) = \sum_{\omega_i^{\lambda+1}\in\text{Söhne}(\omega_j^\lambda)} \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=-s}^{s} R_s^t(\overrightarrow{C_j^\lambda C_j^{\lambda+1}}) \tilde{M}_{n-s}^{m-t}(C_i^{\lambda+1},\cdot)$$

können die Koeffizienten für die Multipolentwicklung der Väter bestimmt werden. Dies wird solange angewandt, bis für alle Cluster die Koeffizienten der Multipolentwicklung bestimmt sind. Diese Multipolentwicklungen müssen nun in lokale Entwicklungen konvertiert werden,

$$L_n^m(C_i^\lambda,\cdot) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=-s}^{s} (-s)^n \overline{S_{n+s}^{m+t}}(\overrightarrow{C_j^\lambda C_i^\lambda}) M_s^t(C_j^\lambda,\cdot).$$

Dies geschieht auf dem höchst möglichen Level, um die Anzahl der Konvertierungen zu minimieren. Das höchst mögliche Level ist das Level, in dem die beiden Cluster ω_i^λ und ω_j^λ im Fernfeld voneinander sind, während die entsprechenden Vätercluster schon im Nahfeld voneinander sind. Um die lokale Entwicklung jedes Clusters zu erhalten, werden die lokalen Entwicklungen durch eine Translation vom Cluster ω_i^λ auf dessen Söhne ω_j^λ übertragen,

$$\tilde{L}_n^m(C_j^{\lambda+1},\cdot) = \sum_{s=n}^{p} \sum_{t=-s}^{s} R_{s-n}^{t-m}(\overrightarrow{C_i^\lambda C_j^{\lambda+1}}) \tilde{L}_s^t(C_i^\lambda,\cdot).$$

Somit ist die Bestimmung der $\tilde{L}_n^m(FF(\ell))$ abgeschlossen und somit kann der Anteil des Fernfeldes an der Summe (3.14) berechnet werden. Die entsprechenden Translations- und Konvertierungsformeln können durch Additionstheoreme für die harmonischen Kugelfunktionen hergeleitet werden (vgl. [23, 25]).

3.3.2 Realisierung von $N_1 f$

Für das Newtonpotential $N_1 f$ muss das Multipolverfahren nur geringfügig abgeändert werden. Zu berechnen ist

$$\begin{aligned}(N_1 f)_\ell =& \langle N_1 f, \varphi_\ell^1\rangle_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x} \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy ds_x \\ =& \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x} \int_{T_i} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} f(y) dy ds_x \quad \text{für } l = 1,\dots,M_{\Gamma_N}.\end{aligned}$$

Aufteilung in Nah- und Fernfeld ergibt

$$\begin{aligned}(N_1 f)_\ell = & \sum_{i\in\text{NF}(\ell)} \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x} \frac{1}{4\pi} \int_{T_i} k(x,y) f(y) dy ds_x \\ & + \sum_{i\in\text{FF}(\ell)} \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x} \frac{1}{4\pi} \int_{T_i} k_p(x,y) f(y) dy ds_x.\end{aligned}$$

Die erste Summe kann wie in Abschnitt 3.1 behandelt werden und führt zur folgenden Darstellung

$$\sum_{i\in\mathrm{NF}(\ell)} \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_1 \int_{T_i} U^*(x,y)f(y)dyds_x$$

$$\approx \sum_{i\in\mathrm{NF}(\ell)} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i)(W\varphi_\ell^1)(y_j^i) = \sum_{i\in\mathrm{NF}(\ell)} N_1[i,\ell].$$

Im Fernfeld verwendet man die Approximation der Kernfunktion und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathrm{FF}(\ell)} \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x} \int_{T_i} U^*(x,y)f(y)dyds_x \\
&\quad= \sum_{i\in\mathrm{FF}(\ell)} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x) \int_{T_i} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{m} \overline{S_n^m}(y)\gamma_{1,x}R_n^m(x)f(y)dyds_x \\
&\quad= \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{m} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x}R_n^m(x)ds_x \sum_{i\in\mathrm{FF}(\ell)} \int_{T_i} \overline{S_n^m}(y)f(y)dy.
\end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten

$$M_n^m(O,\ell) = \int_{\Gamma_N} \varphi_\ell^1(x)\gamma_{1,x}R_n^m(x)ds_x, \qquad L_n^m(O,\ell) = \int_{T_i} \overline{S_n^m}(y)f(y)dy$$

und

$$\tilde{L}_n^m(\mathrm{FF}(\ell)) = \sum_{k\in\mathrm{FF}(\ell)} L_n^m(O,k)$$

folgt für das Newtonpotential $N_1 f$

$$(N_1 f)_\ell = \sum_{i\in\mathrm{NF}(\ell)} N_1[i,\ell] + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{m} M_n^m(O,\ell)\tilde{L}_n^m(\mathrm{FF}(\ell)).$$

Die Koeffizienten $\tilde{L}_n^m(\mathrm{FF}(\ell))$ können auf die selbe Weise berechnet werden wie für das Newtonpotential $N_0 f$. Bei der Berechnung der Koeffizienten $M_n^m(O,\ell)$ müssen lineare Testfunktionen und die Normalableitungen der Koeffizienten $R_n^m(x)$ verwendet werden.
Für die Berechnung des Newtonpotentials $N_1 f$ existiert noch eine weitere Möglichkeit, die in Abschnitt 3.2 vorgestellt wurde. Es kann die alternative Darstellung (3.4) verwendet werden. Dabei muss zuerst das lineare Gleichungssystem

$$V_h \underline{w} = \underline{N}_0 f \tag{3.20}$$

gelöst werden. Im Anschluss erhält man eine Approximation des Newtonpotentials $N_1 f$ durch

$$\hat{\underline{N}}_1 f = (-\frac{1}{2}M_h^T + K_h')\underline{w}.$$

Dabei wird der Vektor $\underline{\hat{N}_0 f}$ durch die in Abschnitt 3.3.1 beschriebene Multipolmethode berechnet. Weiters kann die Matrix-Vektor Multiplikation mit dem diskretisierten Einfachschichtpotential V_h und mit dem diskretisierten adjungierten Doppelschichtpotential K_h' durch die Multipolmethode beschleunigt werden (vgl. [13], [12]). Das lineare Gleichungssystem (3.20) muss dann mit einem iterativen Verfahren, wie zum Beispiel dem CG-Verfahren, gelöst werden.

3.3.3 Aufwandsabschätzung

Es sollen nun kurz der Aufwand für die Auswertung der Newtonpotentiale für die Standardmethode mit dem Aufwand der Multipolmethode verglichen werden. Betrachtet man die direkte Berechnung (3.2) des Newtonpotentials $N_0 f$

$$(N_0 f)_\ell \approx \sum_{i=1}^{N_\Omega} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i)(V\varphi_\ell^0)(y_j^i) \quad \text{für } \ell = 1, \ldots, N_{\Gamma_D}$$

so ergibt sich ein Berechnungsaufwand von $\mathcal{O}(N_\Omega \cdot N_{\Gamma_D})$ und für die Auswertung (3.3) des Newtonpotentials $N_1 f$

$$(N_1 f)_\ell \approx \sum_{i=1}^{N_\Omega} 6\Delta_i \sum_{j=1}^{q} w_j f(y_j^i)(W\varphi_\ell^1)(y_j^i) \quad \text{für } \ell = 1, \ldots, M_{\Gamma_N}$$

ein Berechnungsaufwand von $\mathcal{O}(N_\Omega \cdot M_{\Gamma_N})$ wesentlichen Operationen. Berücksichtigt man $N_\Omega = \mathcal{O}({N_\Gamma}^{3/2})$ und $M_\Gamma = \mathcal{O}(N_\Gamma)$, so ergibt sich ein Berechnungsaufwand von $\mathcal{O}({N_\Gamma}^{5/2})$ für beide Newtonpotentiale.
Die Multipolmethode wird mit einem Entwicklungsgrad p durchgeführt. Eine Entwicklung vom Grad p wird durch $\mathcal{O}(p^2)$ Koeffizienten beschrieben. Weiters wird die Anzahl der Cluster im feinsten Level mit a_Γ für den Clusterbaum der Randelemente und mit a_Ω für den Clusterbaum der Volumenelemente bezeichnet. Die Anzahl der Elemente im feinsten Level verhält sich wie $\mathcal{O}(\log^2 N_\Gamma)$ und somit ergibt sich

$$a_\Gamma = \mathcal{O}\left(\frac{N_\Gamma}{\log^2 N_\Gamma}\right).$$

Für a_Ω gilt die entsprechende Beziehung

$$a_\Omega = \mathcal{O}\left(\frac{N_\Omega}{\log^2 N_\Omega}\right).$$

Die Gesamtclusteranzahl kann wegen der Baumstruktur nicht mehr als $2a_\Gamma$ bzw. $2a_\Omega$ betragen. Für die Multipolmethode ist der Aufwand für die einzelnen Operationen in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Für sämtliche Translations- und Konvertierungsoperatoren gilt eine Aufwandsabschätzung von $\mathcal{O}(p^4)$. Gilt für den Multipolentwicklungsgrad $p = \mathcal{O}(\log N_\Gamma)$, so ergibt ein Einsetzen sämtlicher Beziehungen einen Gesamtaufwand von $\mathcal{O}({N_\Gamma}^{3/2} \log^2 N_\Gamma)$ wesentlichen Operationen für die Auswertung der Newtonpotentiale mit der Multipolmethode.

Operationen	Aufwand
Berechnung der Multipolentwicklung für sämtliche Volumenelemente.	$N_\Omega \mathcal{O}(p^2)$
Translationen der Multipolentwicklungen aller Volumencluster auf ihre Vätercluster.	$2a_\Omega \mathcal{O}(p^4)$
Konvertierung der Multipolentwicklung in eine lokale Entwicklung für die komplette Interaktionsliste. Für jeden Cluster müssen höchstens c_d Konvertierungen durchgeführt werden.	$c_d 2a_\Gamma \mathcal{O}(p^4)$
Translationen der lokalen Entwicklungen auf alle Söhnecluster.	$2a_\Gamma \mathcal{O}(p^4)$
Auswertungen der lokalen Entwicklungen für alle Randelemente.	$a_\Gamma \mathcal{O}(p^2)$

Tabelle 3.1: Aufwandsabschätzung für den Multipolalgorithmus für das Newtonpotential.

3.4 Abschätzung des Approximationsfehler

Durch die näherungsweise Auswertung der verschiedenen Operatoren durch die Multipolmethode stellt sich nun die Frage nach einer entsprechenden Abschätzung des Approximationsfehler. Dabei werden hier Fehler durch numerische Integration oder eine Approximation von Randdaten vernachlässigt. Somit wird angenommen, dass sowohl die Nahfeldberechnung als auch die Integration der Koeffizienten R_n^m und S_n^m exakt ist. Weiters wird eine gleichmäßige Vernetzung des Gebietes vorausgesetzt, um die Gültigkeit der globalen inversen Ungleichung (2.9) zu garantieren. Entsteht die Approximation der Operatoren durch eine Multipolapproximation, werden die approximierten Operatoren von $N_0 f$ und $N_1 f$ mit $\tilde{N}_0 f$ und $\tilde{N}_1 f$ bezeichnet. Mit $\hat{N}_1 f$ wird die Approximation bezeichnet, die über die alternative Darstellung (3.4) entsteht.
Der Approximationsfehler der Multipolmethode kann durch verschiedene Parameter gesteuert werden. Wichtig sind vor allem der Entwicklungsgrad p, der Nahfeldparameter d und der Clusterradius r. Mit diesen Parametern ergeben sich folgende Fehlerabschätzungen.

Lemma 3.2. *Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $|x| \le r, |y| \ge dr$ mit $d > 1$ und $r > 0$. Dann gelten folgende Fehlerabschätzungen für den Kern $k(x,y) = |x-y|^{-1}$ und der lokalen Entwicklung (3.10) [6]*

$$\Big|k(x,y) - k_p(x,y)\Big| \le \frac{1}{(d-1)r}\left(\frac{1}{d}\right)^{p+1}, \tag{3.21}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_x}(k(x,y) - k_p(x,y))\right| \le \frac{1+\pi}{(d-1)r^2}\left(p+1+\frac{d}{d-1}\right)\left(\frac{1}{d}\right)^{p+1}. \tag{3.22}$$

Für die Parameter der Multipolmethode ergeben sich folgende Abhängigkeiten von der Gitterweite $h = \max_{i=1,\dots,N_\Gamma} \Delta_i^{1/2}$. Die Anzahl der Randelemente N_Γ verhält sich wie $O(h^{-2})$, und somit die Anzahl der Volumenelemente wie $O(h^{-3})$. Da sich die Anzahl der Elemente im feinsten Level wie $\mathcal{O}(\log^2 h^{-2})$ verhalten soll, gilt die Abschätzung

$$r \geq ch. \tag{3.23}$$

Lemma 3.3 ([12, 15])**.** *Sei $p \sim \log N_\Gamma$, die Vernetzung gleichmäßig und der Nahfeldparameter d fix. Dann gelten die Fehlerabschätzungen für die approximierten Randintegraloperatoren des Einfachschichtpotentials $\tilde{V}$, des Doppelschichtpotentials $\tilde{K}$, des adjungierten Doppelschichtpotentials $\tilde{K}'$ und des hypersingulären Integraloperator $\tilde{D}$ wie folgt*

$$\|(V-\tilde{V})t\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^2\|t\|_{L_2(\Gamma)} \qquad \text{für alle } t \in L_2(\Gamma), \tag{3.24}$$

$$\|(K-\tilde{K})u\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^2\|u\|_{L_2(\Gamma)} \qquad \text{für alle } u \in L_2(\Gamma), \tag{3.25}$$

$$\|(K'-\tilde{K}')t\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^2\|t\|_{L_2(\Gamma)} \qquad \text{für alle } t \in L_2(\Gamma), \tag{3.26}$$

$$\langle (D-\tilde{D})u, v\rangle \leq ch^2\|u\|_{H^1(\Gamma)}\|v\|_{H^1(\Gamma)} \qquad \text{für alle } u,v \in H^1(\Gamma). \tag{3.27}$$

Lemma 3.4. *Sei $p \sim \log N_\Gamma$, die Vernetzung gleichmäßig und der Nahfeldparameter d fix. Dann gilt die Fehlerabschätzung für die Multipolapproximation $\tilde{N}_0 f$ des Nwetonpotentials $N_0 f$*

$$\|(N_0-\tilde{N}_0)f\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^2\|f\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{für alle } f \in L_2(\Omega). \tag{3.28}$$

Beweis. Mit der Fehlerabschätzung (3.21) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
\|(N_0-\tilde{N}_0)(f)\|^2_{L_2(\Gamma)} &= \frac{1}{16\pi^2}\int_\Gamma \left|\int_\Omega (k(x,y)-k_p(x,y))f(y)dy\right|^2 ds_x \\
&\leq \frac{1}{16\pi^2}\int_\Gamma \left(\int_\Omega |k(x,y)-k_p(x,y))||f(y)|dy\right)^2 ds_x \\
&\leq \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{(d-1)^2r^2}\left(\frac{1}{d}\right)^{2p+2}\int_\Gamma\left(\int_\Omega |f(y)|dy\right)^2 ds_x \\
&\leq \frac{|\Omega||\Gamma|}{16\pi^2}\frac{1}{(d-1)^2r^2}\left(\frac{1}{d}\right)^{2p+2}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Laut Vorraussetzung kann p so gewählt werden, dass es sich verhält wie $\log h^{-3}$ und somit existiert eine Konstante c, sodass gilt

$$\frac{1}{d-1}\left(\frac{1}{d}\right)^{p+1} \leq ch^3.$$

Einsetzen dieser Abschätzung und der Abschätzung (3.23) ergibt die Behauptung. □

Lemma 3.5. *Sei $p \sim \log N_\Gamma$, die Vernetzung gleichmäßig und der Nahfeldparameter d konstant. Dann gilt für die Multipolapproximation $\tilde{N}_1 f$ des Newtonpotentials $N_1 f$ die Fehlerabschätzung*

$$\|(N_1-\tilde{N}_1)f\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^{3/2}\|f\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{für alle } f \in L_2(\Omega). \tag{3.29}$$

Beweis. Der Beweis ist sehr ähnlich zum Beweis des Lemmas 3.4. Zuerst wird der Betrag ins Integral gezogen, anschließend Abschätzung (3.22) verwendet und schlussendlich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung angewandt:

$$\begin{aligned}
\|N_1 f - \tilde{N}_1 f\|^2_{L_2(\Gamma)} &\leq \frac{1}{16\pi^2} \int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial n_x} \int_\Omega (k(x,y) - k_p(x,y)) f(y) dy \right|^2 ds_x \\
&\leq \frac{1}{16\pi^2} \int_\Gamma \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial n_x} (k(x,y) - k_p(x,y)) f(y) \right| dy \right)^2 ds_x \\
&\leq \frac{1}{16\pi^2} \frac{1+\pi}{(d-1)^2 r^4} \left(p + 1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{2p+2} \int_\Gamma \left(\int_\Omega |f(y)| dy \right)^2 ds_x \\
&\leq \frac{|\Omega||\Gamma|}{16\pi^2} \frac{1}{(d-1)^2 r^4} \left(p + 1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{2p+2} \|f\|^2_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung kann p so gewählt werden, dass es sich verhält wie $\log h^{-7/2}$ und somit existiert ein c, sodass gilt

$$\left(p + 1 + \frac{1}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+1} \leq ch^{7/2}.$$

p muss dabei anders als im Beweis des Lemmas 3.4 gewählt werden. Mit der Abschätzung (3.23) ist die Behauptung bewiesen. □

Das Newtonpotential $N_1 f$ kann auch auf alternative Weise durch die Darstellung (3.4) berechnet werden. Dabei werden verschiedene Approximationsfehler gemacht. Es werden sowohl das Einfachschichtpotential V als auch das adjungierte Doppelschichtpotential K' durch die Multipolmethode approximiert. Die approximierten Operatoren werden mit $\tilde{V}$ und $\tilde{K}'$ bezeichnet. Weiters wird $V^{-1} N_0 f$ durch eine Funktion $w_h \in S_h^0(\Gamma)$ approximiert und schlussendlich wird auch das Newtonpotential $N_0 f$ durch $\tilde{N}_0 f$ approximiert. Einfach bedienbar

Lemma 3.6. *Sei $p \sim \log N_\Gamma$ und die Vernetzung gleichmäßig. Zusätzlich sei der Rand glatt. Dann gilt für die Approximation $\hat{N}_0 f$ des Newtonpotentials $N_0 f$ die Fehlerabschätzung*

$$\|N_1 f - \hat{N}_1 f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq ch^{3/2} \|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}. \tag{3.30}$$

Beweis. Die Approximationsfehler werden getrennt betrachtet:

$$\begin{aligned}
\|N_1 f - \hat{N}_1 f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \|(-\frac{1}{2} I + K') w - (-\frac{1}{2} I + \tilde{K}') w_h)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} && (3.31) \\
&\leq \|(-\frac{1}{2} I + K') w - (-\frac{1}{2} I + \tilde{K}') w)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} && (3.32) \\
&\quad + \|(-\frac{1}{2} I + \tilde{K}') w - (-\frac{1}{2} I + \tilde{K}') w_h)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} && (3.33)
\end{aligned}$$

mit

$$w = V^{-1}(N_0 f)(x)$$

und w_h als Lösung der Variationsformulierung

$$\langle \tilde{V} w_h, \varphi_\ell^0 \rangle = \langle \tilde{N}_0 f, \varphi_\ell^0 \rangle \quad \text{für } \ell = 1, \dots, N. \tag{3.34}$$

Die Norm (3.32) lässt sich wie folgt abschätzen

$$\|(-\frac{1}{2}I + K')w - (-\frac{1}{2}I + \tilde{K}')w)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|(K - \tilde{K}')w\|_{L_2(\Gamma)}$$

und nach Abschätzung (3.26) gilt

$$\|(K - \tilde{K}')w\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^2 \|w\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Mit den Abbildungseigenschaften (1.7) der Randintegraloperatoren ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(-\frac{1}{2}I + K')w - (-\frac{1}{2}I + \tilde{K}')w)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &\leq ch^2 \|N_0 f\|_{H^1(\Gamma)} \\ &\leq ch^2 \|f\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)} \leq ch^2 \|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für die zweite Norm (3.33) folgt aus der Beschränktheit des Operator $(-\frac{1}{2}I + \tilde{K}')$

$$\|(-\frac{1}{2}I + \tilde{K}')w - (-\frac{1}{2}I + \tilde{K}')w_h)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c\|w - w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Der Fehler der approximierten Variationsformulierung (3.34) kann mit dem Lemma von Strang abgeschätzt werden. Dabei gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der inversen Ungleichung (2.9)

$$|\langle (V - \tilde{V})w_h, \tau_h \rangle| \leq \|(V - \tilde{V})w_h\|_{L_2(\Gamma)} c h^{-1/2} \|\tau_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

und somit für das Supremum durch Einsetzen der Abschätzung (3.24)

$$\sup_{\tau_h \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{|\langle (V - \tilde{V})w_h, \tau_h \rangle|}{\|\tau_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}} \leq ch^{3/2} \|w_h\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Mit Satz 2.7 und der inversen Ungleichung (2.9) folgt andererseits

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{L_2(\Gamma)} &\leq \|w_h - Q_h w\|_{L_2(\Gamma)} + \|Q_h w\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq ch^{-1/2} \|w_h - Q_h w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + c\|w\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq ch^{-1/2} \left[\|w_h - w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|w - Q_h w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right] + c\|w\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq ch^{-1/2} \left[\|w_h - w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \tilde{c} h^{1/2} \|w\|_{L_2(\Gamma)} \right] + c\|w\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq ch^{-1/2} \|w - w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + c\|w\|_{L_2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

und somit

$$\sup_{\tau_h \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{|\langle (V - \tilde{V}) w_h, \tau_h \rangle|}{\|\tau_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}} \leq ch\|w - w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + ch^{3/2}\|w\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Weiters gilt

$$|\langle N_0 f - \tilde{N}_0 f, \tau_h \rangle| \leq ch^{-1/2}\|N_0 f - \tilde{N}_0 f\|_{L_2(\Gamma)}\|\tau_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

und für das Supremum durch Einsetzen von (3.28)

$$\sup_{\tau_h \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{|\langle N_0 f - \tilde{N}_0 f, \tau_h \rangle|}{\|\tau_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}} \leq ch^{3/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Mithilfe des Lemmas von Strang (Satz 2.7), den Abbildungseigenschaften (Satz 1.7) und der Approximationseigenschaften (Satz 2.5) des Raumes $S_h^0(\Gamma)$ folgt dann

$$\|(-\frac{1}{2}I + \tilde{K}')w - (-\frac{1}{2}I + \tilde{K}')w_h)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq ch^{3/2}\|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}.$$

Zusammenfügen der beiden Abschätzungen ergibt das Lemma. □

Nachdem für alle Operatoren Abschätzungen gefunden wurden, werden diese nun kombiniert, um mit Hilfe des Lemmas von Strang (Satz 2.8) eine Fehlerabschätzung für die Lösung der approximierten Variationsformulierung zu finden.

Satz 3.7. *Seien t und u die eindeutigen Lösungen der Variationsformulierung (2.4). Sei $p \sim \log N_\Gamma$, die Vernetzung gleichmäßig und der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ glatt. Dann gilt für die Näherungslösungen $\tilde{t}, \tilde{u}$ der Multipolmethode die Fehlerabschätzung.*

$$\|t - \tilde{t}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u - \tilde{u}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c\left(h^{2\rho+1}\|t\|^2_{H^\rho_{pw}(\Gamma)} + h^{2\mu-1}\|u\|^2_{H^\mu(\Gamma)} + h^3\|f\|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}\right)$$

falls $t \in H^\rho_{pw}(\Gamma)$ und $u \in H^\mu(\Gamma)$ mit $0 \leq \rho \leq 1$ und $1 \leq \mu \leq 2$.

Beweis. Zuerst wird der Fehler der rechten Seite abgeschätzt. Dazu wird der Fehler mithilfe der Dreiecksungleichung aufgespalten und anschließend die Cauchy-Schwarz Ungleichung verwendet:

$$\begin{aligned}
|F(w_h, s_h) - \tilde{F}(w_h, s_h)| \leq\ & \|(V - \tilde{V})\tilde{g}_N\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} \\
& + \|(K - \tilde{K})\tilde{g}_D\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} \\
& + \|(K' - \tilde{K}')\tilde{g}_N\|_{L_2(\Gamma)}\|w_h\|_{L_2(\Gamma)} \\
& + |\langle (D - \tilde{D})\tilde{g}_D, w_h \rangle| \\
& + \|(N_0 - \tilde{N}_0)f\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} \\
& + \|(N_1 - \tilde{N}_1)f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\|w_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Abschätzungen (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) und (3.29) erhält man

$$\begin{aligned}|F(w_h,s_h)-\tilde{F}(w_h,s_h)| \le c\Big(& h^2\|\tilde{g}_N\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} + h^2\|\tilde{g}_D\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} \\ & + h^2\|\tilde{g}_N\|_{L_2(\Gamma)}\|w_h\|_{L_2(\Gamma)} + h^2\|\tilde{g}_N\|_{H^1(\Gamma)}\|w_h\|_{H^1(\Gamma)} \\ & + h^2\|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} + h^{3/2}\|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}\|w_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\Big).\end{aligned}$$

Mit der globalen inversen Ungleichung für $s_h \in S_h^0(\Gamma)$ und $w_h \in S_h^1$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}&|F(w_h,s_h)-\tilde{F}(w_h,s_h)| \\ &\qquad \le ch^{3/2}(\|\tilde{g}_N\|_{L_2(\Gamma)} + \|\tilde{g}_D\|_{H^1(\Gamma)} + \|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)})(\|s_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|w_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \\ &\qquad \le ch^{3/2}(\|\tilde{g}_N\|_{L_2(\Gamma)} + \|\tilde{g}_D\|_{H^1(\Gamma)} + \|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)})(\|s_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|w_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)})^{1/2}.\end{aligned}$$

Somit gilt für das Supremum die Abschätzung

$$\sup_{(w_h,s_h)\in Z_h} \frac{|F(w_h,s_h)-\tilde{F}(w_h,s_h)|}{(\|s_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|w_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)})^{1/2}} \le ch^{3/2}(\|\tilde{g}_N\|_{L_2(\Gamma)} + \|\tilde{g}_D\|_{H^1(\Gamma)} + \|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)})$$

mit $Z_h = S_h^0(\Gamma_D) \times S_h^1(\Gamma_N) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_D)$. Ähnlich wird für die Bilinearform vorgegangen:

$$\begin{aligned}&|a(v_h,\tau_h;w_h,s_h) - \tilde{a}(v_h,\tau_h;w_h,s_h)| \\ &\qquad \le \|(V-\tilde{V})\tau_h\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} + \|(K-\tilde{K})v_h\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\qquad\quad + \|(K'-\tilde{K}')\tau_h\|_{L_2(\Gamma)}\|w_h\|_{L_2(\Gamma)} + |\langle (D-\tilde{D})v_h, w_h\rangle| \\ &\qquad \le ch^2\Big(\|\tau_h\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} + \|v_h\|_{L_2(\Gamma)}\|s_h\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\qquad\quad + \|\tau_h\|_{L_2(\Gamma)}\|w_h\|_{L_2(\Gamma)} + \|v_h\|_{H^1(\Gamma)}\|w_h\|_{H^1(\Gamma)}\Big).\end{aligned}$$

Mittels der inversen Ungleichung (2.9) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}&|a(v_h,\tau_h;w_h,s_h) - \tilde{a}(v_h,\tau_h;w_h,s_h)| \\ &\qquad \le ch^{3/2}\left(\|\tau_h\|_{L_2(\Gamma)} + \|v_h\|_{H^1(\Gamma)}\right)\left(\|s_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|w_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right) \\ &\qquad \le ch^{3/2}\left(\|\tau_h\|_{L_2(\Gamma)} + \|v_h\|_{H^1(\Gamma)}\right)\left(\|s_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|w_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

und somit

$$\sup_{(w_h,s_h)\in Z_h} \frac{|a(v_h,\tau_h;w_h,s_h) - \tilde{a}(v_h,\tau_h;w_h,s_h)|}{\left(\|s_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|w_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2}} \le ch^{3/2}\left(\|\tau_h\|_{L_2(\Gamma)} + \|v_h\|_{H^1(\Gamma)}\right).$$

Mit Satz 2.7 und der inversen Ungleichung folgt

$$\|\tau_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^{-1/2}\|t-\tau_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + c\|t\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Durch ähnliche Schlußfolgerungen gilt

$$\|v_h\|_{H^1(\Gamma)} \leq ch^{-1/2}\|u-v_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + c\|u\|_{H^1(\Gamma)}$$

und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sup_{(w_h,s_h)\in Z_h} &\frac{|a(v_h,\tau_h;w_h,s_h)-\tilde{a}(v_h,\tau_h;w_h,s_h)|}{\left(\|s_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}+\|w_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2}}\\ &\leq ch\left(\|t-\tau_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}+\|u-v_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)+ch^{3/2}\left(\|t\|_{L_2(\Gamma)}+\|u\|_{H^1(\Gamma)}\right).\end{aligned}$$

Durch das Lemma von Strang (Satz 2.7) erhält man somit für die Näherungslösungen $\tilde{t}_h$ und $\tilde{u}_h$

$$\begin{aligned}\|t-\tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}+\|u-\tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq &c\inf_{(v_h,\tau_h)\in Z_h}\left\{\tilde{c}\|t-\tau_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}+\|u-v_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right\}\\ &+ch^3\left\{\|t\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|u\|^2_{H^1(\Gamma)}+\|f\|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}\right\}.\end{aligned}$$

Durch die Approximationseigenschaften der Ansatzräume folgt die Aussage des Satzes. □

Für $t\in H^1_{\mathrm{pw}}(\Gamma)$ und $u\in H^2(\Gamma)$ vereinfacht sich die Abschätzung zu

$$\left(\|t-\tilde{t}_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}+\|u-\tilde{u}_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2} \leq ch^{3/2}\left(\|t\|^2_{H^1_{\mathrm{pw}}(\Gamma)}+\|u\|^2_{H^2(\Gamma)}+\|f\|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Bemerkung 3.2. *Satz 3.7 gilt sowohl für die Realisierung des Newtonpotentials N_1f durch die alternative Darstellung (3.4), als auch durch eine direkte Auswertung. Für die Fehlerabschätzung der alternativen Darstellung wird jedoch die Glattheit des Randes vorausgesetzt. Wird eine direkte Auswertung durchgeführt, so kann auf die Glattheit des Randes verzichtet werden.*

Außerdem können aus der Abschätzung (3.7) mit Hilfe des Aubin-Nitsche Tricks [10] auch Abschätzungen für die $L_2(\Gamma)$-Normen hergeleitet werden.

Lemma 3.8. *Seien $t\in H^1(\Gamma)$ und $u\in H^2(\Gamma)$ die eindeutigen Lösungen der Variationsformulierung (2.4). Sei $p\sim\log N_\Gamma$ und die Vernetzung gleichmäßig. Dann gelten für die Näherungslösungen $\tilde{t},\tilde{u}$ der Multipolmethode die Fehlerabschätzungen*

$$\|t-\tilde{t}_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch\left(\|t\|^2_{H^1(\Gamma)}+\|u\|^2_{H^2(\Gamma)}+\|f\|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}\right)^{1/2}, \tag{3.35}$$

$$\|u-\tilde{u}_h\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^2\left(\|t\|^2_{H^1(\Gamma)}+\|u\|^2_{H^2(\Gamma)}+\|f\|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}\right)^{1/2}. \tag{3.36}$$

3.5 Numerische Beispiele

3.5.1 Vergleich: direkte Auswertung - Multipolmethode

In folgendem numerischen Beispiel wird die klassische Randelementmethode mit der durch die Multipolmethode beschleunigten Randelementmethode verglichen. Es wird dazu das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -2 \qquad \text{für } x \in \Omega = (0,1)^3, \\ \gamma_0 u(x) &= x^2 \qquad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

betrachtet, dessen Lösung $u(x,y,z) = x^2$ ist. Der Würfel wurde gleichmäßig verfeinert. Das lineare Gleichungssystem (2.17) wird mit dem CG-Verfahren gelöst, wobei die Matrix V_h mit einem algebraischen BPX (ABPX) (vgl. [19]) vorkonditioniert wird. In Tabelle 3.2 werden die erhaltenen Werte angegeben.

N_Γ	N_Ω	$N_0 f$	Aufstellen	Lösen	It	$\|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{L_2(\Gamma)}$
96	192	0	1	0	24	3.24e-01
		0	0	0	24	3.24e-01
384	1536	3	8	0	28	1.70e-01
		1	3	0	28	1.70e-01
1536	12288	94	168	1	30	8.55e-02
		6	10	1	30	8.55e-02
6144	98204					
		38	51	11	34	4.28e-02
24576	786432					
		305	353	72	38	2.14e-02

Tabelle 3.2: Vergleich Standardverfahren und Multipolverfahren

Dabei werden in der jeweils ersten Zeile die Ergebnisse der direkten Auswertung und in der darauffolgenden Zeile die Ergebnisse der Multipolmethode angegeben. Die erste Spalte enthält die Anzahl der Randelemente und die zweite Spalte enthält die Anzahl der Tetraeder im Volumen. Darauf folgt die für die Auswertung des Newtonpotentials $N_0 f$ benötigte Zeit, gefolgt von der Gesamtzeit zum Aufstellen des linearen Gleichungssystems. Im Anschluss werden die Zeit und die Iterationszahlen angegeben, die zum Lösen des linearen Gleichungssystems vom CG-Verfahren benötigt wird. Schließlich wird noch der Fehler der berechneten Neumann-Daten in der $L_2(\Gamma)$-Norm angegeben. Die Multipolparameter wurden so gewählt, dass sich der Approximationsfehler nicht vom Standardverfahren unterscheidet. Wie laut (3.35) zu erwarten ist, halbiert sich der Fehler der Neumann-Daten pro Verfeinerungsstufe. Auch der Berechnungsaufwand und der Speicheraufwand verhalten sich wie erwartet. Der größte Anteil an der Berechnungszeit wird bei der Berechnung des Newtonpotentials benötigt. Da sich pro Verfeinerungsstufe die Anzahl der Randelemente vervierfacht und die Anzahl der Tetraeder verachtfacht, erhöht sich der Berechnungsaufwand für die Standardmethode pro Verfeinerungsstufe mit dem Faktor 32. Bei der Multipolmethode tritt dabei wie erwartet der Faktor 8 auf. Bereits in der zweiten Verfeinerungsstufe zeigt sich der Vorteil der Multipolmethode. In der letzten Verfeinerungsstufe würde die direkte Auswertung bereits ca. 32 Stunden benötigen das lineare Gleichungssystem aufzustellen, die Multipolmethode benötigt dafür nur ca. 10 Minuten.

3.5.2 Vergleich zwischen direkter und indirekter Auswertung von $N_1 f$

In Abschnitt 3.1 wurde zuerst die direkte Auswertung des Newtonpotentials $N_1 f$ besprochen. Weiters wurde in Abschnitt 3.2 eine alternative Methode zur indirekten Auswertung des Newtonpotentials $N_1 f$ vorgestellt. Diese beiden Methoden sollen nun verglichen werden. Dazu wird das gemischte Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -2 \qquad \text{für } x \in \Omega = (0,1)^3, \\ \gamma_0 u(x) &= g_D(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_D, \\ \gamma_1 u(x) &= g_N(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

der Poisson-Gleichung gelöst. Dabei wird als Dirichlet-Rand $\Gamma_D = \{(x,y,z)^T \in \partial\Omega : z = 0\}$ und als Neumann Rand $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ festgelegt. Als Lösung wurde $u(x,y,z) = x^2$ vorgegeben. Die Randdaten und die Funktion f wurden entsprechend gewählt. Ausgehend von einem global gleichmäßigem Netz wurde der Würfel gleichmäßig verfeinert. Das Randnetz ist die Einschränkung des Volumennetz auf den Rand. Das lineare Gleichungssystem (2.17) wurde mit dem GMRES-Verfahren gelöst. Zur Vorkonditionierung wird ein algebraischer BPX-Vorkonditionierer (ABPX) (vgl. [19]) für das Einfachschichtpotential und der Operator entgegengesetzter Ordnung (vgl. [13]) für den hypersingulären Operator verwendet. In der Tabelle 3.3 werden die Zeiten für das Aufstellen des linearen Gleichungssystems verglichen.

N_Γ	N_Ω	indirekte Auswertung			direkte Auswertung		
		$N_0 f$	$V_h \underline{w} = \underline{N}_0 f$	Gesamtzeit	$N_0 f$	$N_1 f$	Gesamtzeit
96	192	0	0	2	0	0	2
384	1536	1	0	5	0	3	7
1536	12288	6	2	18	1	15	25
6144	98304	31	8	74	6	76	108
24576	789432	241	48	445	15	590	735
98304	6291456	1168	397	2160	243	2880	3608

Tabelle 3.3: Vergleich zwischen direkter und indirekter Auswertung

In der ersten Spalte werden mit N_Γ die Anzahl der Elemente der Randdiskretisierung angeführt. Mit N_Ω wird die Anzahl der Elemente im Volumen angegeben. Danach werden zuerst die Ergebnisse der indirekten Auswertung und im Anschluß die Ergebnisse der direkten Auswertung angeführt. Dabei wird jeweils die Gesamtzeit für das Aufstellen des linearen Gleichungssystems angegeben. Zusätzlich werden die Zeiten für das Auswerten des Newtonpotentials $N_0 f$ und die Zeit für die Berechnung des linearen Gleichungssystems $V_h \underline{w} = \underline{N}_0 f$ angegeben. Bei der direkten Auswertung wird die Zeit für die direkte Auswertung der Newtonpotentiale $N_0 f$ und $N_1 f$ extra angegeben. Zusätzlich scheint in der Gesamtzeit noch die Zeit für das Aufstellen sämtlicher Randintegraloperatoren und die Zeit für die Berechnung der Vorkonditionierung auf. Vergleicht man die beiden Methoden, ergibt sich bei der Gesamtzeit ein deutlicher Zeitvorsprung für die indirekte Methode. Im Falle der direkten Auswertung muss das Newtonpotential $N_0 f$ für den Dirichlet-Rand ausgewertet werden und das Newtonpotential $N_1 f$ auf dem Neumann-Rand. Anstelle der Berechnung von $N_1 f$ wird bei der indirekten Auswertung das Newtonpotential $N_0 f$ auch auf dem Neumann-Rand ausgewertet. Die Auswertung des Newtonpotentials $N_0 f$ ist jedoch wesentlich günstiger, unter anderem deswegen, weil nur eine Formfunktion pro Element berechnet werden muss, während beim Newtonpotential $N_1 f$ drei Formfunktionen zu berechnen sind. Bei der indirekten Auswertung ist noch zusätzlich das Gleichungssystem $V_h \underline{w} = \underline{N}_0 f$ zu lösen. Außerdem kommt noch ein höherer Berechnungsaufwand durch das Aufstellen der vergrößerten Matrizen V_h und K_h' hinzu. Dieser zusätzliche Aufwand fällt jedoch verhältnismäßig wenig ins Gewicht, was die schnellere Gesamtzeit für die indirekte Auswertung erklärt.

N_Γ	N_Ω	indirekte Auswertung		direkte Auswertung	
		$\lVert\tilde{u} - \tilde{u}_h\rVert_{L_2(\Gamma)}$	$\lVert\tilde{t} - \tilde{t}_h\rVert_{L_2(\Gamma)}$	$\lVert\tilde{u} - \tilde{u}_h\rVert_{L_2(\Gamma)}$	$\lVert\tilde{t} - \tilde{t}_h\rVert_{L_2(\Gamma)}$
96	192	5.83e-02	1.55e-01	5.65e-02	1.55e-01
384	1536	1.47e-02	8.15e-02	1.43e-02	8.17e-02
1536	12288	3.70e-03	4.17e-02	3.60e-03	4.18e-02
6144	98304	9.27e-04	2.12e-02	8.95e-04	2.16e-02
24576	789432	2.35e-04	1.06e-02	2.28e-04	1.06e-02
98304	6291456	5.93e-05	5.32e-03	5.72e-05	5.33e-03

Tabelle 3.4: Vergleich der Approximationsfehler

Weiters werden in der Tabelle 3.4 die Approximationsfehler der beiden Zugänge verglichen. Zuerst werden wieder die Anzahl der Elemente der Randdiskretisierung und danach die Anzahl der Elemente der Volumendiskretisierung angegeben. Danach wird der Dirichlet- und der Neumann-Fehler zuerst der indirekten Auswertung und im Anschluss der direkten Auswertung angegeben. Die Fehler verhalten sich wie in den Fehlerabschätzungen (3.36) und (3.35) vorhergesagt. Während sich der Dirichlet-Fehler viertelt, halbiert sich der Neumann-Fehler. Der Neumann-Fehler unterscheidet sich bei beiden Methoden kaum. Der schlechtere Dirichlet-Fehler der indirekten Auswertung erklärt sich durch den zusätzlichen Approximationsfehler, der durch die Approximation von w durch $w_h \in S_h^0(\Gamma)$ auftritt.

4 Behandlung der Newtonpotentiale des Systems der linearen Elastostatik

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels auf das System der linearen Elastostatik übertragen. Dabei können mit einigen Modifikationen die erhaltenen Verfahren für die Auswertung der Newtonpotentiale für die Poisson-Gleichung wiederverwendet werden, um eine Auswertung der Newtonpotentiale $N_0^E f$ und $N_1^E f$ des Systems der linearen Elastostatik zu erhalten. Zur leichteren Lesbarkeit werden im folgenden Kapitel die Randintegraloperatoren V_E, K_E, K'_E und D_E der linearen Elastostatik gesondert gekennzeichnet. Für den Approximationsfehler der Multipolmethode werden entsprechende Fehlerabschätzungen angegeben und schlußendlich werden die theoretischen Resultate durch numerische Ergebnisse bestätigt.

4.1 Direkte Auswertung

Für die direkte Auswertung des Newtonpotentials $N_0^E f$ wird wie im Falle der Poisson-Gleichung vorgegangen. Für $k = 1, \ldots, 3$ und $j = 1, \ldots, N_{\Gamma_D}$ gilt

$$((N_0^E f)_k)_j = \int_{\Gamma_D} \varphi_j^0(x) \int_\Omega \sum_{\ell=1}^{3} U^*_{k\ell}(x,y) f_\ell(y) dy ds_x.$$

Wie in Abschnitt 3.1 wird zuerst die Integration im Volumen auf die einzelnen Tetraeder aufgeteilt, anschließend die Integrationsreihenfolge vertauscht und schließlich das Volumenintegral durch eine numerische Interation approximiert. Da es sich wie im Falle der Poisson-Gleichung um ein schwach singuläres Integral handelt, ist die Vertauschung der

Integrationsreihenfolge möglich. Somit folgt

$$\begin{aligned}((N_0^E f)_k)_j &= \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{\Gamma_D} \varphi_j^0(x) \int_{T_i} \sum_{\ell=1}^{3} U_{k\ell}^*(x,y) f_\ell(y) dy ds_x \\ &= \sum_{i=1}^{N_\Omega} \sum_{\ell=1}^{3} \int_{T_i} f_\ell(y) \int_{\Gamma_D} U_{k\ell}^*(x,y) \varphi_j^0(x) ds_x dy \\ &\approx \sum_{i=1}^{N_\Omega} \sum_{\ell=1}^{3} 6\Delta_i \sum_{n=1}^{q} f_\ell(y_n^i) \int_{\Gamma_D} U_{k\ell}^*(x, y_n^i) \varphi_j^0(x) ds_x.\end{aligned}$$

Das verbleibende Oberlächenintegral tritt auch bei der Berechnung des Einfachschichtpotentials der linearen Elastostatik angewandt auf konstante Ansatzfunktionen auf und kann analytisch berechnet werden (siehe [16]). Somit ergibt sich als Näherungsformel für die Auswertung des Newtonpotentials $N_0^E f$ für $j = 1, \ldots, 3$ und $\ell = 1, \ldots, N_{\Gamma_D}$

$$((N_0^E f)_k)_j \approx \sum_{i=1}^{N_\Omega} \sum_{\ell=1}^{3} 6\Delta_i \sum_{h=1}^{q} f_\ell(y_n^i) \int_{\Gamma_D} U_{k\ell}^*(x, y_n^i) \varphi_j^0(x) ds_x. \tag{4.1}$$

Für die Berechnung des Newtonpotentials $N_1^E f$ wird der direkte Zugang nicht realisiert, sondern es wird wie für die Poisson-Gleichung die alternative Darstellung (3.4) verwendet

Lemma 4.1. *Für das Volumenpotential $(N_1^E f)(x), x \in \Gamma$, gilt die Darstellung*

$$(N_1^E f)(x) = (-\frac{1}{2} I + K_E') V_E^{-1} (N_0^E f)(x). \tag{4.2}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Lemmas 3.1. □

Analog wie für die Poisson-Gleichung wird $V_E^{-1}(N_0^E f)$ durch $w_h \in S_h^0(\Gamma)$ angenähert. Zu berechnen bleibt dann

$$\underline{\tilde{N}}_1^E f = (-\frac{1}{2} M_h^E + K_h^{E'}) \underline{w}$$

mit $\underline{w}$ als Lösung des Gleichungssystems

$$V_h^E \underline{w} = \underline{N}_0 f.$$

Dabei gilt für den Approximationsfehler analog zu Abschätzung (3.9) in Abschnitt 3.2.1

$$\|N_1^E f - \tilde{N}_1^E f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c h^{s+1/2} |w|_{H^s(\Gamma)}.$$

Durch das Lemma von Strang ergibt sich für die Variationsformulierung unter Annahme eines glatten Randes und einer hinreichend glatten Lösung die Abschätzung

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq c h^3 \{ |\tilde{u}|_{H^2(\Gamma)}^2 + |\tilde{t}|_{H_{pw}^1(\Gamma)}^2 + \|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}^2 \}.$$

4.2 Realisierung der Newtonpotentiale mit der Multipolmethode

Um die Realisierung der Operatoren des Systems der linearen Elastostatik durch die Multipolmethode auf die Realisierung der Operatoren im Falle der Poisson-Gleichung zurückführen zu können, wird die Fundamentallösung des Systems der linearen Elastostatik

$$U^*_{k\ell}(x,y) = \frac{1+\nu}{8\pi E(1+\nu)}\left[(3-4\nu)\frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} + \frac{(x_k-y_k)(x_\ell-y_\ell)}{|x-y|^3}\right]$$

durch die Fundamentallösung der Poisson-Gleichung und deren partiellen Ableitungen dargestellt. Verwendet man die Eigenschaft

$$-x_\ell\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-y|} - y_\ell\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{|x-y|} = x_\ell\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3} - y_\ell\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3} = \frac{(x_\ell-y_\ell)(x_k-y_k)}{|x-y|^3},$$

so ergibt sich

$$U^*_{k\ell}(x,y) = \frac{1+\nu}{8\pi E(1+\nu)}\left[(3-4\nu)\frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} - \frac{1}{2}x_\ell\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2}y_\ell\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{|x-y|}\right].$$

Diese Darstellung garantiert jedoch die Symmetrie der Multipol-Approximation nur innerhalb eines Blocks. Um die Symmetrie zwischen den einzelnen Blöcken sicherzustellen, wird die Darstellung des Blocks mit vertauschten Indizes k und ℓ hinzuaddiert und das Ergebnis halbiert:

$$\begin{aligned}U^*_{k\ell}(x,y) = \frac{1+\nu}{8\pi E(1+\nu)}\Bigg[&(3-4\nu)\frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} - \frac{1}{2}x_\ell\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2}y_\ell\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{|x-y|}\\ &- \frac{1}{2}x_k\frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2}x_k\frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{1}{|x-y|}\Bigg].\end{aligned}$$

Die Symmetrie der Multipol-Approximation ist für die Auswertung der Newtonpotentiale unwichtig. Jedoch für die Realisierung der Randintegraloperatoren ist Symmetrie von Vorteil. Die Realisierung der selbstadjungierten Randintegraloperatoren für das System der linearen Elastostatik findet man z.B. in [14, 13]. Einsetzen dieser Darstellung der Fundamentallösung in das Newtonpotential $N_0^E f$ und Summation über ℓ ergibt für $k,\ell = 1,\dots,3$

$$\begin{aligned}(N_0^E f)_k(x) =& \frac{(1+\nu)}{2E(1-\nu)}\Bigg[(3-4\nu)\frac{1}{4\pi}\int_\Omega f_k(y)\frac{1}{|x-y|}dy\\ &-\sum_{\ell=1}^{3}\frac{1}{8\pi}\int_\Omega\left(x_\ell\frac{\partial}{\partial x_k} + x_k\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)\frac{1}{|x-y|}f_\ell(y)dy\\ &-\sum_{\ell=1}^{3}\frac{1}{8\pi}\int_\Omega\left(y_\ell\frac{\partial}{\partial y_k} + y_k\frac{\partial}{\partial y_\ell}\right)\frac{1}{|x-y|}f_\ell(y)dy\Bigg].\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ersetzt man den Kern

$$k(x,y) = \frac{1}{|x-y|} \approx k_p(x,y) = \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{n} \overline{S_n^m(y)} R_n^m(x)$$

durch die Multipolapproximation $k_p(x,y)$, so ergibt sich der durch die Multipolapproximation definierte Operator $\tilde{N}_0^E f$

$$\begin{aligned}(\hat{N}_0^E f)_k(x) =& \frac{(1+\nu)}{2E(1-\nu)} \Bigg[(3-4\nu) \frac{1}{4\pi} \int_\Omega f_k(y) k_p(x,y) dy \\ & - \sum_{\ell=1}^{3} \frac{1}{8\pi} \int_\Omega \left(x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) k_p(x,y) f_\ell(y) dy \\ & - \sum_{\ell=1}^{3} \frac{1}{8\pi} \int_\Omega \left(y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) k_p(x,y) f_\ell(y) dy \Bigg].\end{aligned} \tag{4.4}$$

Für die Auswertung der durch das Newtonpotentials $\tilde{N}_0^E$ induzierten Linearform ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\langle \hat{N}_0^E f, \tau \rangle_\Gamma =& \frac{(1+\nu)}{2E(1-\nu)} \Bigg[(3-4\nu) \sum_{k=1}^{3} \int_\Gamma \tau_k(x) \frac{1}{4\pi} \int_\Omega f_k(y) k_p(x,y) dy \\ & - \sum_{k=1}^{3} \int_\Gamma \tau_k(x) \sum_{\ell=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \left(x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) k_p(x,y) f_\ell(y) dy ds_x \\ & - \sum_{k=1}^{3} \int_\Gamma \tau_k(x) \sum_{\ell=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \left(y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) k_p(x,y) f_\ell(y) dy ds_x \Bigg].\end{aligned}$$

Durch Umformungen folgt

$$\begin{aligned}\langle \hat{N}_0^E f, \tau \rangle_\Gamma =& \frac{(1+\nu)}{2E(1-\nu)} \Bigg[(3-4\nu) \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{3} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{n} \int_\Gamma \tau_k(x) R_n^m(x) ds_x \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \int_{T_i} f_k(y) \overline{S_n^m}(y) dy \\ & - \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{3} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Gamma \tau_k(x) \left(x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) R_n^m(x) ds_x \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{T_i} f_\ell(y) \overline{S_n^m(y)} dy \\ & - \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{3} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Gamma \tau_k(x) R_n^m(x) ds_x \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{T_i} f_\ell(y) \left(y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) \overline{S_n^m(y)} dy \Bigg].\end{aligned}$$

Die ersten beiden Zeilen können zusammengefasst werden zu

$$\begin{aligned}\langle \hat{N}_0^E f, \tau\rangle_\Gamma = \frac{(1+\nu)}{2E(1-\nu)}\Bigg[\frac{1}{8\pi}\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{\ell=1}^{3}\int_\Gamma \tau_k\Bigg[2(3-4\nu)\delta_{k\ell} \\ -\left(x_\ell\frac{\partial}{\partial x_k}+x_k\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)\Bigg]R_n^m(x)ds_x\sum_{i=1}^{N_\Omega}\int_{T_i} f_\ell(y)\overline{S_n^m(y)}dy \\ -\frac{1}{8\pi}\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{\ell=1}^{3}\int_\Gamma \tau_k(x)R_n^m(x)ds_x\sum_{i=1}^{N_\Omega}\int_{T_i} f_\ell(y)\left(y_\ell\frac{\partial}{\partial y_k}+y_k\frac{\partial}{\partial y_\ell}\right)\overline{S_n^m(y)}dy\Bigg].\end{aligned}$$

Diese Darstellung approximiert das Newtonpotential $N_0^E f$ nur für bestimmte x und y. Die Auswertung des Newtonpotentials $N_0^E f$ muss daher in ein Nah- und ein Fernfeld unterteilt werden:

$$\begin{aligned}((N_0^E f)_k)_j = \sum_{i\in\mathrm{NF}(j)}\int_{\Gamma_D}\varphi_j^0(x)\int_{T_i}\sum_{\ell=1}^{3}U_{k\ell}^*(x,y)f_\ell(y)dyds_x \\ +\sum_{i\in\mathrm{FF}(j)}\int_{\Gamma_D}\varphi_j^0(x)\int_{T_i}\sum_{\ell=1}^{3}U_{k\ell}^*(x,y)f_\ell(y)dyds_x.\end{aligned}$$

Die Summe über das Nahfeld kann näherungsweise mittels (4.1) berechnet werden. Für das Fernfeld kann die Multipol-Approximation für $\hat{N}_0^E f$ verwendet werden. Es gilt

$$\begin{aligned}((N_0^E f)_k)_j \approx \sum_{i\in\mathrm{NF}(j)}\sum_{\ell=1}^{3}6\Delta_i\sum_{n=1}^{q}f_\ell(y_n^i)\int_\Gamma U_{k\ell}^*(x,y_h^i)\varphi_j^0(x)ds_x \\ +\frac{(1+\nu)}{2E(1-\nu)}\Bigg[\frac{1}{8\pi}\sum_{\ell=1}^{3}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=-n}^{n}\int_\Gamma\varphi_j^0(x)\Bigg[2(3-4\nu)\delta_{k\ell} \\ -\left(x_\ell\frac{\partial}{\partial x_k}+x_k\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)\Bigg]R_n^m(x)ds_x\sum_{i\in\mathrm{FF}(j)}\int_{T_i}f_\ell(y)\overline{S_n^m(y)}dy \\ -\frac{1}{8\pi}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=-n}^{n}\int_\Gamma\varphi_j^0(x)R_n^m(x)ds_x\sum_{i\in\mathrm{FF}(j)}\int_{T_i}\sum_{\ell=1}^{3}f_\ell(y)\left(y_\ell\frac{\partial}{\partial y_k}+y_k\frac{\partial}{\partial y_\ell}\right)\overline{S_n^m(y)}dy\end{aligned}$$

für $k = 1,\ldots,3$ und $j = 1,\ldots,N_{\Gamma_D}$. Diese Summe kann mithilfe der Multipolmethode effizient berechnet werden. Das Newtonpotential $N_0^E f$ kann dabei mit sechs Multipolaufrufen und neun Multipolauswertungen realisiert werden. Dabei müssen bei der Multipolmethode aus Abschnitt 3.3.1 folgende Koeffizienten geändert werden. Beim Aufruf der Multipolmethode muss bei den Koeffizienten (3.19)

$$\hat{M}_n^m(C_j^\lambda,k) = \int_{T_k}\omega_1 R_n^m(x)dx$$

der Faktor ω_1 ensprechend variiert werden. Bei der Auswertung (3.14) muss bei den Koeffizienten (3.13)

$$M_n^m(O,\ell) = \int_{\Gamma_D} \varphi_\ell^0(x)\omega_2 R_n^m(x) ds_x$$

der Faktor ω_2 angepasst werden. Die entsprechenden Faktoren werden in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Aufruf	Auswertung		
ω_1	ω_2 für $\ell = 1$	ω_2 für $\ell = 2$	ω_2 für $\ell = 3$
f_1	$\mathcal{K}_{1,1}$	$\mathcal{K}_{1,2}$	$\mathcal{K}_{1,3}$
f_2	$\mathcal{K}_{2,1}$	$\mathcal{K}_{2,2}$	$\mathcal{K}_{2,3}$
f_3	$\mathcal{K}_{3,1}$	$\mathcal{K}_{3,2}$	$\mathcal{K}_{3,3}$
$w^1(f,x)\cdot\nabla$	$-\frac{\alpha}{2}$		
$w^2(f,x)\cdot\nabla$		$-\frac{\alpha}{2}$	
$w^3(f,x)\cdot\nabla$			$-\frac{\alpha}{2}$

Tabelle 4.1: Realisierung des Newtonpotentials $N_0^E f$

Dabei ist die Konstante α und der Operator $\mathcal{K}_{k\ell}$ gegeben durch

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}\frac{(1+\nu)}{2E(1-\nu)}$$

und

$$\mathcal{K}_{k,\ell}(x) = \alpha(3-4\nu)\delta_{k\ell}\varphi_j^0(x) - \frac{\alpha}{2}\varphi_j^0(x)\left(x_k\frac{\partial}{\partial x_\ell} + x_\ell\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

Die Vektoren $w^{(k)}(t,x)$ besitzen für $j = 1,\ldots,3$ die Komponenten

$$w_j^{(k)}(t,x) = y_k f_j(x) + \delta_{jk}\sum_{\ell=1}^{3} y_\ell f_\ell(x).$$

Für die Realisierung des Newtonpotentials $N_1^E f$ wird die alternative Darstellung (4.2) verwendet. Da neben dem Newtonpotential $N_0^E f$ auch die Anwendung der Randintegraloperatoren V_E und K_E' mithilfe der Multipolmethode realisiert werden können (vgl. [13]), kann auch das Newtonpotential $N_1^E f$ effizient berechnet werden.

4.3 Fehlerabschätzungen

Wie für die Poisson-Gleichung ist auch für das System der linearen Elastostatik der Approximationsfehler zu untersuchen. Es werden zuerst Approximationsabschätzungen für die durch die Multipolmethode definierten Randintegraloperatoren hergeleitet. Die Parameter der Multipolmethode sind der Clusterradius r, der Nahfeldparameter d und der

Entwicklungsgrad p. Für die weiteren Betrachtungen vergleiche Abschnitt 3.3.1. Folgende Fehlerabschätzungen sind hilfreich.

Lemma 4.2. *Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $|x| \leq r, |y| \geq dr$ mit $d > 1$ und $r > 0$ gilt die folgende Fehlerabschätzung für eine spezielle Richtungsableitung $|x|w \cdot \nabla_x$ mit $|w| \neq 0$ der Differenz $k(x,y) - k_p(x,y)$ des Potentials $k(x,y)$ und seiner lokalen Entwicklung $k_p(x,y)$:*

$$\Big| |x| w \cdot \nabla_x (k(x,y) - k_p(x,y)) \Big| \leq |w| \frac{1+\pi}{(d-1)r} \left(p + 1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+1}, \tag{4.5}$$

$$\Big| |y| w \cdot \nabla_y (k(x,y) - k_p(x,y)) \Big| \leq |w| \frac{1+\pi}{(d-1)r} \left(p + 1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+2}. \tag{4.6}$$

Beweis. Siehe [13] □

Satz 4.3. *Für eine global gleichmäßige Randdiskretisierung und einen Multipolentwicklungsgrad $p \backsim \log N_\Gamma$ gelten die folgenden Fehlerabschätzungen für die Approximation der Randintegraloperatoren der linearen Elastostatik*

$$\begin{aligned}
\|(V_E - \tilde{V}_E)t\|_{L_2(\Gamma)} &\leq c_{\tilde{V}_E} h^2 \|t\|_{L_2(\Gamma)} \\
\|(K_E - \tilde{K}_E)u\|_{L_2(\Gamma)} &\leq c_{\tilde{K}_E} h^2 \|u\|_{H^1(\Gamma)} \\
|\langle (K_E' - \tilde{K}_E')t, v\rangle_\Gamma| &\leq c_{\tilde{K}_E'} h^2 \|t\|_{L_2(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Gamma)} \\
|\langle (D_E - \tilde{D}_E)u, v\rangle_\Gamma| &\leq c_{\tilde{D}_E} h^2 \|u\|_{H^1(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Gamma)}
\end{aligned}$$

für alle $t \in L_2(\Gamma), u \in H^1(\Gamma), v \in H^1(\Gamma)$.

Beweis. siehe [13, 14]. □

Satz 4.4. *Für eine global gleichmäßige Randdiskretisierung und einen Multipolentwicklungsgrad $p \backsim \log N_\Gamma$ gilt die folgende Fehlerabschätzung für die Multipolapproximation $\tilde{N}_0^E$ des Newtonpotentials der linearen Elastostatik:*

$$\|(N_0^E - \tilde{N}_0^E)f\|_{L_2(\Gamma)} \leq c h_{\tilde{N}_0}^2 \|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{4.7}$$

Beweis. Betrachtet man die L_2-Norm der Differenz der Darstellung (4.3) und (4.4), so erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \int_\Gamma \Big| (N_0^E t)_k(x) - (\tilde{N}_0^E t)_k(x) \Big|^2 ds_x \\
\leq \frac{3(1+\nu)^2}{4E^2(1-\nu)^2} \sum_{k=1}^{3} \int_\Gamma \Big((3-4\nu)^2 |(N_0 f_k)(x) - (\tilde{N}_0 f_k)(x)|^2 \\
+ \frac{1}{4\pi} |W_k^1(x) - \widetilde{W}_k^1(x)|^2 + \frac{1}{4\pi} |W_k^2(x) - \widetilde{W}_k^2(x)|^2 \Big) ds_x
\end{aligned} \tag{4.8}$$

mit

$$\begin{aligned} W_k^1(x) &= \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Omega \left(x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) k(x,y) f_\ell(y) dy, \\ \widetilde{W}_k^1(x) &= \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Omega \left(x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) k_p(x,y) f_\ell(y) dy \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} W_k^2(x) &= \sum_{\ell=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \left(y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) k(x,y) f_\ell(y) dy, \\ \widetilde{W}_k^2(x) &= \sum_{\ell=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \left(y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) k_p(x,y) f_\ell(y) dy. \end{aligned}$$

Für die Approximation des Newtonpotentials $N_0 f$ der Poisson-Gleichung kann die Abschätzung (3.28) verwendet werden. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{3} (3-4\nu)^2 \|(N_0 f - \tilde{N}_0) f\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq c_{\tilde{N}} (3-4\nu)^2 h^4 \sum_{k=1}^{3} \|f\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Für den zweiten Teil ergibt sich

$$\begin{aligned} |W_k^1(x) - \widetilde{W}_k^1(x)| &= \left| \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Omega \left(x_\ell \frac{\partial}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) (k(x,y) - k_p(x,y)) f_\ell(y) dy \right| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Omega \Big| |x| w \cdot \nabla_x (k(x,y) - k_p(x,y)) f_\ell(y) \Big| dy \end{aligned}$$

mit dem Vektor $w \in \mathbb{R}^3$, wobei

$$w_i = \delta_{ik} \frac{x_\ell}{|x|} + \delta_{i\ell} \frac{x_k}{|x|}.$$

Durch Anwendung von (4.5) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} |W_k^1(x) - \tilde{W}_k^1(x)| &\leq |w| \frac{1+\pi}{(d-1)r} \left(p + 1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+1} \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Omega |f_\ell(y)| dy \\ &\leq |w| \frac{1+\pi}{(d-1)r} \left(p + 1 + \frac{d}{d-1} \right) \left(\frac{1}{d} \right)^{p+1} |\Omega|^{1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für den letzen Teil gilt analog

$$\begin{aligned} |W_k^2(x) - \tilde{W}_k^2(x)| &= \left| \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Omega \left(y_\ell \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) (k(x,y) - k_p(x,y)) f_\ell(y) dy \right| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Omega ||x| w \cdot \nabla_y (k(x,y) - k_p(x,y)) f_\ell(y)| \, dy \end{aligned}$$

mit dem Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ mit

$$w_i = \delta_{ik}\frac{y_\ell}{|y|} + \delta_{i\ell}\frac{y_k}{|y|}.$$

Durch Anwenden von Abschätzung (4.6) und der Cauchy-Schwarz Ungleichung ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}|W_k^2(x) - \widetilde{W}_k^2(x)| \leq & |w|\frac{1+\pi}{(d-1)r}\left(p+1+\frac{d}{d-1}\right)\left(\frac{1}{d}\right)^{p+2}\sum_{\ell=1}^{3}\int_\Omega |f_\ell(y)|dy \\ \leq & |w|\frac{1+\pi}{(d-1)r}\left(p+1+\frac{d}{d-1}\right)\left(\frac{1}{d}\right)^{p+2}|\Omega|^{1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Wegen $p \sim \log N_\Gamma$ existiert eine Konstante, sodass gilt

$$\frac{1}{(d-1)}\left(p+1+\frac{d}{d-1}\right)\left(\frac{1}{d}\right)^{p+1} \leq ch^3.$$

Für den Clusterradius r gilt $r \geq ch$ und somit erhält man

$$|W_k^1(x) - \widetilde{W}_k^1(x)| \leq c_1 h^2\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

und

$$|W_k^2(x) - \widetilde{W}_k^2(x)| \leq c_2 h^2\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Für den L_2-Fehler der Approximation erhält man schlußendlich

$$\begin{aligned}\|(N_0^E - \tilde{N}_0^E)f\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq & \frac{3(1+\nu)^2}{4E^2(1-\nu)^2}c_{\tilde{N}}h^4\|f\|^2_{L_2(\Omega)} \\ & + \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma c_1h^4\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + c_2h^4\|f\|^2_{L_2(\Omega)}ds_x \leq ch^4\|f\|^2_{L_2(\Omega)},\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Satz 4.5. *Für eine global gleichmäßige Randdiskretisierung, einen glatten Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und einen Multipolentwicklungsgrad $p \backsim \log N_\Gamma$ gilt die folgende Fehlerabschätzung für die Approximation $\tilde{N}_1^E f$ des Newtonpotentials der linearen Elastostatik durch die alternative Darstellung (3.4):*

$$\|(N_1^E - \tilde{N}_1^E)f\|_{L_2(\Gamma)} \leq ch^{3/2}\|f\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Beweis. Da für sämtliche Operatoren der linearen Elastostatik dieselben Fehlerabschätzungen wie für die Operatoren der Poisson-Gleichung gelten, kann der Beweis analog zum Beweis von Lemma 3.6 geführt werden. □

Satz 4.6. *Seien t und u die eindeutigen Lösungen der Variationsformulierung (2.4). Sei $p \sim \log N_\Gamma$ und die Vernetzung gleichmäßig. Dann gilt für die Näherungslösungen $\tilde{t}, \tilde{u}$ der Multipolmethode die Fehlerabschätzung*

$$\|t-\tilde{t}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u-\tilde{u}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c\left(h^{2\rho+1}\|t\|^2_{H^\rho_{pw}(\Gamma)} + h^{2\mu-1}\|u\|^2_{H^\mu(\Gamma)} + h^3\|f\|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\Omega)}\right)$$

falls $t \in H^\rho_{pw}(\Gamma)$ und $u \in H^\mu(\Gamma)$ mit $0 \leq \rho \leq 1$ und $1 \leq \mu \leq 2$.

Beweis. Da für sämtliche Operatoren der linearen Elastostatik entsprechende Abschätzungen wie für die Operatoren der Poisson-Gleichung gelten, kann der Beweis analog zum Beweis des Satzes 3.7 geführt werden. □

4.4 Numerische Beispiele

4.4.1 Vergleich: direkte Auswertung - Multipolmethode

In folgendem numerischen Beispiel wird die Anwendung der Multipolmethode mit dem Standard-Randelementverfahren mit direkter Auswertung des Newtonpotentials verglichen. Für $\Omega = (0,1)^3$ wird das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u,x) &= f_i(x) \quad \text{für } x \in \Omega,\ i = 1, \dots, 3 \\
\gamma_0 u(x) &= g_D(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_D, \\
\gamma_1 u(x) &= g_N(x) \qquad \text{für } x \in \Gamma_N,
\end{aligned}
$$

gelöst. Dabei wird als Dirichlet Rand $\Gamma_D = \{(x,y,z)^T \in \partial\Omega : z = 0\}$ und als Neumann Rand $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ vorgegeben. Als Lösung wird zunächst $u(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)^T$ vorgegeben und die Cauchy-Daten und die Volumenfunktion $f(x)$ entsprechend bestimmt. Der Würfel wird gleichmässig verfeinert. Das resultierende Gleichungssystem (2.17) wird mit dem GMRES-Verfahren gelöst. Zur Vorkonditionierung wird ein algebraischer BPX-Vorkonditionierer (ABPX) (vgl. [19]) für das Einfachschichtpotential und der Operator entgegengesetzter Ordnung (vgl. [21]) für den hypersingulären Operator verwendet. Die verschiedenen Blöcke wurden mittels der Eigenwerte entsprechend skaliert.
In Tabelle 4.2 werden die erhaltenen Werte zusammengefasst. Dabei werden jeweils zuerst die Ergebnisse der Standard-Randelementmethode und in der darauffolgenden Zeile die Ergebnisse der Multipolmethode angegeben.
In der ersten und zweiten Spalte sind die Anzahl der Randelemente bzw. Volumenelemente angegeben. Die Zeit zum Auswerten des Newtonpotentials $N_0 f$ wurde in einer eigenen Spalte angegeben. Darauf folgt die benötigte Zeit zum Aufstellen des linearen Gleichungssystems. Diese Zeit inkludiert die Zeit zum Auswerten des Newtonpotentials $N_0 f$, dem Aufstellen sämtlicher Randintegraloperatoren, dem Berechnen von $N_1 f$ und dem Erstellen sämtlicher Vorkonditionierer. Im Anschluss folgt die Zeit, die für das Lösen benötigt wird, gefolgt von der Anzahl der benötigten Iterationsschritte. Schlußendlich wird der Approximationsfehler der Dirichlet- und der Neumann-Daten in der $L_2(\Gamma)$-Norm angegeben.
Das Berechnen der beiden letzten Level war mit der Standard-Randelementmethode nicht möglich, der Arbeitsspeicher reichte nicht mehr aus. Wie erwartet steigt die Zeit zum Berechnen des Newtonpotentials $N_0 f$ am schnellsten. Dabei erhöht sich die Zeit bei der Standard-Randelementmethode mit Faktor 32. Dies führt dazu, dass bereits bei Level $L = 4$ mit 6144 Randelementen der Aufwand zur Berechnung des Newtonpotentials $N_0 f$ bei der Standard-Randelementmethode bei über zwei Stunden liegt und somit theoretisch bei dem

N_Γ	N_Ω	$N_0 f$	Aufst.	Lösen	it	$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L_2(\Gamma)}$	$\|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{L_2(\Gamma)}$
96	192	1	2	0	30	1.74e-01	1.22e+02
		0	3	2	30	1.74e-01	1.22e+02
384	1536	8	22	1	34	5.11e-02	6.14e+01
		3	16	9	34	5.12e-02	6.14e+01
1536	12288	249	462	14	39	1.50e-02	3.07e+01
		19	78	49	39	1.50e-02	3.08e+01
6144	98304	8032	11509	352	43	4.29e-03	1.54e+01
		113	491	356	43	4.33e-03	1.54e+01
24576	786432						
		991	3354	2274	50	1.21e-03	7.70e+00
98304	6291456						
		23696	29541	3859	53	3.72e-04	3.90e+00

Tabelle 4.2: Vergleich: direkte Auswertung - Multipolmethode.

darauffolgenden Level bei ca. drei Tagen liegen würde. Mithilfe der Multipolmethode kann jedoch für $L = 4$ das Newtonpotential $N_0 f$ innerhalb von zwei Minuten und in Level fünf in ca. 16 Minuten gelöst werden. Dabei ist der Unterschied im Approximationsfehler vernachlässigbar.
Der Fehler der Neumann-Daten halbiert sich wie erwartet. Der Dirichlet-Fehlers verringert sich für dieses Beispiel ca. mit Faktor 3.4 und nicht 4, wie vielleicht zu erwarten ist. Dabei scheint die Berechnung des Newtonpotentials $N_1 f$ über die alternative Darstellung die Konvergenzordnung zu drücken. Satz 4.5 setzt nämlich einen glatten Rand vorraus und diese Bedingung ist im Falle des Würfels nicht erfüllt.

5 Elektromechanische Kopplung

Durch Auswertung der Newtonpotentiale können sowohl die Poisson-Gleichung als auch das inhomogene System der linearen Elastostatik mit Hilfe der Randelementmethode effizient behandelt werden. Jedoch wird dabei auf einen wesentlichen Vorteil der Randelementmethode verzichtet. Das Problem wird nicht mehr ausschließlich auf dem Rand betrachtet, sondern es wird ein Volumennetz zur Auswertung der Newtonpotentiale benötigt. Außerdem ist der Aufwand zur Auswertung eines Volumenpotentials höher, als der Aufwand für die Auswertung eines Randpotentials. Gelingt es also, das Newtonpotential auf ein Oberflächenintegral zurückzuführen, kann also nicht nur das Volumennetz vermieden werden, es kann auch der Berechnungsaufwand verringert werden. Im folgenden wird nun eine Methode vorgestellt, wie für eine spezielle Wahl der Volumenfunktion f das Newtonpotential auf ein Randintegral zurückgeführt werden kann. Diese Methode wird im folgenden auf die elektromechanische Kopplung angewandt.

5.1 Herleitung einer reduzierten Darstellung des Newtonpotentials

Sei $f(x)$ der inhomogene Anteil der Poisson-Gleichung (1.1),

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Folgende Eigenschaft der Fundamentallösung lässt sich durch Differenzieren leicht überprüfen.

$$\Delta_y \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{|x-y|} \quad \text{für } x \neq y. \tag{5.1}$$

Satz 5.1. *Sei f eine harmonische Funktion in Ω. Dann gilt folgende Darstellung für das Newtonpotential $\tilde{N}_0 f$ der Poisson-Gleichung:*

$$(\tilde{N}_0 f)(x) = \frac{1}{8\pi}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y}|x-y| f(y) ds_y - \frac{1}{8\pi}\int_\Gamma |x-y|\frac{\partial}{\partial n_y} f(y) ds_y \quad \textit{für } x \in \Omega.$$

Beweis. Für das Newtonpotential $\tilde{N}_0 f$ gilt die Darstellung

$$(\tilde{N}_0 f)(x) = \int_\Omega U^*(x,y) f(y) dy = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|} f(y) dy \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Durch Einsetzen der Beziehung (5.1) folgt

$$(\tilde{N}_0 f)(x) = \frac{1}{8\pi} \int_\Omega \Delta_y |x-y| f(y) dy \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Weiters ergibt die zweite Greensche Formel (1.8)

$$(\tilde{N}_0 f)(x) = \frac{1}{8\pi} \int_\Omega |x-y| \Delta f(y) dy + \frac{1}{8\pi} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} |x-y| f(y) ds_y - \frac{1}{8\pi} \int_\Gamma |x-y| \frac{\partial}{\partial n_y} f(y) ds_y.$$

Wegen $\Delta f(y) = 0$ für $y \in \Omega$ wird das Volumenintegral zu Null und es ergibt sich die Aussage des Satzes. □

Um diesen Satz auf das System der linearen Elastostatik übertragen zu können, muss zuerst eine zu (5.1) äquivalente Aussage für die Fundamentallösung des Systems der linearen Elastostatik gefunden werden. Die Fundamentallösung der linearen Elastostatik lautet

$$U^*_{k\ell}(x,y) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[(3-4\nu) \frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} + \frac{(x_k-y_k)(x_\ell-y_\ell)}{|x-y|^3} \right] \quad \text{für } k,\ell = 1,\ldots,3.$$

Für $k \neq \ell$ und $x \neq y$ gilt

$$\Delta_y \left[-\frac{1}{4} \frac{(x_\ell-y_\ell)(x_k-y_k)}{|x-y|} \right] = \frac{(x_\ell-y_\ell)(x_k-y_k)}{|x-y|^3},$$

und für $k = \ell$ und $x \neq y$ gilt

$$\Delta_y \left[\frac{1}{4} \frac{(x_\ell-y_\ell)^2}{|x-y|} + \frac{1}{4} |x-y| \right] = \frac{1}{|x-y|} - \frac{(x_\ell-y_\ell)^2}{|x-y|^3}.$$

Somit ergibt sich für die Fundamentallösung der linearen Elastostatik folgende Beziehung

$$U^*_{k\ell}(x,y) = \Delta_y V_{k\ell}(x,y) \quad \text{für } k,\ell = 1,\ldots,3 \quad \text{und } x \neq y. \tag{5.2}$$

Satz 5.2. *Erfüllt die Volumenfunktion f komponentenweise die Laplace-Gleichung, so gilt für $x \in \Omega$ folgende Darstellung für das Newtonpotential $N_0^E f$ des Systems der linearen Elastostatik*

$$(N_0^E f)_\ell = \int_\Gamma \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial n_y} V_{k\ell}(x,y) f_k(y) ds_y - \int_\Gamma \sum_{k=1}^3 V_{k\ell}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} f_k(y) ds_y \quad \textit{für } \ell = 1,\ldots,3.$$

mit

$$V_{k\ell}(x,y) = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[(7-8\nu)|x-y| \delta_{k\ell} + \frac{(x_k-y_k)(x_\ell-y_\ell)}{|x-y|} \right] \quad \textit{für } k,\ell = 1,\ldots,3.$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis für Satz 5.1,

$$(N_0^E f)_k = \int_\Omega \sum_{\ell=1}^{3} U_{k\ell}^*(x,y) f_\ell(y) dy = \sum_{\ell=1}^{3} \int_\Omega \Delta_y V_{k\ell}(x,y) f_\ell(y) dy \quad \text{für } k = 1, \ldots, 3.$$

Verwendet man die Beziehung (5.2) und die zweite Greensche Formel (1.8), so ergibt sich

$$\begin{aligned}(N_0^E f)_k = &\int_\Omega \sum_{\ell=1}^{3} V_{k\ell}(x,y) \Delta_y f_k(y) dy \\ &+ \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial}{\partial n_y} V_{k\ell}(x,y) f_k(y) ds_y - \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^{3} V_{k\ell}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} f_k(y) ds_y \quad \text{für } k = 1, \ldots, 3.\end{aligned}$$

Das Volumenintegral verschwindet und somit ergibt sich die Behauptung.

□

5.2 Elektromechanische Kopplung

Die Ergebnisse des vorherigen Kapitels sollen nun auf eine elektromechanische Kopplung angewandt werden. Gegeben sei ein elektrostatisches Feld $E(x)$, für welches die folgenden Eigenschaften gelten (vgl. [22])

$$\mathrm{curl} E(x) = 0, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon_r \varepsilon_0 E(x)) = \varrho(x), \tag{5.4}$$

mit der Ladungsdichte $\varrho(x)$, der relativen Permittivität $\varepsilon_r(x)$ und der Dielektrizitätskonstante ε_0. Laut (5.3) lässt sich E schreiben als $E = -\nabla\varphi$ und durch Einsetzen in (5.4) ergibt sich

$$-\mathrm{div}(\varepsilon_r \varepsilon_0 \nabla\varphi) = \varrho(x).$$

Unter der Annahme, dass ε_r in Ω einen konstanten Wert annimmt, ergibt sich weiters

$$-\Delta\varphi(x) = \frac{\varrho(x)}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{5.5}$$

Durch das elektrostatische Feld wird eine Kraft f im Gebiet Ω ausgeübt. Für diese Volumenkraft f gilt

$$f(x) = \varrho(x) E(x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Nimmt die Ladungsdichte $\varrho(x)$ in Ω einen konstanten Wert ϱ_Ω an, so ergibt sich für die Kraft mit (5.5)

$$\begin{aligned}\Delta(f(x))_k &= \varrho_\Omega \Delta(E(x))_k = \varrho_\Omega \Delta\left(-\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x)\right) \\ &= -\varrho_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta\varphi(x) = -\varrho_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\varrho_\Omega}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = 0.\end{aligned}$$

Somit sind die Voraussetzungen für Satz 5.2 erfüllt. Berechnet man also die Verformung des Gebietes Ω, die durch die Kraft $f(x)$ entsteht, mithilfe des Systems der linearen Elastostatik, kann das Newtonpotential $N_0^E f$ geschrieben werden als

$$(N_0^E f)_k = \varrho_\Omega \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial}{\partial n_y} V_{k\ell}(x,y) E_\ell(y) ds_y - \varrho_\Omega \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^{3} V_{k\ell}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_\ell(y) ds_y. \tag{5.6}$$

Für die Bilinearform erhält man

$$\begin{aligned} \langle N_0^E f, \tau \rangle = \int_\Gamma \sum_{k=1}^{3} \tau_k(x) \varrho_\Omega(x) \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial}{\partial n_y} V_{k\ell}(x,y) E_\ell(y) ds_y ds_x \\ - \int_\Gamma \sum_{k=1}^{3} \tau_k \varrho_\Omega \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^{3} V_{k\ell}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_\ell(y) ds_y ds_x. \end{aligned} \tag{5.7}$$

und für die Auswertung des Newtonpotentials $N_0^E f$ folgt

$$\begin{aligned} ((N_0^E f)_j)_k = \varrho_\Omega \Bigg[\int_\Gamma \varphi_j^0(x) \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial}{\partial n_y} V_{k\ell}(x,y) E_\ell(y) ds_y ds_x \\ - \int_\Gamma \varphi_j^0(x) \int_\Gamma \sum_{\ell=1}^{3} V_{k\ell}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_\ell(y) ds_y ds_x \Bigg] \end{aligned}$$

mit

$$V_{k\ell}(x,y) = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[(7-8\nu)|x-y|\delta_{k\ell} + \frac{(x_k - y_k)(x_\ell - y_\ell)}{|x-y|} \right] \quad \text{für } k,\ell = 1,\dots,3.$$

Für die Berechnung des Newtonpotentials $N_1^E f$ kann die alternative Darstellung (3.4) verwendet werden.

5.3 Numerische Beispiele

5.3.1 Vergleich der direkten Auswertung mit der Auswertung der reduzierten Darstellung

In folgendem Beispiel wird die Auswertung der reduzierten Darstellung (5.2) des Newtonpotentials $N_0^E f$ mit einer direkten Auswertung (4.1) des Newtonpotentials $N_0^E f$ verglichen. Als Gebiet wurde der Einheitswürfel $\Omega = (0,1)^3$ gewählt. Es wurde ein Dirichlet-Randwertproblem gelöst. Dabei muss das Newtonpotential $N_0 f$ für den gesamten Rand Γ aufgestellt werden. Als Lösung für das Randwertproblem wurde $u(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ vorgegeben. Für die Volumenfunktion $f(x)$ ergibt sich somit eine lineare Funktion, welche komponentenweise harmonisch ist, womit die Bedingung für Satz 5.2 erfüllt ist. Somit sind die beiden Auswertungen der Newtonpotentiale äquivalent. Um die Randintegraloperatoren der reduzierten Darstellung auszuwerten wurden als numerische Integrationsformeln die Siebenpunktformel für Dreiecke verwendet. Dadurch ergibt sich auch ein unterschiedlicher Approximationsfehler für beide Methoden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.1 aufgeführt.

N_Γ	N_Ω	$N_0 f$	Aufstellen	Lösen	#it	$\|t - t_h\|_{L_2(\Gamma)}$
24	24	0	1	0	22	3.52e+02
		0	1	1	23	3.51e+02
96	192	0	2	0	32	1.81e+02
		1	2	1	32	1.80e+02
384	1536	7	16	2	36	8.78e+01
		18	26	1	36	8.70e+01
1536	12288	253	356	16	38	4.22e+01
		281	384	16	38	4.16e+01
6144	98304	8012	9644	444	43	2.04e+01
		4465	6098	444	43	2.01e+01

Tabelle 5.1: Vergleich der direkten Auswertung des Newtonpotentials $N_0 f$ mit der Auswertung der reduzierten Darstellung des Newtonpotentials.

Dabei sind die Ergebnisse der direkten Auswertung jeweils zuerst und anschließend die Ergebnisse der Auswertung der reduzierten Darstellung angegeben. In der ersten und zweiten Spalte werden jeweils die Anzahl der Randelemente und der Volumenelemente angegeben. Im Anschluss folgt die Zeit für die Auswertung des Newtonpotentials $N_0 f$. Dabei zeigt sich, dass bei kleinen Beispielen die direkte Auswertung schneller ist. Dies lässt sich dadurch erklären, dass im Falle der direkten Auswertung ein Volumenpotential auszuwerten ist, während bei der reduzierten Darstellung zwei Randpotentiale auftreten. Außerdem wurden für die Randelemente numerische Integrationsformel mit höherer Ordnung verwendet. In der letzen Verfeinerungsstufe ist jedoch bereits die reduzierte Darstellung erheblich schneller. Wie erwartet steigt dabei der Aufwand der Auswertung für das Volumenpotential mit Faktor 32 während sich der Aufwand zur Berechnung des Randpotentials mit Faktor 16 erhöht. Vergleicht man den Approximationsfehler der Neumann-Fehler in der letzten Spalte, halbiert sich der Fehler pro Verfeinerungsstufe erwartungsgemäß. Der Approximationsfehler der Lösung berechnet durch die reduzierte Darstellung ist geringfügig besser. Hier zeigt sich die höhere Ordnung der numerischen Integrationsformeln.

5.3.2 Earthing Knife

Um auch ein nichtakademisches Beispiel zu betrachten, wurde ein gemischtes Randwertproblem mit dem Netz „Earthing Knife“ (Abbildung 5.1) gerechnet. Dieses Netz besteht aus 4130 Randelement und 13030 Volumenelementen. Dabei wird das „Earthing Knife“ an der Platte festgehalten, indem dort Dirichlet-Daten gleich Null vorgegeben werden. Für

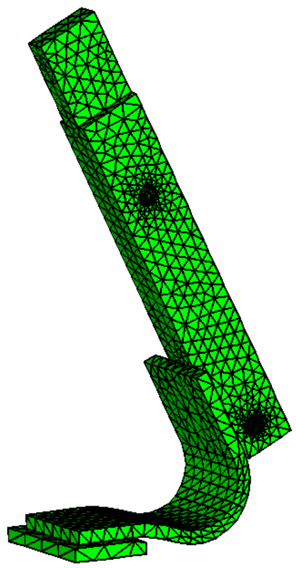

Abbildung 5.1: Earthing Knife

die restlichen Elemente werden Neumann-Randdaten gleich Null vorgegeben. Weiters wird eine Volumenkraft vorgegeben, die durch ein elektrisches Feld erzeugt wird. Das elektrische Feld erfüllt dabei sämtliche Voraussetzungen aus Abschnitt 5.2, und somit kann das Newtonpotential $N_0 f$ durch die reduzierte Darstellung (5.7) berechnet werden. Außerdem wird das Newtonpotential $N_0 f$ mithilfe der Multipolmethode über das Volumennetz ausgewertet. Das Newtonpotential $N_1 f$ wird über die alternative Darstellung (3.4) realisiert. Das erhaltene lineare Gleichungssystem (2.17) wird mithilfe des Schur-Kompliments (2.18) gelöst. Sämtliche Randintegralperatoren werden mithilfe der Multipolmethode realisiert. Das Einfachschichtpotential wird dabei mithilfe einer LU-Zerlegung invertiert. Zur Vorkonditioniertung wird erneut ein algebraischer BPX-Vorkonditionierer (vgl. [19]) für das Einfachschichtpotential bei der Berechnung von $N_1 f$ und der Operator entgegengesetzter Ordnung für den hypersingulären Operator (vgl. [21]) verwendet.
In Tabelle 5.2 werden die erhaltenen Daten zusammengefasst. In der ersten Zeile wird dabei das Newtonpotential über das Volumennetz berechnet, während in der zweiten Zeile die reduzierte Darstellung verwendet wird. Zu beachten ist hierbei, dass die reduzierte Darstellung nicht mittels der Multipolmethode beschleunigt wird. Dabei wird die Zeit für die Berechnung des Newtonpotentials $N_0 f$ extra angegeben. Danach folgt die Zeit für das Aufstellen des gesamten linearen Gleichungssystems und im Anschluss die benötigte Zeit und die benötigten Iterationen zum Lösen des linearen Gleichungssystems.
Die erste Spalte enthält die Anzahl der Randelemente und die zweite Spalte die Anzahl der Volumenelemente. Dabei wird bei der Berechnung mittels der reduzierten Darstellung kein Volumennetz betnötigt. Im Anschluss folgt die Zeit für die Auswertung des Newtonpotentials $N_0 f$. Da die reduzierte Darstellung nicht mithilfe der Multipolmethode realisiert

N_Γ	N_Ω	$N_0 f$	Aufstellen	Lösen	it
4130	14040	746	1595	997	500
4130		1971	2818	1004	504

Tabelle 5.2: Earthing Knife

wird, erhält man einen Berechnungsaufwand von $\mathcal{O}({N_\Gamma}^2)$ wesentlichen Operationen. Für die Auswertung über die Multipolmethode erhält man $\mathcal{O}({N_\Gamma}^{3/2} \log^2 N_\Gamma)$ wesentliche Operationen. Wie erwartet ist somit die Berechnung des Newtonpotentials $N_0 f$ über das Volumen deutlich langsamer. Im Anschluss folgt die Gesamtzeit für das Aufstellen des linearen Gleichungssytems. Daraufhin die Zeit für das Lösen und schlußendlich die Iterationszahlen. Der Unterschied in der Zeit für das Lösen des Systems ergibt sich aus den unterschiedlichen Iterationszahlen. Da die Matrizen durch die Geometrie schlecht konditioniert sind, führen numerische Ungenauigkeiten zu einer abweichenden Iterationszahl.

5.4 Ausblick

In dieser Arbeit wurde Wert darauf gelegt, die Newtonpotentiale $N_0 f$ und $N_1 f$ effizient auszuwerten. Dazu wurde für die Volumenpotentiale die Multipolmethode verwendet. Eine höhere Effizienz kann erreicht werden, wenn nach Zurückführen der Volumenpotentiale auf Randpotentiale, diese auch mit der Multipolmethode ausgewertet werden. Um die bestehende Multipolmethode verwenden zu können, muss der Kern der Randpotentiale durch die Fundamentallösung des Laplace-Operators oder dessen Ableitungen ausgedrückt werden. Für den Kern der reduzierten Darstellung

$$V_{k\ell}(x,y) = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[(7-8\nu)|x-y|\delta_{k\ell} + \frac{(x_k - y_k)(x_\ell - y_\ell)}{|x-y|} \right] \quad \text{für } k,\ell = 1,\dots,3$$

kann eine Multipolentwicklung für $|x-y|$ z.B. in [9, 25] gefunden werden. Neben der Berechnung der Koeffizienten, müssen dabei die Translations- und Konvertierungsoperatoren geeignet abgeändert werden.

Die reduzierte Darstellung kann nur bei Problemen angewandt werden, bei denen der inhomogene Anteil harmonisch ist, also die Laplace-Gleichung erfüllt. Der Zugang kann auch auf weitere Differentialoperatoren ausgeweitet werden. Dazu muss für diesen Differentialoperator die 2. Greensche Formel (1.8) gelten und eine zu Bedingung (5.2) äquivalente Beziehung muss gefunden werden. Mit einem derartigen Zugang könnte man unter Umständen auch Kräfte, die bei magnetostatischen Problemen auftreten, behandeln.

Literaturverzeichnis

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[2] M. Bebendorf and S. Rjasanow. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 70(1):1–24, 2003.

[3] S. Börm. Approximation of integral operators by $\mathcal{H}^2$-matrices with adaptive bases. *Computing*, 74(3):249–271, 2005.

[4] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland, Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.

[5] M. Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(3):613–626, 1988.

[6] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 73(2):325–348, 1987.

[7] W. Hackbusch, B. Khoromskij, and S. A. Sauter. On $\mathcal{H}^2$-matrices. In *Lectures on applied mathematics (Munich, 1999)*, pages 9–29. Springer, Berlin, 2000.

[8] W. Hackbusch and Z. P. Nowak. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.*, 54(4):463–491, 1989.

[9] K. Hayami and S. A. Sauter. A panel clustering method for 3-D elastostatics using spherical harmonics. In *Integral methods in science and engineering (Houghton, MI, 1998)*, volume 418 of *Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.*, pages 179–184. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[10] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. The Aubin-Nitsche lemma for integral equations. *J. Integral Equations*, 3(4):299–315, 1981.

[11] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[12] G. Of. Die Multipolmethode für Randintegralgleichungen. Diplomarbeit, Mathematische Institut A, Universität Stuttgart, 2001.

[13] G. Of. Beti-Gebietszerlegungsmethoden mit schnellen Randelementverfahren und Anwendungen. Dissertation, Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation, Universität Stuttgart, 2006.

[14] G. Of, O. Steinbach, and W. L. Wendland. Applications of a fast multipole Galerkin in boundary element method in linear elastostatics. *Comput. Vis. Sci.*, 8(3-4):201–209, 2005.

[15] G. Of, O. Steinbach, and W. L. Wendland. The fast multipole method for the symmetric boundary integral formulation. *IMA J. Numer. Anal.*, 26(2):272–296, 2006.

[16] S. Rjasanow and O. Steinbach. *The fast solution of boundary integral equations*. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, New York, 2007.

[17] S. Sauter and Ch. Schwab. *Randelementmethoden. Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen.* Stuttgart: Teubner, 2004.

[18] A. H. Schatz, V. Thomée, and W. L. Wendland. *Mathematical theory of finite and boundary element methods*, volume 15 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[19] O. Steinbach. Artificial multilevel boundary element preconditioners. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 3:539–542, 2003.

[20] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente.* Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.

[21] O. Steinbach and W. L. Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2):191–216, 1998. Numerical treatment of boundary integral equations.

[22] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory.* MacGraw-Hill, New York, 1941.

[23] Ch. A. White and M. Head-Gordon. Derivation and efficient implementation of the fast multipole method. *J. Chem. Phys.*, 101(8):6593–6605, 1994.

[24] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1982. Sobolevräume und Randwertaufgaben. [Sobolev spaces and boundary value problems], Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks].

[25] K. Yoshida, N. Nishimura, and S. Kobayashi. Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 50(3):525–547, 2001.

Erschienene Preprints ab Nummer 2006/1

2006/1	S. Engleder, O. Steinbach: Modified Boundary Integral Formulations for the Helmholtz Equation.
2006/2	O. Steinbach (ed.): 2nd Austrian Numerical Analysis Day. Book of Abstracts.
2006/3	B. Muth, G. Of, P. Eberhard, O. Steinbach: Collision Detection for Complicated Polyhedra Using the Fast Multipole Method of Ray Crossing.
2006/4	G. Of, B. Schneider: Numerical Tests for the Recovery of the Gravity Field by Fast Boundary Element Methods.
2006/5	U. Langer, O. Steinbach, W. L. Wendland (eds.): 4th Workshop on Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications. Book of Abstracts.
2006/6	O. Steinbach (ed.): Jahresbericht 2005/2006.
2006/7	G. Of: The All–floating BETI Method: Numerical Results.
2006/8	P. Urthaler, G. Of, O. Steinbach: Automatische Positionierung von FEM–Netzen.
2006/9	O. Steinbach: Challenges and Applications of Boundary Element Domain Decomposition Methods.
2006/10	S. Engleder: Stabilisierte Randintegralgleichungen für äussere Randwertprobleme der Helmholtz–Gleichung.
2007/1	M. Windisch: Modifizierte Randintegralgleichungen für elektromagnetische Streuprobleme.
2007/2	M. Kaltenbacher, G. Of, O. Steinbach: Fast Multipole Boundary Element Method for Electrostatic Field Computations.
2007/3	G. Of, A. Schwaigkofler, O. Steinbach: Boundary integral equation methods for inverse problems in electrical engineering.
2007/4	S. Engleder, O. Steinbach: Stabilized Boundary Element Methods for Exterior Helmholtz Problems.
2007/5	O. Steinbach, G. Unger: A Boundary Element Method for the Dirichlet Eigenvalue Problem of the Laplace Operator.
2007/6	O. Steinbach, M. Windisch: Modified combined field integral equations for electromagnetic scattering.
2007/7	S. Gemmrich, N. Nigam, O. Steinbach: Boundary Integral Equations for the Laplace–Beltrami Operator.
2007/8	G. Of: An efficient algebraic multigrid preconditioner for a fast multipole boundary element method.
2007/9	O. Steinbach (ed.): Jahresbericht 2006/2007.
2007/10	U. Langer, O. Steinbach, W. L. Wendland (eds.): 5th Workshop on Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications, Book of Abstracts