Technische Universität Graz

Stabilisierte Randintegralgleichungen für äussere Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung

S. Engleder

Berichte aus dem
Institut für Numerische Mathematik

Bericht 2006/10

Technische Universität Graz

Stabilisierte Randintegralgleichungen für äussere Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung

S. Engleder

Berichte aus dem Institut für Numerische Mathematik

Bericht 2006/10

Technische Universität Graz
Institut für Numerische Mathematik
Steyrergasse 30
A 8010 Graz

WWW: `http://www.numerik.math.tu-graz.at`

Stabilisierte Randintegralgleichungen für äussere Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung

vorgelegt der Fakultät für Technische Mathematik und Technische Physik
der Technischen Universität Graz
zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom Ingenieur (Dipl.-Ing.)

vorgelegt von

Sarah Engleder

Betreuung: Prof. Dr. O. Steinbach

Institut für Numerische Mathematik
Technische Universität Graz

2006

Vorwort

Ich möchte hiermit Herrn Professor Steinbach für die Bereitstellung dieses interessanten Themas und die engagierte Betreuung dieser Diplomarbeit danken. Weiters möchte ich Dr. Matthias Fischer und Dr. Günther Of für die Zurverfügungstellung von Programmen und Hilfe bei der Implementierung der numerischen Beispiele danken. Außerdem gilt mein Dank der Technischen Universität Graz für die finanzielle Unterstützung in Form eines Förderungsstipendiums, das mir den Aufenthalt in Stuttgart für die Zusammenarbeit mit Matthias Fischer und den Besuch der Winterschule über Hierarchische Matrizen in Leipzig sowie der Sommerschule in Zürich über die numerische Simulation der Wellenausbreitung, ermöglichte.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Schwingungen und Wellen sind ein in der Natur häufig auftretendes Phänomen. Schon in der Antike vermutete man, dass zwischen der wellenförmigen Ausbreitung von Wasser und der Ausbreitung von Schall ein Zusammenhang besteht.[1] Bereits 500 v. Chr. machte Pythagoras Versuche mit schwingenden Saiten, der griechische Philosoph Chrysippius (200 v. Chr.) erkannte, dass Schallwellen oszillierende Störungen des Mediums sind, die keine Masse über größere Distanzen transportieren. Circa 25 v. Chr. hielt diese Theorie auch im römischen Reich, durch den Architekt und Ingenieur Vetruvius, Einzug. Er diskutierte den Schall in Theatern und Effekte wie Nachhall und Echo.
Danach wurden erst Anfang des 17. Jahrhunderts wieder Fortschritte auf dem Gebiet der Akustik erzielt. Eine wichtige Rolle dabei spielten Marin Mersenne (1588-1648) und Galileo Galilei (1564-1642). Es konnte experimentell nachgewiesen werden, dass ein vibrierender Körper, der einen Ton abstrahlt, die umliegende Luft zu einer oszillatorischen Bewegung der gleichen Frequenz anregt. Gianfranco Sagredo beobachtete 1615 in einem Experiment, dass sich im Vakuum kein Schall überträgt, fand aber noch keine Erklärung für dieses Phänomen.
Die mathematische Theorie der Schallausbreitung begann im Wesentlichen mit Isaac Newton (1642-1727). In seiner Arbeit 'Principia' gibt er eine mechanische Interpretation des Schalls als Druckpulse, die von den benachbarten Fluidpartikeln weitergeleitet werden. Newton versuchte auch die Schallgeschwingkeit zu berechnen, allerdings ging er von falschen Modellannahmen aus, sodass der berechnete Wert deutlich vom realen Wert der Schallgeschwindigkeit abwich. Der richtige Wert wurde erst 1816 von Laplace berechnet.
1747 wurde von d'Alembert (1717-1783) die Wellengleichung zur Beschreibung einer schwingenden Saite gefunden. 12 Jahre später wurde schließlich von Leonard Euler (1736-1813) die eindimensionale Wellengleichung zur Beschreibung von Schall publiziert, bald darauf folgte die Publikation der dreidimensionalen Wellengleichung.
Weiters hervorzuheben ist Hermann von Helmholtz (1821-1894), der zahlreiche Arbeiten zu mathematischen, physikalischen, aber auch psychologischen Aspekten der Akustik veröffentlichte und nach dem die Differentialgleichung benannt ist, mit der sich diese Diplomarbeit beschäftigt. Die Helmholtz-Gleichung beschreibt die Ausbreitung einer Welle bei zeitharmonischer Anregung. Viele Probleme der Akustik werden heute mit der Helmholtz-Gleichung modelliert, beispielsweise die Streuung einer Schallwelle an einem Objekt oder die Schallabstrahlung eines vibrierenden Objektes, z.B. eines Autos oder Flugzeuges. Die Modellierung solcher Vorgänge führt dann zu äusseren Randwertproblemen der Helmholtz-

[1] Zur Geschichte der Akustik siehe http://www.isi.ee.ethz.ch/education/lectures/ak1/ak1_link/hist.htm und http://asa.aip.org/pierce.html

Gleichung. Für die Lösung solcher Randwertprobleme gibt es verschiedene Zugänge, in

Hermann von Helmholtz

manchen Fällen ist eine analytische Lösung bekannt, oft ist aber nur die numerische Berechnung der gesuchten physikalischen Größe möglich. Für die numerische Lösung wurden verschiedenste Methoden entwickelt, die bekanntesten sind sicherlich die Finite-Element-Methode (FEM) und die Randelement-Methode (BEM). Die Finite-Element-Methode hat den Nachteil, dass das gesamte Berechnungsgebiet diskretisiert werden muss. Das ist speziell bei Aussenraumproblemen ungünstig. Hierin liegt einer der Vorteile der Randelementmethode, bei der nur der Rand des Gebietes, auf dem die Randdaten vorgegeben sind, diskretisiert werden muss. Das heisst bei Aussenraumproblemen muss nur der Rand eines beschränkten Gebietes diskretisiert werden. Das reduziert natürlich die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems, hat aber den Nachteil, dass diese Gleichungssysteme voll besetzt sind, im Gegensatz zur Finiten-Element-Methode, wo man nur schwach besetzte Gleichungssysteme lösen muss.
Diese Diplomarbeit soll sich mit der Lösung von Aussenraumproblemen der Helmholtz-Gleichung durch die Randelement-Methode beschäftigen. Eine wichtige Rolle hierbei spielt die Wellenzahl, in die die Frequenz der zeitharmonischen Schwingungen und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen im Medium einfließen. Das Problem besteht nun darin, dass die klassischen Randintegralgleichungen für bestimmte Wellenzahlen, diese werden oft als 'spurious modes' bezeichnet, keine eindeutige Lösung besitzen. Aus diesem Grund wurden bereits in den 60er Jahren von den deutschen Mathematikern Brakhage und Werner bzw. den englischen Ingenieuren Burton und Miller (siehe [6], [11]) modifizierte Randintegralgleichungen hergeleitet, die für alle Wellenzahlen eine eindeutige Lösung besitzen. Die Theorie dieser modifizierten Randintegralgleichungen wurde aber nur für Gebiete mit glattem Rand in $L_2(\Gamma)$ betrachtet. Die Übertragung dieser Theorie auf Lipschitz-Gebiete konnte aber noch nicht nachgewiesen werden, deswegen machte man Vorschläge für stabilisierte Randintegralgleichungen, die man dann in den natürlichen Energieräumen $H^{1/2}(\Gamma)$

und $H^{-1/2}(\Gamma)$ betrachtete. Die Idee der Stabilisierung geht zurück auf Colton und Kreß (ca. 1983, siehe [12], für aktuelle Entwicklungen siehe auch [8], [9]). Das Problem der Stabilisierung nach Colton und Kreß ist, dass der Aufwand zur Lösung des zugehörigen Gleichungssystems dadurch sehr groß wird. Hier soll nun ein neuer Ansatz zur Stabilisierung vorgeschlagen werden, der auf ein lineares Gleichungssystem führt, das eine ähnliche Struktur hat wie die Gleichungssysteme für gemischte Randwertprobleme.

Die Diplomarbeit ist folgendermaßen gegliedert:
Im ersten Kapitel wird die Herleitung der Wellen- und Helmholtz-Gleichung ausgehend vom Gebiet der linearen Akustik beschrieben und schließlich die mathematische Formulierung von akustischen Streuungsproblemen angegeben.
Im zweiten Kapitel wird die Darstellung der Lösung der Randwertprobleme mit Hilfe von Oberflächenpotentialen beschrieben und die daraus resultierenden Randintegralgleichungen hergeleitet.
Im dritten Kapitel wird auf das Problem, dass die klassischen Randintegralgleichungen nicht für alle Wellenzahlen eindeutig lösbar sind, eingegangen und modifizierte Randintegralgleichungen angegeben. Schließlich wird ein neuer Ansatz zur Stabilisierung der Randintegralgleichungen vorgestellt. Es wird bewiesen, dass die aus diesem Ansatz resultierenden Randintegralgleichungen eine eindeutige Lösung für alle Wellenzahlen besitzen.
Im vierten Kapitel wird die zugehörige Randelementmethode hergeleitet und Aussagen über Konsistenz und Stabilität angegeben.
Im fünften und letzten Kapitel wird schließlich die Stabilität dieser Randelementmethode anhand von numerischen Beispielen verifiziert und diese Methode mit anderen Ansätzen verglichen.

1 Lineare Akustik

Die Ausbreitung einer Schallwelle in einem akustischen Medium wird durch eine hyperbolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, der Wellengleichung

$$\Delta \tilde{u} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u} = 0$$

beschrieben. In diesem Kapitel werden die wesentlichen Schritte zur Herleitung der Wellengleichung ausgehend vom Gebiet der linearen Akustik besprochen (siehe [15], [13]). Bei der Beschreibung der Wellenausbreitung in der nichtlinearen Akustik (z.B. Wellenausbreitung in kompressiblen Medien) können kompliziertere Differentialgleichungen bzw. Differentialgleichungen höherer Ordnung auftreten. Differentialgleichungen der nichtlinearen Akustik werden in dieser Arbeit nicht betrachtet, genaueres findet sich z.B. in [21], [24].
Betrachtet man die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum, so ist die gesuchte Funktion eine Funktion in vier Variablen. Findet eine periodische Anregung des akustischen Mediums statt, so hat man beobachtet, dass die gesuchte Funktion sich aus einem Teil, der nur von den Ortsvariablen abhängt, und aus einem Cosinus- bzw. Sinus-Anteil in der Zeitvariablen zusammensetzt. Setzt man dies in die Wellengleichung ein, so erhält man die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

wobei u eine komplexwertige Funktion in drei Ortsvariablen ist. Die Reduktion von vier auf drei Variablen stellt natürlich eine wesentliche Vereinfachung dar. Natürlich gibt es viele Prozesse in der Akustik, die nicht mit der Helmholtz-Gleichung modelliert werden können, zum Beispiel, wenn Komponenten mit nichtlinearem Materialverhalten involviert sind.

Drei charakteristische Grössen beschreiben die Ausbreitung einer akustischen Welle im Raum: der Druck p, die Dichte ρ und die Geschwindigkeit der Teilchen des Mediums. Diese Grössen zerlegt man in einen statischen Anteil und einen zeitabhängigen Anteil:

$$p(\vec{x}, t) = p_0(\vec{x}) + \tilde{p}(\vec{x}, t), \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0(\vec{x}) + \tilde{\rho}(\vec{x}, t).$$

Das Geschwindigkeitsfeld eines Mediums, in dem sich eine akustische Welle ausbreitet, wird als **Schallschnelle** bezeichnet:

$$v(\vec{x}, t) = v_0(\vec{x}) + \tilde{v}(\vec{x}, t).$$

In der linearen Akustik werden zwei wichtige Annahmen getroffen: Die zeitveränderlichen Komponenten des Drucks und der Dichte sind sehr klein gegenüber den statischen Anteilen:

$$\tilde{p} << p_0, \quad \tilde{\rho} << \rho_0.$$

Die Ausbreitung einer akustischen Welle wird durch drei Gleichungen beschrieben: die Zustandsgleichung, die Kontinuitätsgleichung und die Euler-Gleichungen. Durch Kombination dieser Gleichungen lässt sich dann die Wellengleichung der linearen Akustik herleiten.

1.1 Die Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung stellt eine Beziehung zwischen Druck und Dichte her. Die Form dieser Beziehung ist vom Medium, in dem sich die akustische Welle ausbreitet, abhängig und lässt sich nicht allgemein angeben. Deswegen setzt man den Druck als Funktion der Dichte an und nimmt eine Linearisierung vor:

$$p = p(\rho).$$

Dabei ist wichtig, dass der Druck nur von der Dichte abhängt und nicht von anderen Grössen wie zum Beispiel dem Geschwindigkeitsfeld.
Man entwickelt den Druck um den Wert der statischen Dichte:

$$p(\rho) = p(\rho_0) + (\rho - \rho_0)\frac{dp}{d\rho}(\rho_0) + \dots .$$

Der Druck ausgewertet an der Stelle des statischen Drucks ergibt die statische Dichte:

$$\begin{aligned} p(\rho_0) &= p_0, \\ \rho - \rho_0 &= \tilde{\rho}, \\ p - p_0 &= \tilde{p}. \end{aligned}$$

Durch Linearisierung erhält man

$$p(\rho) - p_0 = \tilde{p} = \tilde{\rho}\frac{dp}{d\rho}(\rho_0).$$

Mit

$$c^2 := \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \tag{1.1}$$

erhält man die Zustandsgleichung der linearen Akustik

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} \cdot c^2. \tag{1.2}$$

Für ein ideales Gas kann man die Druck-Dichte-Beziehung $p(\rho)$ explizit angeben: Es gilt

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa} = \frac{p}{p_0} \quad \Rightarrow \quad p(\rho) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa} \tag{1.3}$$

wobei $\kappa \in \mathbb{R}_+$ den Adiabatenexponenten bezeichnet, der durch das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und c_v gegeben ist. Der Wert des Adiabatenexponenten für Luft beträgt $\kappa = 1.4$. Durch Ableiten von (1.3) und Einsetzen des Ergebnisses in (1.1) erhält man mit (1.2):

$$\frac{dp}{d\rho}(\rho_0) = \kappa\frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}}\rho_0^{\kappa-1} = \kappa\frac{p_0}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \kappa\frac{p_0}{\rho_0} = c^2.$$

1.2 Die Kontiniutätsgleichung

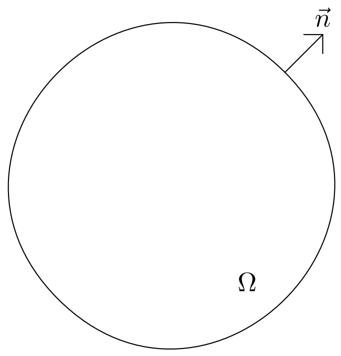

Abbildung 1.1: Kontrollvolumen

Eine Schallwelle verursacht lokale Änderungen der Dichte eines Mediums. Betrachtet man daher ein raumfestes Kontrollvolumen Ω, so findet durch dieses Volumen ein Massenfluss statt. Die Massenänderung im Kontrollvolumen wird durch folgendes Integral modelliert:

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega.$$

Die zu- und abfliessenden Massenströme werden durch ein Randintegral dargestellt:

$$-\int_\Gamma \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\Gamma.$$

Das Integral wird immer negativ genommen, weil der Normalenvektor $\vec{n}$ per Konvention immer nach aussen zeigt. Fliesst Masse ab, so ist $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ negativ, durch die Oberfläche findet aber ein positiver Massenfluss statt, das Randintegral wäre daher positiv.
Das Gesetz der Massenerhaltung besagt nun

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = -\int_\Gamma \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\Gamma.$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes erhält man

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = -\int_\Omega \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\Omega.$$

Diese Beziehung gilt für alle Kontrollvolumina Ω, damit wird aus der integralen Beziehung eine Differentialgleichung, die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

1.3 Die Euler-Gleichungen

Zur Herleitung der Eulerschen Gleichungen betrachtet man die Impulserhaltung in einem infinitesimalen Volumen, das sich mit dem Medium bewegt. Die Kräfte, die auf das Kon-

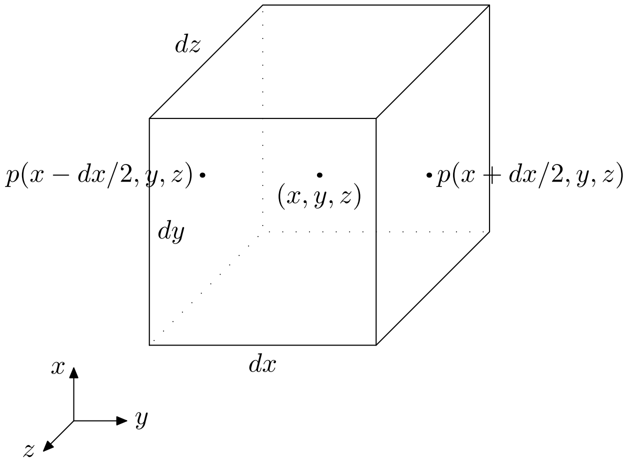

Abbildung 1.2: Bewegtes Kontrollvolumen

trollvolumen wirken, werden dabei nur durch Druck verursacht. Durch Viskosität verursachte Kräfte werden hier vernachlässigt, deren Einbeziehung wird in der nichtlinearen Akustik behandelt. Gravitationskräfte werden ebenfalls vernachlässigt, da sich zeigt, dass diese nur bei sehr grossen Wellenlängen ausserhalb des hörbaren Bereichs einen Einfluss haben.
Die Kraftanteile in den einzelnen Raumrichtungen, die im Punkt (x, y, z) wirken, haben nun folgende Form:

$$\begin{aligned} df_x &= \left(-p\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) + p\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right)\right) dydz, \\ df_y &= \left(-p\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) + p\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right)\right) dxdz, \\ df_z &= \left(-p\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right) + p\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right)\right) dxdy. \end{aligned}$$

Die Druckterme entwickelt man dann an der Stelle (x, y, z) in

$$\begin{aligned} p\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) &\approx p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}, \\ p\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) &\approx p(x, y, z) - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}. \end{aligned}$$

Zieht man die zwei Gleichungen voneinander ab, erhält man

$$\begin{aligned} df_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} d\Omega, \\ df_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} d\Omega, \\ df_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} d\Omega, \\ \Rightarrow \quad d\vec{f} &= -\nabla p d\Omega. \end{aligned}$$

Andererseits gilt die Bewegungsgleichung

$$d\vec{f} = \vec{a}\, dm = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Da man ein Kontrollvolumen betrachtet, das sich mit dem Medium mitbewegt, sind die Koordinaten (x, y, z) zeitabhängig. Daher muss man bei der Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit die Kettenregel anwenden:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}.$$

Dann ist

$$d\vec{f} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right) dm$$

bzw.

$$\frac{d\vec{f}}{d\Omega} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right) \frac{dm}{d\Omega}.$$

Mit $\frac{dm}{d\Omega} = \rho$ und dem Resultat $\frac{d\vec{f}}{d\Omega} = -\nabla p$ erhält man schließlich die Eulerschen Gleichungen

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p.$$

1.4 Die Wellengleichung der linearen Akustik

In der linearen Akustik werden folgende Annahmen getroffen:

$$\vec{v}\, \nabla\rho << \rho\nabla \cdot \vec{v} \approx \rho_0 \nabla\vec{v}, \quad (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} << \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Es zeigt sich, dass bei Verletzung dieser Annahmen auch die zu Beginn gemachten Annahmen $\tilde{p} << p_0$ und $\tilde{\rho} << \rho_0$ nicht mehr gelten.
Nun vereinfachen sich die Eulerschen Gleichungen zu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \tag{1.4}$$

und die Kontinuitätsgleichung zu

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{1.5}$$

Mit der Zustandsgleichung

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = c^2 \tag{1.6}$$

hat man nun fünf Gleichungen für die Beschreibung der fünf Unbekannten (v_x, v_y, v_z, p, ρ). Aus diesem System von Gleichungen lässt sich nun die Wellengleichung der linearen Akustik herleiten:
Zuerst leitet man beide Seiten der Kontinuitätsgleichung (1.5) nach der Zeit ab,

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2},$$

und setzt dann die Eulersche Gleichung (1.4) ein:

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla \cdot \nabla p = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Daraus folgt

$$\Delta p = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

bzw.

$$\Delta(p_0 + \tilde{p}) = \frac{\partial^2(\rho_0 + \tilde{\rho})}{\partial t^2}.$$

Die statischen Anteile des Drucks und der Dichte wurden als zeit- und ortsunabhängig angenommen, daraus ergibt sich

$$\Delta \tilde{p} = \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2}.$$

Setzt man schliesslich die Zustandsgleichung ein, so erhält man die Wellengleichung der linearen Akustik

$$\Delta \tilde{p} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}.$$

Die Wellengleichung lässt sich nicht nur für den Druck formulieren, sondern auch für das Potential der Schallschnelle. Damit solch ein Potential existiert, muss man zeigen, dass das Geschwindigkeitsfeld rotationsfrei ist. Dazu bildet man die Rotation der Euler-Gleichungen,

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathrm{rot}\frac{1}{\rho_0}\nabla p = 0.$$

Mit $\mathrm{rot}\nabla \equiv 0$ folgt

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

Die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes ist also zeitlich konstant. Nimmt man an, dass zum Anfangszeitpunkt keine Rotation vorhanden ist, erhält man

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \mathrm{rot}(\vec{v_0} + \vec{\tilde{v}}) = \mathrm{rot}\ \vec{\tilde{v}} = 0.$$

Der statische Anteil des Drucks ist ortsunabhängig, daher verschwindet seine Rotation.
Diese Aussage lässt sich auch dadurch erklären, dass bei der Herleitung der Eulerschen Gleichungen der Reibungseinfluss nicht berücksichtigt wurde. In einem Fluid kann, wenn am Anfang keine Rotation verhanden war, ohne den Einfluss von Schubspannungen keine Rotation entstehen.
Nun lässt sich der Schwankungsanteil der Schallschnelle als Geschwindigkeitspotential schreiben:

$$\vec{\tilde{v}} = -\nabla\psi.$$

Durch Ableitung dieser Gleichung nach der Zeit und durch Einsetzen der Eulerschen Gleichungen erhält man

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla\tilde{p} = -\frac{\partial\nabla\psi}{\partial t}.$$

Daraus folgt dann

$$\tilde{p} = \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Dieses Ergebnis setzt man nun in die schon für $\tilde{p}$ hergeleitete Wellengleichung ein:

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = \rho_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right).$$

Durch Integration dieser Gleichung nach der Zeit und Division durch ρ_0 erhält man die Wellengleichung für das Geschwindigkeitspotential:

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Die Integrationskonstanten können gleich Null gesetzt werden, da das Potential ohnenhin nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.
Bei zeitharmonischer Anregung kann man Druck und Geschwindigkeitspotential als

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\vec{x},t) &= Re(\hat{p}\,e^{i\omega t}),\\ \psi(\vec{x},t) &= Re(\hat{\psi}e^{i\omega t})\end{aligned}$$

schreiben und erhält die Helmholtz Gleichung

$$\Delta\hat{p} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\hat{p} = 0,$$

$$\Delta\hat{\psi} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\hat{\psi} = 0,$$

wobei $\hat{p}$ und $\hat{\psi}$ komplexwertige, rein ortsabhängige Funktionen sind.
Die Grösse
$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda c},$$
wobei λ die Wellenlänge ist, bezeichnet man als Wellenzahl.

1.5 Streuungsprobleme der linearen Akustik

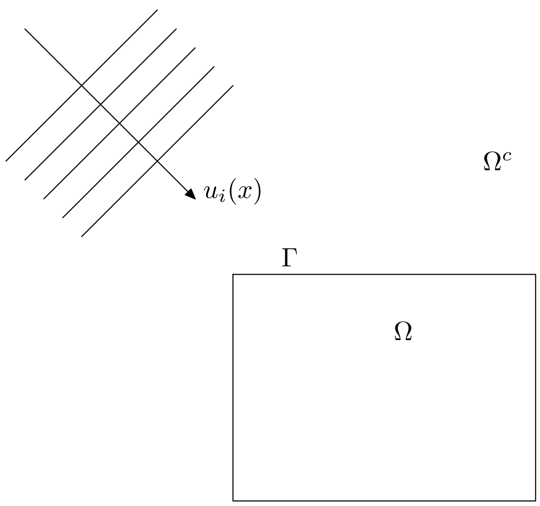

Abbildung 1.3: Streuungsproblem

Man betrachte ein Medium im 3-dimensionalen Raum, in dem sich eine einfallende Schallwelle ausbreitet und an einem Objekt Ω gestreut wird. Diese Problemstellung läßt sich wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) + k^2 u(x) &= 0 && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\
u_s(x) + u_i(x) &= u(x) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\
u(x) &= 0 && \text{für} \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \\
\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_s(x)}{\partial r} - iku_s(x)\right) &= 0, && \qquad r = |x|.
\end{aligned}$$

Mit $u_i(x)$ bezeichnet man die einfallende Welle und mit $u_s(x)$ die gestreute Welle, k ist die Wellenzahl, im weiteren wird hier nur der Fall $k \in \mathbb{R}_+$ betrachtet. Die letzte Bedingung wird als 'Sommerfeldsche Abstrahlungsbedingung' bezeichnet, sie garantiert die eindeutige Lösbarkeit des Aussenraumproblems. Die Dirichlet-Randbedingung entspricht der Streuung an einem 'schallweichen' Objekt. Bei einem 'schallharten' Objekt gibt man auf Γ die

Normalenableitung vor. Die Problemstellung lautet dann

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) + k^2 u(x) &= 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\
u_s(x) + u_i(x) &= u(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\
\frac{\partial}{\partial n_x} u(x) &= 0 \quad \text{für} \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \\
\lim_{r\to\infty} r \left(\frac{\partial u_s(x)}{\partial r} - iku_s(x) \right) &= 0, \qquad r = |x|.
\end{aligned}$$

Dabei ist n_x die Ausseneinheitsnormale. $u_i(x)$ ist bekannt, zum Beispiel

$$u_i(x) = e^{ikx\cdot d},$$

wobei d mit $\|d\|_2 = 1$ die normierte Ausbreitungsrichtung ist. Wenn u_i die Helmholtz-Gleichung erfüllt, reduzieren sich die obigen Randwertprobleme zu

$$\begin{aligned}
\Delta u_s(x) + k^2 u_s(x) &= 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\
u_s(x) &= g_d(x) \quad \text{für} \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \\
\lim_{r\to\infty} r \left(\frac{\partial u_s(x)}{\partial r} - iku_s(x) \right) &= 0, \qquad r = |x|
\end{aligned} \tag{1.7}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta u_s(x) + k^2 u_s(x) &= 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\
\frac{\partial}{\partial n_x} u_s(x) &= g_n(x) \quad \text{für} \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \\
\lim_{r\to\infty} r \left(\frac{\partial u_s(x)}{\partial r} - iku_s(x) \right) &= 0, \qquad r = |x|
\end{aligned} \tag{1.8}$$

mit gegebenen Dirichlet-Daten $g_d(x)$ bzw. Neumann-Daten $g_n(x)$. Diese beiden Randwertprobleme werden als äusseres Dirichlet-Randwertproblem bzw. äusseres Neumann-Randwertproblem bezeichnet. Das Ziel ist es nun, diese beiden Randwertprobleme zu lösen. Damit die Frage der Existenz und Eindeutigkeit für die obigen Randwertprobleme geklärt werden kann, müssen noch die entsprechenden Funktionen-Räume eingeführt werden, um eine genauere mathematische Formulierung der Randwertprobleme zu ermöglichen.

2 Randintegralgleichungen für die Helmholtz-Gleichung

Für die Lösung der Randwertprobleme (1.7) und (1.8) gibt es verschiedene Zugänge. Für einfache Geometrien sind analytische Lösungen bekannt, in den meisten Fällen ist aber nur eine numerische Lösung der Randwertprobleme möglich. Dazu kann zum Beispiel die Finite-Elemente Methode verwendet werden (siehe [20]). Diese Methode hat den Nachteil, dass man bei Aussenraumproblemen ein unbeschränktes Gebiet diskretisieren müsste. Um dieses Problem zu umgehen führt man einen künstlichen Rand ein, der das Gebiet Ω umschließt. Auf diesem Rand schreibt man 'absorbierende Randbedingungen' vor, die das Abklingverhalten der Lösung berücksichtigen (siehe z.B. [17]). Eine andere Möglichkeit zur Umgehung dieses Problems besteht in der Einführung von 'infiniten Elementen' (siehe [10], [14]).
Der Vorteil der Randelementmethode ist, dass man keine solchen künstlichen Bedingungen einführen muss, weil man nur den Rand des beschränkten Gebietes Ω diskretisieren muss und die Lösung, die man durch die Randelementmethode erhält, automatisch das richtige Abklingverhalten aufweist.
In diesem Kapitel werden nun zunächst Funktionenräume (siehe [32], [19], [1]) eingeführt, die eine schwache Formulierung des äusseren Dirichlet- bzw. Neumann-Randwertproblems erlauben. Die Lösungen dieser Randwertprobleme können dann mit Hilfe der Greenschen Formeln als Oberflächenpotentiale dargestellt werden. Lässt man die Variable in diesen Darstellungsformeln gegen den Rand laufen, so erhält man Randintegralgleichungen zur Bestimmung der jeweils fehlenden Cauchy-Daten. Diese Randintegralgleichungen für die Helmholtz-Gleichung werden hier auf der Grundlage von [32] hergeleitet (siehe auch [12],[23] und [29]).

2.1 Sobolev-Räume

Definition 2.1. *Der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist definiert durch*

$$\Gamma = \partial\Omega = \overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega).$$

Definition 2.2 (Lipschitz-Hypograph)**.** *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Lipschitz-Hypograph wenn eine Funktion $\zeta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, sodass*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < \zeta(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

gilt und ζ Lipschitz-stetig ist, d.h. es gilt

$$|\zeta(x) - \zeta(y)| \leq M|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

mit einem $M > 0$.

Definition 2.3 (Lipschitz-Gebiet)**.** *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Lipschitz-Gebiet, wenn sein Rand $\Gamma = \partial\Omega$ kompakt ist und es endliche Mengen $\{W_j\}$ und $\{\Omega_j\}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:*

1. *$\{W_j\}$ bildet eine offene Überdeckung von Γ, d.h. jedes W_j ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und es gilt $\Gamma \subseteq \bigcup_j W_j$.*
2. *Jedes Ω_j kann durch eine Starrkörperbewegung (d.h eine Rotation plus eine Translation) in einen Lipschitz-Hypographen transformiert werden.*
3. *Ω erfüllt $W_j \cap \Omega = W_j \cap \Omega_j$ für alle j.*

Definition 2.4. *$C^\infty(\Omega)$ definiert den Raum der auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkten und unendlich oft differenzierbaren Funktionen. $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ bezeichnet den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, d.h.*

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) : \mathit{supp}\ u \subset \Omega\}.$$

Definition 2.5. *Der Raum $L_2(\Omega)$ ist wie folgt definiert:*

$$L_2(\Omega) := \{u : \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Dieser Raum ist ein Hilbert-Raum mit der Norm

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

und dem inneren Produkt

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} dx.$$

Definition 2.6. *Der Sobolev-Raum $W_2^s(\Omega)$ ist für $s > 0$ definiert als die Vervollständigung des $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der $\|.\|_{W_2^s(\Omega)}$-Norm,*

$$W_2^s(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{W_2^s(\Omega)}},$$

wobei für ganzzahlige Indizes $s \in \mathbb{N}_0$

$$\|u\|_{W_2^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

und für nichtganzzahlige Indizes $s = k + \kappa$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\kappa \in (0,1)$

$$\|u\|_{W_2^s(\Omega)} = \left\{ \|u\|^2_{W_2^k(\Omega)} + |u|^2_{W_2^k(\Omega)} \right\}^{1/2}$$

mit

$$|u|^2_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{3+2\kappa}} dxdy.$$

gilt.

Definition 2.7. *Für $s > 0$ ist der Sobolev-Raum $\overset{\circ}{W}{}_2^s(\Omega)$ definiert als die Vervollständigung des $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $\|.\|_{W_2^s(\Omega)}$-Norm,*

$$\overset{\circ}{W}{}_2^s(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_2^s(\Omega)}}.$$

Für negative Sobolev-Indizes $s < 0$ ist der $W_2^s(\Omega)$ als Dualraum von $\overset{\circ}{W}{}_2^{-s}(\Omega)$ bezüglich des Dualitätsprodukts $\langle .,. \rangle_\Omega$ mit der Norm

$$\|u\|_{W_2^s(\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-s}(\Omega)} \frac{|\langle u, v \rangle_\Omega|}{\|v\|_{W_2^{-s}(\Omega)}}$$

definiert.
Alternativ können auch Sobolev-Räume $H^s(\mathbb{R}^3)$ über die Fourier Transformation eingeführt werden (siehe [25], [36]) Für alle $s > 0$ gilt

$$H^s(\mathbb{R}^3) = W_2^s(\mathbb{R}^3).$$

Definition 2.8. *Für $s > 0$ ist der $H^s(\Omega)$ definiert durch*

$$H^s(\Omega) := \{ v = \tilde{v}|_\Omega : \tilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^3) \}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{\tilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^3), \tilde{v}|_\Omega = v} \|\tilde{v}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$$

Mit

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}}$$

ist für negative Sobolev-Indizes der $H^s(\Omega)$ als Dualraum von $\widetilde{H}^s(\Omega)$ definiert :

$$H^s(\Omega) = [\widetilde{H}^{-s}(\Omega)]'.$$

Bemerkung 2.1. *Für Lipschitz-Gebiete und $s > 0$ gilt (siehe [36])*

$$W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega).$$

Weiters gilt $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Definition 2.9. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und B_R ein Kugel um den Ursprung mit Radius R, dann ist der $H^1_{loc}(\Omega^c)$ definiert durch*

$$H^1_{loc}(\Omega^c) = \{ v \in H^1(\Omega^c) : \int_{\partial B_R} \left\{ |v(y)|^2 + |\nabla v(y)|^2 \right\} ds_y < \infty \quad \forall R > 0 \}.$$

2.1.1 Spuroperatoren

Definition 2.10 (Dirichlet-Spur)**.** *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Dann ist die innere Dirichlet-Spur einer Funktion u definiert als*

$$\gamma_0^{int} u(x) = \lim_{\tilde{x}\in\Omega\to x\in\Gamma} u(\tilde{x}) \quad \textit{für } x \in \Gamma$$

bzw. die äussere Dirichlet-Spur

$$\gamma_0^{ext} u(x) = \lim_{\tilde{x}\in\Omega^c\to x\in\Gamma} u(\tilde{x}) \quad \textit{für } x \in \Gamma.$$

Definition 2.11 (Neumann-Spur)**.** *Sei Ω wieder ein beschränktes Gebiet. Dann ist die innere Neumann-Spur einer Funktion u definiert als*

$$\gamma_1^{int} u(x) = \lim_{\tilde{x}\in\Omega\to x\in\Gamma} \sum_{i=1}^{3} n_i(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} u(\tilde{x}) \quad \textit{für } x \in \Gamma$$

bzw. die äussere Neumann-Spur

$$\gamma_1^{ext} u(x) = \lim_{\tilde{x}\in\Omega^c\to x\in\Gamma} \sum_{i=1}^{3} n_i(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} u(\tilde{x}) \quad \textit{für } x \in \Gamma,$$

wobei $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))^T$ den äusseren Normalenvektor auf dem Rand im Punkt $x \in \Gamma$ bezeichnet.

Bemerkung 2.2. *Per Konvention zeige der Normalenvektor bezüglich des Randes eines beschränkten Gebietes immer von diesem Gebiet weg. Das heisst, der Normalenvektor der inneren und äusseren Spur zeigt in die gleiche Richtung.*

Der Sprung der Dirichlet- bzw. Neumann-Spur wird wie folgt bezeichnet:

$$[\gamma_0 u](x) = \gamma_0^{\text{ext}} u(x) - \gamma_0^{\text{int}} u(x) \quad \text{für } x \in \Gamma,$$

bzw.

$$[\gamma_1 u](x) = \gamma_1^{\text{ext}} u(x) - \gamma_1^{\text{int}} u(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

2.1.2 Sobolev Räume auf dem Rand

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Lipschitz-Gebiet und $\Gamma = \partial\Omega$ dessen Rand.

Definition 2.12. *Die L_2-Norm auf dem Rand ist definiert durch*

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |u(x)|^2 ds_x \right)^{1/2}.$$

Die Sobolev-Slobodeckii-Norm auf dem Rand ist für $s \in (0,1)$ definiert durch

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left\{ \|u\|^2_{L_2(\Gamma)} + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{3-1+2s}} ds_x ds_y \right\}^{1/2}.$$

Analog zu den Sobolev-Räumen für das Gebiet ist der $H^s(\Gamma)$ für negative Sobolev-Indizes $s < 0$ als Dualraum von $H^{-s}(\Gamma)$ definiert,

$$H^s(\Gamma) = [H^{-s}(\Gamma)]',$$

bezüglich dem Dualitätsprodukt

$$\langle u, v\rangle_\Gamma := \int_\Gamma u(x)\overline{v(x)}ds_x$$

und mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \sup_{0\neq v\in H^{-s}(\Gamma)} \frac{|\langle u, v\rangle_\Gamma|}{\|v\|_{H^{-s}(\Gamma)}}.$$

Definition 2.13. *Sei nun $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ein offenes Randstück einer stückweise glatten Randkurve Γ. Dann ist für $s \geq 0$*

$$H^s(\Gamma_0) := \{v = \tilde{v}|_{\Gamma_0} : \tilde{v} \in H^s(\Gamma)\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{H^s(\Gamma_0)} := \mathop{inf}_{\tilde{v}\in H^s(\Gamma), v=\tilde{v}|_{\Gamma_0}} \|\tilde{v}\|_{H^s(\Gamma)}.$$

Für einen stückweise glatten Rand

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{\Gamma}_i \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

definiert man

$$H^s_{\mathrm{pw}}(\Gamma) := \{v \in L_2(\Gamma) : v|_{\Gamma_i} \in H^s(\Gamma_i), i = 1 \dots p\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{H^s_{\mathrm{pw}}} := \left\{\sum_{i=1}^{p} \|v|_{\Gamma_i}\|^2_{H^s(\Gamma_i)}\right\}^{1/2}.$$

Satz 2.14 (Spursatz)**.** *Sei Ω ein $C^{k-1,1}$ Gebiet (das heisst, dass die Parametrisierung der Oberfläche $k-1$ mal differenzierbar ist und deren Ableitungen der Ordnung $k-1$ Lipschitz-stetig sind). Für $\frac{1}{2} < s \leq k$ ist*

$$\gamma_0^{int} : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\Gamma)$$

ein beschränkter, linearer Operator, d.h. es gilt

$$\|\gamma_0^{int} v\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)} \leq c_T \|v\|_{H^s(\Omega)}, \quad \forall v \in H^s(\Omega).$$

Satz 2.15 (Inverser Spursatz)**.** *Sei Ω ein $C^{k-1,1}$ Gebiet. Dann besitzt der Spuroperator $\gamma_0^{int} : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\Gamma)$ für $\frac{1}{2} < s \leq k$ eine stetige Rechtsinverse*

$$\mathcal{E} : H^{s-1/2}(\Gamma) \to H^s(\Omega)$$

mit $\gamma^{int}\mathcal{E}w = w$ und

$$\|\mathcal{E}w\|_{H^s(\Omega)} \leq c_{IT} \|w\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)}, \quad \forall w \in H^{s-1/2}(\Gamma).$$

2.1.3 Greensche Formeln

Aus dem Gaußschen Integralsatz und der Formel für die partielle Integration folgt

$$\int_\Omega [-\Delta u(x)]\overline{v(x)}dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\overline{v(x)}dx - \int_\Gamma \gamma_1^{\text{int}}u(y)\gamma_0^{\text{int}}\overline{v(y)}ds_y$$

bzw.

$$\langle -\Delta u, v\rangle_\Omega = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_\Omega - \langle \gamma_1^{\text{int}}u, \gamma_0^{\text{int}}v\rangle_\Gamma.$$

Damit folgt für $Lu = -\Delta u - k^2 u$

$$\begin{aligned}\langle Lu, v\rangle_\Omega &= \langle -\Delta u, v\rangle_\Omega - k^2\langle u, v\rangle_\Omega \\ &= \langle \nabla u, \nabla v\rangle_\Omega - k^2\langle u, v\rangle_\Omega - \langle \gamma_1^{\text{int}}u, \gamma_0^{\text{int}}v\rangle_\Gamma.\end{aligned}$$

Mit

$$a_\Omega(u,v) := \langle \nabla u, \nabla v\rangle_\Omega - k^2\langle u, v\rangle_\Omega$$

erhält man die **1. Greensche Formel**

$$\langle Lu, v\rangle_\Omega = a_\Omega(u,v) - \langle \gamma_1^{\text{int}}u, \gamma_0^{\text{int}}v\rangle_\Gamma. \tag{2.1}$$

Vertauscht man die Rollen von u und v, so erhält man

$$\langle u, Lv\rangle_\Omega = a_\Omega(u,v) - \langle \gamma_0^{\text{int}}u, \gamma_1^{\text{int}}v\rangle_\Gamma.$$

Bildet man die Differenz der zwei obigen Gleichungen, so bekommt man die **2. Greensche Formel**

$$\langle Lu, v\rangle_\Omega - \langle u, Lv\rangle_\Omega = \langle \gamma_0^{\text{int}}u, \gamma_1^{\text{int}}v\rangle_\Gamma - \langle \gamma_1^{\text{int}}u, \gamma_0^{\text{int}}v\rangle_\Gamma. \tag{2.2}$$

Weiters gilt:

Satz 2.16 (3. Greensche Formel)**.** *Sei $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ mit $Lu = 0$ in $\Omega \cup \Omega^c$, dann gilt*

$$\langle Lu, v\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle [\gamma_0 u], \gamma_1 v\rangle_\Gamma - \langle [\gamma_1 u], \gamma_0 v\rangle_\Gamma.$$

Beweis: Da v einen kompakten Träger besitzt, gilt laut der zweiten Greenschen Formel bezüglich $\mathbb{R}^3$

$$\langle Lu, v\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle u, Lv\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Da v stetig und beschränkt ist, gilt $\gamma_0^{\text{int}}v = \gamma_0^{\text{ext}}v = \gamma_0 v$ und $\gamma_1^{\text{int}}v = \gamma_1^{\text{ext}}v = \gamma_1 v$. Durch zweimaliges Anwenden der zweiten Greenschen Formel erhält man

$$\begin{aligned}\langle u, Lv\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle u, Lv\rangle_\Omega + \langle u, Lv\rangle_{\Omega^c} \\ &= a_\Omega(u,v) + a_{\Omega^c}(u,v) - \langle \gamma_0^{\text{int}}u, \gamma_1 v\rangle_\Gamma + \langle \gamma_0^{\text{ext}}u, \gamma_1 v\rangle_\Gamma \\ &= \langle Lu, v\rangle_\Omega + \langle Lu, v\rangle_{\Omega^c} - \langle \gamma_0^{\text{int}}u - \gamma_0^{\text{ext}}u, \gamma_1 v\rangle_\Gamma + \langle \gamma_1^{\text{int}}u - \gamma_1^{\text{ext}}u, \gamma_0 v\rangle_\Gamma.\end{aligned}$$

Da laut Voraussetzung $Lu = 0$ in $\Omega \cup \Omega^c$ gilt, folgt somit die Behauptung.

$\square$

2.2 Koerzive Operatoren

Ein wichtiges Hilfsmittel, um Aussagen über die Lösbarkeit von Randintegralgleichungen machen zu können, ist die Theorie koerziver Operatoren:

Definition 2.17. *Sei X ein Banach-Raum. Der Operator $A : X \to X'$ heißt dann koerziv, wenn es einen kompakten Operator $C : X \to X'$ gibt, sodass die Gardingsche Ungleichung*

$$Re\langle (A+C)v, v\rangle \geq c_1^A \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X,\ c_1^A > 0$$

erfüllt ist.

Definition 2.18. *Sei X ein Banach-Raum. Der Operator $A : X \to X'$ heißt X-elliptisch, wenn es ein $c_1^A > 0$ gibt, sodass*

$$|\langle Av, v\rangle| \geq c_1^A \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X$$

erfüllt ist.

Für koerzive Operatoren gilt nun das folgende Theorem (siehe [34]):

Theorem 2.19. *Sei $A : X \to X'$ ein beschränkter und koerziver Operator und sei A injektiv, d.h. aus $Aw = 0$ folgt $w = 0$. Dann hat die Gleichung $Au = f$ eine eindeutige Lösung $u \in X$, die*

$$\|u\|_X \leq c\|f\|_{X'}$$

erfüllt.

Beweis: Der Operator $D = A + C : X \to X'$ ist linear und beschränkt. Da A koerziv ist, ist D X-elliptisch. Nach dem Lax-Milgram Lemma (siehe z.B. [32], Satz 3.2) existiert der inverse Operator $D^{-1} : X' \to X$. Daher kann man nun statt der Gleichung $Au = f$ die äquivalente Gleichung

$$Bu = D^{-1}Au = D^{-1}f$$

mit dem beschränkten Operator

$$B = D^{-1}A = D^{-1}(D - C) = I - D^{-1}C : X \to X$$

betrachten. Da C kompakt ist, ist auch $D^{-1}C$ kompakt und daher kann man für $Bu = f$ die Fredholmsche Alternative anwenden. A ist injektiv, d.h. $D^{-1}A$ ist ebenfalls injektiv, daher existiert eine eindeutige Lösung der Gleichung $Bu = f$, für die gilt

$$\|u\|_X \leq c\,\|D^{-1}f\|_X \leq \widetilde{c}\|f\|_{X'}.$$

□

2.3 Formulierung der Randwertprobleme

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\Gamma = \partial\Omega$ sein Rand. B_R sei ein Kreis um den Ursprung mit Radius R.
Das **äussere Dirichlet-Randwertproblem der Helmholtz-Gleichung** lautet dann :

Gegeben sei die Wellenzahl $k > 0$ und das Dirichlet-Datum $g_d(x) \in H^{1/2}(\Gamma)$. Gesucht ist dann eine Funktion $u \in H^1_{loc}(\Omega^c)$, die

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + k^2 u(x) &= 0, && x \in \Omega^c, \\ u(x) &= g_d(x), && x \in \Gamma, \\ \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial n_y} - iku \right|^2 ds_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

im verallgemeinerten Sinn erfüllt.

Die letzte Beziehung für das Verhalten der Lösung im Unendlichen wird Abstrahlungsbedingung von Rellich genannt.
Das **äussere Neumann-Randwertproblem der Helmholtz-Gleichung** lautet:

Gegeben sei die Wellenzahl $k > 0$ und das Neumann-Datum $g_n(x) \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Gesucht ist dann eine Funktion $u \in H^1_{loc}(\Omega^c)$, die

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + k^2 u(x) &= 0, && x \in \Omega^c, \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x) &= g_n(x), && x \in \Gamma, \\ \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial n_y} - iku \right|^2 ds_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

im verallgemeinerten Sinn erfüllt.

Im 1. Kapitel wurde bei der Formulierung des Streuungsproblems anstelle der Abstrahlungsbedingung von Rellich

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 ds_y = 0 \tag{2.5}$$

die Bedingung

$$\lim_{r\to\infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \qquad r = |x|,$$

für das Verhalten der Lösung im Unendlichen vorgeschrieben. Diese Bedingung ist stärker und geht auf A. Sommerfeld (siehe [31]) zurück. Diese Forderung schließt **einstrahlende** Wellen, also Lösungen der Form

$$\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}$$

aus und garantiert die eindeutige Lösbarkeit des Randwertproblems. Für die eindeutige Lösbarkeit und die Formulierung des Aussenraumproblems durch Randintegralgleichungen reicht jedoch die Integralrelation aus:

Satz 2.20. *Das äussere Dirichlet-Randwertproblem* (2.3) *bzw. das äussere Neumann-Randwertproblem* (2.4) *hat höchstens eine Lösung.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus den zwei folgenden Lemmata (siehe [12]):

Lemma 2.21. *u erfülle die Helmholtz-Gleichung und die Abstrahlungsbedingung von Rellich und sei R_0 so groß, dass $\Omega \subset B_{R_0}(0)$ gilt. Gilt nun für ein $R > R_0$*

$$Im \int_{\partial B_R} u(x) \frac{\partial \overline{u}}{\partial r}(x) ds_x \geq 0, \quad r = |x|,$$

dann folgt $u = 0$ in Ω^c.

Lemma 2.22. *u erfülle das äussere Dirichlet-Randwertproblem* (2.3) *oder Neumann-Randwertproblem* (2.4) *mit den Randdaten $g_d(x) = 0$ oder $g_n(x) = 0$ für $x \in \Gamma$. Dann gilt für $v \in H^1_{loc}(\Omega^c)$ und für alle $R > R_0$*

$$\int_{B_R(0)\setminus\Omega} (\nabla u \nabla \overline{v} - k^2 u \overline{v}) dx - \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} u ds_x = 0.$$

Nun kann man leicht die Eindeutigkeit der Lösung des äusseren Dirichlet- bzw. Neumann-Randwertproblems zeigen:

Man nehme an, es gäbe zwei Lösungen u_1 und u_2. Man betrachte die Differenz der Lösungen $u = u_1 - u_2$. Diese erfüllt ebenfalls das äussere Dirichlet- bzw. Neumann-Randwertproblem mit den Randdaten Null. Also kann man für u Lemma 2.22 anwenden. Für den Imaginärteil der Gleichung aus Lemma 2.22 gilt dann

$$\text{Im} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial r} \overline{u} ds_x = 0.$$

Mit Lemma 2.21 folgt schließlich $u = 0$.

□

2.4 Darstellungsformeln

Die Lösung der äusseren Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme lässt sich als Oberflächenintegral darstellen. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten. Einerseits gibt es indirekte Ansätze, also Darstellungen der Lösung mit einer unbekannten Dichtefunktion im Integranden des Oberflächenpotentials, andererseits gibt es direkte Ansätze, bei denen die Cauchy-Daten der Lösung im Integranden stehen.

2.4.1 Indirekter Ansatz

Die Fundamentallösung für die Helmholtz-Gleichung lautet

$$U_k^*(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}^3.$$

Die Fundamentallösung hat eine Singularität an der Stelle $x = y$ und es gilt

$$\Delta U_k^*(x,y) + k^2 U_k^*(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq y.$$

Da die Fundamentallösung die Helmholtz-Gleichung erfüllt, löst das folgende Oberflächenpotential die Helmholtz-Gleichung

$$u(x) = \int_\Gamma U_k^*(x,y)w(x)ds_y = (\widetilde{V}_k w)(x) \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^c$$

mit einer unbekannten Dichtefunktion $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Dieses Integral bezeichnet man auch als Einfachschichtpotential. $\widetilde{V}_k$ kann man auch als beschränkte und lineare Abbildung auffassen mit

$$\widetilde{V}_k : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^1_{\text{loc}}(\Omega^c)$$

(siehe [12], Theorem 3.6). Ausserdem erfüllt $\widetilde{V}_k$ die Sommerfeldschen Abstrahlungsbedingungen:

Lemma 2.23. *Für $u(x) = (\widetilde{V}_k w)(x)$ gilt*

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r}u(x) - iku(x)\right) = 0 \quad \textit{für } r = |x|.$$

Beweis: Da $x \notin \Gamma$ ist, kann man die Differentiation mit der Integration vertauschen:

$$\frac{\partial}{\partial r}u(x) = \frac{(x, \nabla_x u(x))}{|x|} = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{(x, x-y)}{|x||x-y|^2}e^{ik|x-y|}\left(ik - \frac{1}{|x-y|}\right)w(y)ds_y.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} r\left|\frac{\partial}{\partial r}u(x) - iku(x)\right| &\leq \frac{|x|}{4\pi}\int_\Gamma \left|\frac{ik}{|x-y|}\left(\frac{(x,x-y)}{|x||x-y|} - 1\right) - \frac{(x,x-y)}{|x||x-y|^3}\right| |w(y)|ds_y \\ &\leq \frac{|x|}{4\pi}\sup_{y\in\Gamma}|w(y)| \int_\Gamma \left\{\frac{k}{|x-y|}\left|\frac{(x,x-y)}{|x||x-y|} - 1\right| + \frac{1}{|x-y|^2}\right\} ds_y \to 0 \end{aligned}$$

für $|x| \to \infty$.

$\square$

Eine Lösung der Helmholtz-Gleichung kann man auch durch das Doppelschichtpotential

$$u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} U_k^*(x,y) v(y) ds_y = (W_k v)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c$$

mit einer unbekannten Dichtefunktion $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ darstellen. W_k definiert wieder eine lineare, beschränkte Abbildung

$$W_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1_{\text{loc}}(\Omega^c).$$

Wie das Einfachschichtpotential erfüllt auch das Doppelschichtpotential die Sommerfeldsche Abstrahlungsbedingung:

Lemma 2.24. *Für $u(x) = (W_k w)(x)$ gilt*

$$\lim_{r\to\infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} u(x) - iku(x) \right) = 0 \quad \textit{für } r = |x|.$$

Der Beweis erfolgt analog zu dem Beweis für das Einfachschichtpotential.

2.4.2 Direkter Ansatz

Darstellungsformel für den Innenraum

Satz 2.25. *Für eine Lösung der Helmholtz-Gleichung in einem Gebiet Ω mit Rand Γ gilt die folgende Darstellungsformel*

$$u(x) = \int_\Gamma U_k^*(x,y) \gamma_1^{int} u(y) ds_y - \int_\Gamma \gamma_{1,y}^{int} U_k^*(x,y) \gamma_0^{int} u(y) ds_y, \qquad x \in \Omega.$$

Beweis: Man wähle einen festen Punkt x in Ω und lege eine Kugel $B_\varepsilon(x)$ um diesen Punkt mit einem Radius $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Es sei $\Omega \setminus B_\varepsilon(x) =: \Omega_\varepsilon$ und $v(y) = U_k^*(x,y)$, dann gilt die zweite Greensche Integralformel

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (Lu)(y) v(y) dy - \int_{\Omega_\varepsilon} (Lv)(y) u(y) dy =$$
$$\int_\Gamma v(y) \frac{\partial u}{\partial n_y} ds_y - \int_\Gamma u(y) \frac{\partial v}{\partial n_y} ds_y - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} v(y) \frac{\partial u}{\partial n_y} ds_y}_{(I_1)} + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial v}{\partial n_y} ds_y}_{(I_2)}.$$

Laut Voraussetzung gilt $Lu = 0$, wegen $|x-y| > 0$ für $y \in \Omega_\varepsilon$ folgt auch $Lv = 0$. Damit sind die beiden Gebietsintegrale auf der linken Seite gleich Null. Zu untersuchen sind nun die beiden Randintegrale (I_1) und (I_2) :

$$\begin{aligned}
|(I_1)| &= \left| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} U_k^*(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_y} ds_y \right| \\
&\leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} |n_y \cdot \nabla u(y)| ds_y \\
&\leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sup_{y\in\Omega} \|\nabla u(y)\|_2 \int\limits_{B_\varepsilon(x)} ds_y \\
&= \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} \sup_{y\in\Omega} \|\nabla u(y)\|_2 = \varepsilon \|\nabla u\|_{L_\infty(\Omega)} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Aus

$$\nabla_y U_k^*(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|^2}(y-x)\left(ik - \frac{1}{|x-y|}\right)$$

und $n_y = \dfrac{x-y}{|x-y|}$ folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_\varepsilon(x)} \frac{\partial U_k^*(x,y)}{\partial n_y} u(y) ds_y &= \int\limits_{B_\varepsilon(x)} n_y \cdot \nabla_y U_k^*(x,y) u(y) ds_y \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon}\right) u(y) ds_y \\
&= \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon}\right) \int\limits_{B_\varepsilon(x)} u(y) ds_y \\
&= \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon}\right) 4\pi\varepsilon^2\, u(\xi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -u(x)
\end{aligned}$$

laut dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, wobei $\xi \in B_\varepsilon(x)$. Setzt man dieses Ergebnis in die Greensche Formel ein, dann erhält man die Darstellungsformel

$$u(x) = \int_\Gamma U_k^*(x,y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) ds_y - \int_\Gamma \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(x,y) \gamma_0^{\text{int}} u(y) ds_y.$$

□

Mit Hilfe des oben definierten Einfach- und Doppelschichtpotentials, lässt sich die Darstellungsformel wie folgt schreiben:

$$u(x) = (\widetilde{V}_k \gamma_1^{\text{int}} u)(x) - (W_k \gamma_0^{\text{int}} u)(x), \quad x \in \Omega.$$

Darstellungsformel für den Aussenraum

Für das Aussenraumproblem lässt sich auch eine Darstellungsformel herleiten, man muss aber an die Lösung eine zusätzliche Bedingung an das Abklingverhalten stellen:

Satz 2.26. *Für eine Lösung der Helmholtz-Gleichung im Aussenraum Ω^c, die die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial n_y} - iku \right|^2 ds_y = 0$$

erfüllt, gilt die folgende Darstellungsformel

$$u(x) = -\int_\Gamma U_k^*(x,y)\gamma_1^{ext}u(y)ds_y + \int_\Gamma \gamma_{1,y}^{int}U_k^*(x,y)\gamma_0^{ext}u(y)ds_y \qquad \text{für } x \in \Omega^c.$$

Beweis: Sei $\Omega_R = B_R(x) \setminus \overline{\Omega}$ wobei $x \in \Omega^c$ und R so gewählt werden, dass $\overline{\Omega} \subset B_R(x)$. Für Ω_R kann man nun die Darstellungsformel aus Theorem 2.1 anwenden,

$$\begin{aligned} u(x) = &-\int_\Gamma U_k^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_y}ds_y + \int\limits_\Gamma u(y)\frac{\partial U_k^*(x,y)}{\partial n_y}ds_y + \\ &\underbrace{\int\limits_{\partial B_R(x)} U_k^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_y}ds_y}_{(I_1)} - \underbrace{\int\limits_{\partial B_R(x)} u(y)\frac{\partial U_k^*(x,y)}{\partial n_y}ds_y}_{(I_2)}. \end{aligned}$$

Man muss nun das Verhalten der Integrale (I_1) und (I_2) für $R \to \infty$ untersuchen. Zuerst beweist man folgende Aussage:

$$\int\limits_{\partial B_R(x)} |u(y)|^2 ds_y = \mathcal{O}(1). \tag{2.6}$$

Wendet man die Greensche Formel für $v = \overline{u}$ an, so erhält man

$$\int\limits_{\partial B_R(x)} u\frac{\partial \overline{u}}{\partial n_y}ds_y - \int_\Gamma u\frac{\partial \overline{u}}{\partial n_y}ds_y = \int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dy - k^2 \int_{\Omega_R} |u|^2 dy.$$

Durch Bildung des Imaginärteils dieser Gleichung ergibt sich

$$\mathrm{Im} \int\limits_{\partial B_R(x)} u\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}ds_y = \mathrm{Im}\int\limits_\Gamma u\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}ds_y.$$

Weiters gilt nach der Sommerfeldschen Abstrahlungsbedingung

$$0 = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R(x)} \left|\frac{\partial u}{\partial n_y} - iku\right|^2 ds_y = \int\limits_{\partial B_R(x)} \left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial n_y}\right|^2 + k^2|u|^2 + 2k\mathrm{Im}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial n_y}\right)\right\} ds_y$$

und somit

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\partial B_R(x)} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial n_y} \right|^2 + k^2|u|^2 \right\} ds_y = -2k\mathrm{Im} \int\limits_{\Gamma} u \frac{\partial \overline{u}}{\partial n} ds_y.$$

Da beide Terme im Integranden auf der linken Seite nicht-negativ sind, folgt somit die Behauptung (2.6).
Durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung und

$$\frac{\partial U_k^*(x,y)}{\partial n} - ikU_k^*(x,y) = \mathcal{O}(1/|x-y|^2)$$

folgt

$$\hat{I}_1 := \int\limits_{\partial B_R(x)} u(y) \left(\frac{\partial U_k^*(x,y)}{\partial n_y} - ikU_k^*(x,y) \right) ds_y \to 0 \quad \text{für } R \to \infty$$

und mit $U_k^*(x,y) = \mathcal{O}(1/|x-y|)$

$$\hat{I}_2 := \int\limits_{\partial B_R(x)} U_k^*(x,y) \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - iku(y) \right) ds_y \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

Daher gilt

$$(I_1) - (I_2) = \hat{I}_1 - \hat{I}_2 = \int\limits_{\partial B_R(x)} \left\{ u(y) \frac{\partial U_k^*(x,y)}{\partial n_y} - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} U_k^*(x,y) \right\} ds_y \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

□

Für die Lösung des Aussenraumproblems erhält man also die Darstellungsformel

$$u(x) = -(\widetilde{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} u)(x) + (W_k \gamma_0^{\text{ext}} u)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c.$$

Somit haben wir für die Lösung des äusseren Dirichlet- bzw. Neumann-Randwertproblems die folgenden Darstellungen erhalten:

- Einfachschichtpotentialansatz

$$u(x) = (\widetilde{V}_k w)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c \tag{2.7}$$

  mit einer unbekannten Dichtefunktion $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

- Doppelschichtpotentialansatz

$$u(x) = (W_k v)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c \tag{2.8}$$

  mit einer unbekannten Dichtefunktion $v \in H^{1/2}(\Gamma)$.

- Direkter Ansatz
$$u(x) = -(\widetilde{V}_k \gamma_1^{\text{ext}} u)(x) + (W_k \gamma_0^{\text{ext}} u)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c \tag{2.9}$$
mit unbekannter Neumann-Spur $\gamma_1^{\text{ext}} u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ im Falle des Dirichlet-Randwertproblems bzw. unbekannter Dirichlet-Spur $\gamma_0^{\text{ext}} u \in H^{1/2}(\Gamma)$ im Falle des Neumann-Randwertproblems.

Um nun die unbekannten Dichtefunktionen bzw. das unbekannte Dirichlet- oder Neumann-Datum zu bestimmen, lässt man die Variable x in der jeweiligen Darstellungsformel gegen einen Punkt am Rand laufen. Da der Integrand des Einfach- und Doppelschichtpotentials im Fall $x \in \Gamma$ eine Singularität besitzt, bedarf es einer genaueren Untersuchung des Grenzverhaltens beider Potentiale.

2.5 Randintegraloperatoren

2.5.1 Das Einfachschichtpotential

Wendet man die äussere Spur γ_0^{ext} auf $\widetilde{V}_k$ an, erhält man den Operator $V_k := \gamma_0^{\text{ext}} \widetilde{V}_k$.
Es gilt
$$V_k : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$$
und V_k ist ein beschränkter und linearer Operator, d.h.
$$\|V_k w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_2^V \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Lemma 2.27. *Für $w \in L_\infty(\Gamma)$ gilt die Darstellung*
$$(V_k w)(x) = \int_\Gamma U_k^*(x,y) w(y) ds_y \quad \textit{für } x \in \Gamma$$
als schwach singuläres Oberflächenintegral.

Der Beweis folgt analog wie für die Laplace-Gleichung (siehe [32], Lemma 6.4). Weiters gilt die folgende Sprungbedinung
$$(\gamma_0^{\text{ext}} \widetilde{V}_k)(x) - (\gamma_0^{\text{int}} \widetilde{V}_k)(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Um das Neumann-Randwertproblem zu lösen, muss man $\gamma_1^{\text{ext}} \widetilde{V}_k$ berechnen:
$$\gamma_1^{\text{ext}} \widetilde{V}_k : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$$
ist ein beschränkter, linearer Operator.

Lemma 2.28. *Für den Sprung der Normalenableitung des Einfachschichtpotentials gilt*
$$[\gamma_1 \widetilde{V}_k w] = -w.$$

Beweis: Sei $u(x) = (\widetilde{V}_k w)(x)$ für $x \in \Omega \cup \Omega^c$, dann gilt $Lu = 0$ in $\Omega \cup \Omega^c$, das heisst man kann die 3. Greensche Formel (Satz 2.16) anwenden:

$$\langle Lu, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle [\gamma_0 u], \gamma_1 \varphi \rangle_\Gamma - \langle [\gamma_1 u], \gamma_0 \varphi \rangle_\Gamma \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Für die linke Seite der Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
\langle Lu, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} L_x \int_\Gamma U_k^*(x,y) w(y) ds_y \, \varphi(x) dx \\
&= \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^3} L_x U_k^*(x,y) \varphi(x) dx \, w(y) ds_y \\
&= \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x-y) \varphi(x) dx \, w(y) ds_y \\
&= \int_\Gamma w(y) \varphi(y) ds_y = \langle w, \gamma_0 \varphi \rangle_\Gamma .
\end{aligned}$$

Da $[\gamma_0 \widetilde{V}_k w] = 0$ ist, folgt somit

$$\langle w, \gamma_0 \varphi \rangle_\Gamma = -\langle [\gamma_1 u], \gamma_0 \varphi \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Da $\gamma_0 C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ in $H^{1/2}(\Gamma)$ dicht ist (siehe [29], Lemma 2.8.4), folgt die Behauptung.

□

Lemma 2.29. *Es gelten die Beziehungen*

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{int} (\widetilde{V}_k w)(x) &= \frac{1}{2} w(x) + (K_k' w)(x), \\
\gamma_1^{ext} (\widetilde{V}_k w)(x) &= -\frac{1}{2} w(x) + (K_k' w)(x)
\end{aligned}$$

im Sinn von $H^{-1/2}(\Gamma)$, wobei

$$(K' w)(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{y \in \Gamma : |y-x| \geq \varepsilon} \gamma_{1,x}^{int} U_k^*(x,y) w(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Beweis: Zuerst wird die Formel für die innere Spur bewiesen, die Formel für die äussere Spur folgt dann aus Lemma 2.28.
Sei $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$, dann ist $\widetilde{V}_k w$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung in Ω und sei $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, dann folgt mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \gamma_1^{\text{int}} u(x) \gamma_0^{\text{int}} \varphi(x) ds_x &= \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx - k^2 \int_\Omega u(x) \varphi(x) dx \\
&= \underbrace{\int_\Omega \nabla_x \int_\Gamma U_k^*(x,y) w(y) ds_y \nabla_x \varphi(x) dx}_{(*)} - k^2 \int_\Omega u(x) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhält man

$$(*) = \int_\Omega \nabla_x \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{y\in\Gamma:|x-y|\geq\varepsilon} U_k^*(x,y)w(y)ds_y \right) \nabla_x\varphi(x)dx$$
$$= \int_\Gamma w(y) \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|\geq\varepsilon} \nabla_x U_k^*(x,y)\nabla_x\varphi(x)dx}_{(**)}\, ds_y.$$

Wendet man wiederum die Greensche Formel an, so erhält man

$$(**) = k^2 \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|\geq\varepsilon} U_k^*(x,y)\varphi(x)dx +$$
$$\int\limits_{x\in\Gamma:|x-y|\geq\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)\gamma_0^{\text{int}}\varphi(x)ds_x + \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)\varphi(x)ds_x.$$

Das dritte Integral lässt sich folgendermassen aufteilen:

$$\int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)\varphi(x)ds_x$$
$$= \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)[\varphi(x)-\varphi(y)]ds_x + \varphi(y) \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)ds_x$$

wobei gilt

$$\left| \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)[\varphi(x)-\varphi(y)]ds_x \right|$$
$$\leq \max_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} |\varphi(x)-\varphi(y)| \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} |\gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)|ds_x.$$

Weiters ist

$$\int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} |\gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)|ds_x \leq \int\limits_{x\in\mathbb{R}^3:|x-y|=\varepsilon} |\gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)|ds_x$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{x\in\mathbb{R}^3:|x-y|=\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} \left| ik - \frac{1}{|x-y|} \right| ds_x = |ik\varepsilon - 1| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Daraus folgt

$$\left| \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)[\varphi(x)-\varphi(y)]ds_x \right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Mit $n_x = \dfrac{y-x}{|x-y|}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)ds_x &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} (x-y,n_x)\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|^2}\left(ik - \frac{1}{|x-y|}\right)ds_x \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|=\varepsilon} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\left(\frac{1}{|x-y|} - ik\right)ds_x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

für eine hinreichend glatte Oberfläche Γ. Insgesamt erhält man dann

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \gamma_1^{\text{int}} u(x)\gamma_0^{\text{int}}\varphi(x)ds_x = \\
&\int_\Gamma w(y)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{x\in\Gamma:|x-y|\geq\varepsilon} \gamma_{1,x}^{\text{int}} U_k^*(x,y)\gamma_0^{\text{int}}\varphi(x)ds_x + \frac{1}{2}\varphi(y)\right]ds_y \\
&+k^2\int_\Gamma w(y)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{x\in\Omega:|x-y|\geq\varepsilon} U_k^*(x,y)\varphi(x)dxds_y - k^2\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge folgt

$$k^2\int_\Gamma w(y)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{x\in\Omega:|x-y|\geq\varepsilon} U_k^*(x,y)\varphi(x)dxds_y - k^2\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$$

und somit

$$\int_\Gamma \gamma_1^{\text{int}} u(x)\gamma_0^{\text{int}}\varphi(x)ds_x = \int_\Gamma \left[\frac{1}{2}w(x) + (K'w)(x)\right]\varphi(x)ds_x.$$

□

Sei V_0 das Einfachschichtpotential des Laplace-Operators Δ. Dann gilt:

Lemma 2.30. *Der Operator*

$$V_k - V_0 : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$$

ist kompakt.

Für den Beweis siehe [29], Lemma 3.9.8.

2.5.2 Das Doppelschichtpotential

Durch Anwendung von γ_0^{ext}, bzw. γ_1^{ext} auf das Oberflächenpotential W_k erhält man beschränkte lineare Abbildungen

$$
\begin{aligned}
\gamma_0^{\text{ext}} W_k &: H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma), \\
\gamma_1^{\text{ext}} W_k &: H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma),
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\|\gamma_0^{\text{ext}} W v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} &\leq c_2^K \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \\
\|\gamma_1^{\text{ext}} W v\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &\leq c_2^D \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}
$$

Lemma 2.31. *Für die Sprünge der Dirichlet- bzw. Neumann-Spur des Doppelschichtpotentials gilt*

$$
\begin{aligned}
[\gamma_0 W_k v] &= \gamma_0^{ext} W_k v - \gamma_0^{int} W_k v = v, \\
[\gamma_1 W_k v] &= \gamma_1^{ext} W_k v - \gamma_1^{int} W_k v = 0.
\end{aligned}
$$

Beweis: $u(x) = (W_k v)(x)$ ist eine Lösung der Helmholtz-Gleichung für $x \in \Omega \cup \Omega^c$, dann gilt die 3. Greensche Formel (Satz 2.16):

$$\langle Lu, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle [\gamma_0 u], \gamma_1 \varphi \rangle_\Gamma - \langle [\gamma_1 u], \gamma_0 \varphi \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Für die linke Seite der Gleichung gilt

$$
\begin{aligned}
\langle Lu, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} L_x \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} U_k^*(x, y) v(y) ds_y \, \varphi(x) dx \\
&= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} \int_{\mathbb{R}^3} L_x U_k^*(x, y) \varphi(x) dx \, v(y) ds_y \\
&= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x - y) \varphi(x) dx \, v(y) ds_y \\
&= \int_\Gamma v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \varphi(y) ds_y = \langle v, \gamma_1 \varphi \rangle_\Gamma.
\end{aligned}
$$

In die 3. Greensche Formel eingesetzt ergibt sich schließlich

$$\langle [\gamma_0 u] - v, \gamma_1 \varphi \rangle_\Gamma = \langle [\gamma_1 u], \gamma_0 \varphi \rangle_\Gamma.$$

Da $\gamma_0 C_0^\infty \times \gamma_1 C_0^\infty$ in $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ dicht ist (siehe [29], Lemma 2.8.4), müssen beide Seiten der Gleichung gleich Null sein und somit folgt die Behauptung.

$\square$

Lemma 2.32. *Für $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ gelten die Beziehungen*

$$\begin{aligned}\gamma_0^{int}(W_k v)(x) &= -\frac{1}{2}v(x) + (Kv)(x),\\ \gamma_0^{ext}(W_k v)(x) &= \frac{1}{2}v(x) + (Kv)(x)\end{aligned}$$

wobei

$$(Kv)(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{y\in\Gamma:|y-x|\geq\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_y}U_k^*(x,y)v(y)ds_y \quad \textit{für } x \in \Gamma.$$

Beweis: Hier wird wieder die Formel für die innere Spur bewiesen, die Formel für die äussere Spur folgt aus Lemma 2.31.
Für ein $\varepsilon > 0$ definiert man

$$(K_\varepsilon v)(x) = \int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|\geq\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_y}U_k^*(x,y)v(y)ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Weiters sei $\tilde{x} \in \Omega$, sodass $|x-\tilde{x}| < \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}(Wv)(\tilde{x}) - (K_\varepsilon v)(x) = &\int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|\geq\varepsilon}[\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(\tilde{x},y) - \gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(x,y)]v(y)ds_y\\ &+ \int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|<\varepsilon}[\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(\tilde{x},y)]v(y)ds_y =\\ &\int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|\geq\varepsilon}[\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(\tilde{x},y) - \gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(x,y)]v(y)ds_y\\ + \int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|<\varepsilon}[\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(\tilde{x},y)][v(y)-v(x)]ds_y &+ v(x)\int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|<\varepsilon}\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(\tilde{x},y)ds_y.\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt

$$\lim_{\tilde{x}\to x}\int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|\geq\varepsilon}[\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(\tilde{x},y) - \gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(x,y)]v(y)ds_y = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$, der zweite Summand verschwindet ebenfalls, da

$$\left|\int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|<\varepsilon}[\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(\tilde{x},y)][v(y)-v(x)]ds_y\right| \leq \sup_{y\in\Gamma:|y-x|<\varepsilon}|v(x)-v(y)|\int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|<\varepsilon}|\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(x,y)|ds_y$$

und für $\tilde{x} \in \Omega$

$$\int\limits_\Gamma |\gamma_{1,y}^{\text{int}}U_k^*(x,y)|ds_y < M$$

gilt. Sei nun

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \Omega : |y-x| < \varepsilon\},$$

dann folgt aus

$$\partial B_\varepsilon(x) = \{y \in \Gamma : |y-x| < \varepsilon\} \cup \{y \in \Omega : |y-x| = \varepsilon\}$$

$$\int\limits_{y\in\Gamma:|y-x|<\varepsilon} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(\tilde{x},y)ds_y = \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(\tilde{x},y)ds_y - \int\limits_{y\in\Omega:|y-x|=\varepsilon} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(\tilde{x},y)ds_y.$$

Setzt man nun $u(x) = 1$ in die Darstellungsformel für das Gebiet $B_\varepsilon(x)$ aus Satz 2.4.2 ein ($u \equiv 1$ ist Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung $\Delta u + k^2 u = k^2$), so erhält man

$$1 = -\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(\tilde{x},y)ds_y + k^2 \int\limits_{B_\varepsilon(x)} U_k^*(\tilde{x},y)dy.$$

Das Volumenintegral ist beschränkt und somit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(\tilde{x},y)ds_y = -1.$$

Analog zum Beweis von Lemma 2.28 folgt nun

$$\lim_{\tilde{x}\to x} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{y\in\Omega:|y-x|=\varepsilon} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(\tilde{x},y)ds_y = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{y\in\Omega:|y-x|=\varepsilon} \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(x,y)ds_y = -\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Behauptung für die innere Spur bewiesen.

$\square$

Lemma 2.33. *Für alle $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ gilt*

$$\langle K_k\varphi, \psi\rangle_\Gamma = \langle \varphi, K'_{-k}\psi\rangle_\Gamma,$$

d.h. K'_{-k} ist der adjungierte Operator von K_k.

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen und Vertauschen der Integrationsreihenfolge.

2.5.3 Hypersingulärer Operator

Der hypersinguläre Integraloperator ist definiert durch die negativ genommene Neumann-Spur des Doppelschichtpotentials:

$$(D_k v)(x) = -(\gamma_1^{\text{ext}} W_k v)(x) = -\gamma_1^{\text{ext}} \int_\Gamma \gamma_{1,y}^{\text{int}} U^*(x,y)v(y)ds_y.$$

Der Integrand des hypersingulären Operators besitzt eine hypersinguläre Singularität, d.h. der Integrand exisitert nicht als Cauchy-Hauptwert. Durch partielle Integration erhält man die folgende Darstellung der durch D_k induzierten Bilinearform (siehe [27], [25])

$$\langle D_k\varphi, \psi\rangle_\Gamma = \langle V_k \underline{\operatorname{curl}}_\Gamma \varphi, \underline{\operatorname{curl}}_\Gamma \psi\rangle_\Gamma - k^2\langle V_k n\varphi, n\psi\rangle_\Gamma$$

mit dem Oberflächen-curl

$$\underline{\operatorname{curl}}_\Gamma \varphi(x) = n(x) \times \gamma_0 \nabla\tilde{\varphi}(x),$$

wobei $\tilde{\varphi}$ eine Forsetzung von φ vom Rand Γ in das Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ ist. Für vektorwertige Argumente ist das Skalarprodukt $\langle ., .\rangle_\Gamma$ wie folgt definiert:

$$\langle \vec{w}, \vec{v}\rangle_\Gamma = \int_\Gamma \vec{w}(x) \cdot \vec{v}(x) ds_x.$$

Sei D_0 der hypersinguläre Integraloperator des Laplace Operators Δ, dann gilt:

Lemma 2.34. *Der Operator*

$$D_k - D_0 : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$$

ist kompakt.

Für den Beweis siehe [29], Lemma 3.9.8.

2.6 Randintegralgleichungen

Verwendet man nun den Einfachschichtpotentialansatz (2.7) zur Lösung des Dirichlet-Randwertproblems (2.3) erhält man die folgende Randintegralgleichung

$$(V_k w)(x) = g_d(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{2.10}$$

Für die Lösung des Neumann-Randwertproblems (2.4) erhält man die Randintegralgleichung

$$-\frac{1}{2}w(x) + (K_k' w)(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{2.11}$$

Für die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems mit dem Doppelschichtpotentialansatz erhält man die Randintegralgleichung

$$-\frac{1}{2}v(x) + (K_k v)(x) = g_d(x) \quad \text{für } x \in \Gamma, \tag{2.12}$$

bzw. für das Neumann-Randwertproblem

$$-(D_k v)(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{2.13}$$

Für die direkte Darstellungsformel

$$u(x) = -(\widetilde{V}_k\gamma_1^{\text{ext}}u)(x) + (W_k\gamma_0^{\text{ext}}u)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c$$

erhält man zwei Randintegralgleichungen,

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{\text{ext}}u &= (\frac{1}{2}I + K_k)\gamma_0^{\text{ext}}u - V_k\gamma_1^{\text{ext}}u,\\
\gamma_1^{\text{ext}}u &= -D_k\gamma_0^{\text{ext}}u + (\frac{1}{2}I - K_k')\gamma_1^{\text{ext}}u.
\end{aligned}$$

Zur Lösung des Dirichlet-Randwertproblems muss man nun eine der beiden Randintegralgleichungen nach den Neumann-Daten lösen:

$$(V_k\gamma_1^{\text{ext}}u)(x) = (-\frac{1}{2}I + K_k)g_d(x) \quad \text{für } x \in \Gamma, \tag{2.14}$$

bzw.

$$(\frac{1}{2}I + K_k')\gamma_1^{\text{ext}}u(x) = -(D_kg_d)(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{2.15}$$

Für die Lösung des Neumann-Randwertproblems erhält man die folgenden Randintegralgleichungen

$$(-\frac{1}{2}I + K_k)\gamma_0^{\text{ext}}u(x) = (V_kg_n)(x) \quad \text{für } x \in \Gamma, \tag{2.16}$$

bzw.

$$(D_k\gamma_0^{\text{ext}}u)(x) = -(\frac{1}{2}I + K_k')g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{2.17}$$

Die Randintegralgleichungen (2.14) und (2.17) nennt man Integralgleichungen 1. Art, die Randintegralgleichungen (2.15) und (2.16) Integralgleichungen 2. Art.
Für das Innenraumproblem erhält man ein die folgenden Randintegralgleichungen

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{\text{int}}u &= (\frac{1}{2}I - K_k)\gamma_0^{\text{int}}u + V_k\gamma_1^{\text{int}}u,\\
\gamma_1^{\text{int}}u &= D_k\gamma_0^{\text{int}}u + (\frac{1}{2}I + K_k')\gamma_1^{\text{int}}u.
\end{aligned}$$

Die Systeme für Innen- und Aussenraum lassen sich auch mit Hilfe des Calderon-Projektors formulieren:

$$\begin{pmatrix}\gamma_0^{\text{ext}}u\\ \gamma_1^{\text{ext}}u\end{pmatrix} = \mathcal{C}_{\text{ext}}\begin{pmatrix}\gamma_0^{\text{ext}}u\\ \gamma_1^{\text{ext}}u\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\gamma_0^{\text{int}}u\\ \gamma_1^{\text{int}}u\end{pmatrix} = \mathcal{C}_{\text{int}}\begin{pmatrix}\gamma_0^{\text{int}}u\\ \gamma_1^{\text{int}}u\end{pmatrix}$$

wobei

$$\mathcal{C}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix}(\frac{1}{2}I + K_k) & -V_k\\ -D_k & (\frac{1}{2}I - K_k')\end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{\text{int}} = \begin{pmatrix}(\frac{1}{2}I - K_k) & V_k\\ D_k & (\frac{1}{2}I + K_k')\end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Lemma 2.35. *$\mathcal{C}_{ext}$ und $\mathcal{C}_{int}$ sind Projektionsoperatoren, d.h. es gilt*

$$\mathcal{C}_{ext}^2 = \mathcal{C}_{ext}$$

und

$$\mathcal{C}_{int}^2 = \mathcal{C}_{int}.$$

Der Beweis lässt sich analog zu [32], Lemma 6.12 durchführen.

Korollar 2.36. *Aus der Projektionseigenschaft des Calderon-Projektors folgen die Relationen*

$$\begin{aligned} V_k D_k &= (\frac{1}{2}I + K_k)(\frac{1}{2}I - K_k), \\ D_k V_k &= (\frac{1}{2}I + K_k')(\frac{1}{2}I - K_k'), \\ D_k K_k &= K_k' D_k, \\ K_k V_k &= V_k K_k'. \end{aligned}$$

3 Modifizierte Randintegralgleichungen

Die Lösung der Aussenraumprobleme durch die Randelementmethode ist vorteilhaft, da nur der Rand des Gebietes diskretisiert werden muss, und die Sommerfeldschen Abstrahlungsbedingungen automatisch von den Oberflächenpotentialen erfüllt werden. Ein wesentlicher Nachteil besteht aber darin, dass das System von Randintegralgleichungen für den Aussenraum nicht für jede Wellenzahl k eindeutig lösbar ist, obwohl das Aussenraumproblem selbst eine eindeutige Lösung besitzt.

Satz 3.1. *Ist $k^2 = \lambda$ ein Eigenwert des inneren Dirichlet-Problems für den Laplace-Operator, d.h.*

$$\begin{aligned} -\Delta u_\lambda(x) &= \lambda u_\lambda(x), & x &\in \Omega, \\ u_\lambda(x) &= 0, & x &\in \Gamma, \end{aligned}$$

dann gilt $\gamma_1^{int} u_\lambda \in \mathcal{N}(V_k)$ und $\gamma_1^{int} u_\lambda \in \mathcal{N}(-\frac{1}{2}I + K_k')$.

Beweis: Das obige Eigenwertproblem läßt sich auch als Innenraumproblem für die Helmholtz-Gleichung formulieren. Man betrachte nun das System von Randintegralgleichungen für dieses Problem,

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}} u_\lambda &= (\frac{1}{2}I - K_k)\gamma_0^{\text{int}} u_\lambda + V_k \gamma_1^{\text{int}} u_\lambda, \\ \gamma_1^{\text{int}} u_\lambda &= D_k \gamma_0^{\text{int}} u_\lambda + (\frac{1}{2}I + K_k')\gamma_1^{\text{int}} u_\lambda. \end{aligned}$$

Da $\gamma_0^{\text{int}} u_\lambda = 0$ ist, folgt hieraus $V_k \gamma_1^{\text{int}} u_\lambda = 0$, d.h. $\gamma_1^{\text{int}} u \in \mathcal{N}(V_k)$, analog ergibt sich $\gamma_1^{\text{int}} u \in \mathcal{N}(-\frac{1}{2}I + K_k')$.

□

Satz 3.2. *Ist $k^2 = \mu$ ein Eigenwert des inneren Neumann-Problems für den Laplace-Operator, d.h.*

$$\begin{aligned} -\Delta v_\mu(x) &= \mu v_\mu(x), & x &\in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} v_\mu(x) &= 0, & x &\in \Gamma, \end{aligned}$$

dann gilt $\gamma_0^{int} v_\mu \in \mathcal{N}(D_k)$ und $\gamma_0^{int} v_\mu \in \mathcal{N}(\frac{1}{2}I + K_k)$.

Beweis: Das obige Eigenwertproblem lässt sich auch als Innenraumproblem für die Helmholtz-Gleichung formulieren. Man betrachte nun das System von Randintegralgleichungen für dieses Problem,

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{int}} v_\mu &= (\frac{1}{2}I - K_k)\gamma_0^{\text{int}} v_\mu + V_k \gamma_1^{\text{int}} v_\mu, \\ \gamma_1^{\text{int}} v_\mu &= D_k \gamma_0^{\text{int}} v_\mu + (\frac{1}{2}I + K'_k)\gamma_1^{\text{int}} v_\mu.\end{aligned}$$

Da $\gamma_1^{\text{int}} v_\mu = 0$ ist, folgt hieraus $D_k \gamma_0^{\text{int}} v_\mu = 0$, d.h. $\gamma_0^{\text{int}} v \in \mathcal{N}(D_k)$, analog ergibt sich $\gamma_0^{\text{int}} v \in \mathcal{N}(\frac{1}{2}I + K_k)$.

□

Für die Eigenwertprobleme des Laplace-Operators gibt es abzählbar viele Eigenwerte, d.h. die Randintegraloperatoren V_k und D_k sind für abzählbar viele Wellenzahlen k nicht invertierbar, obwohl die jeweiligen Aussenraumprobleme der Helmholtz-Gleichung eine eindeutige Lösung besitzen.

Korollar 3.3. *Es gilt*

$$(-\frac{1}{2}I + K_k)g_d \in \mathcal{I}(V_k) \quad \forall g_d \in H^{1/2}(\Gamma)$$

und

$$(\frac{1}{2}I + K'_k)g_n \in \mathcal{I}(-D_k) \quad \forall g_n \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Beweis: Sei u die Lösung des äusseren Dirichlet Randwertproblems der Helmholtz-Gleichung mit den Dirichlet-Daten $\gamma_0^{\text{ext}} u = v$. Dann gilt die Randintegralgleichung (2.14)

$$(V_k \gamma_1^{\text{ext}} u)(x) = (-\frac{1}{2}I + K_k)g_d(x) \quad \text{für } x \in \Gamma,$$

daraus folgt

$$\langle V_k \gamma_1^{\text{ext}} u, q\rangle_\Gamma = \langle(-\frac{1}{2}I + K_k)g_d, q\rangle_\Gamma = \langle g_d, (-\frac{1}{2}I + K_{-k})q\rangle_\Gamma = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathcal{N}(V_k).$$

Für die Lösung des äusseren Neumann Randwertproblems mit dem Neumann-Datum $\gamma_1^{\text{ext}} = w$ gilt die Randintegralgleichung (2.17)

$$-(D_k \gamma_0^{\text{ext}} u)(x) = (\frac{1}{2}I + K'_k)g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma$$

und somit folgt analog

$$-\langle D_k \gamma_0^{\text{ext}} u, p\rangle_\Gamma = \langle(\frac{1}{2}I + K'_k)g_n, p\rangle_\Gamma = \langle g_n, (\frac{1}{2}I + K_{-k})p\rangle_\Gamma = 0 \quad \text{für alle } p \in \mathcal{N}(D_k).$$

Die Behauptungen folgen dann aus dem 'closed range theorem' (siehe z.B. [36], Satz 3.3).

□

Auf Grundlage dieser Eigenschaft wurde die CHIEF-Methode von Schenck (siehe [5]) zur Umgehung des Problems der Nichtinvertierbarkeit der Randintegraloperatoren bei bestimmten Wellezahlen entwickelt. Diese Methode wird hauptsächlich von Ingenieuren verwendet, sie ist aber bei hohen Frequenzen nicht stabil.

3.1 Der Ansatz von Brakhage und Werner

3.1.1 Dirichlet-Randwertproblem

1965 wurde von Brakhage und Werner (siehe [6]) vorgeschlagen, die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems in Gebieten mit glattem Rand Γ als komplexe Linearkombination von Einfach- und Doppelschichtpotential anzusetzen:

$$u(x) = (W_k w)(x) - i\eta(\widetilde{V}_k w)(x), \quad x \in \Omega^c.$$

Dabei ist $w \in L_2(\Gamma)$ eine zu bestimmende Dichtefunktion. Dieser Ansatz führt auf die folgende Randintegralgleichung

$$(\frac{1}{2}I + K_k)w(x) - i\eta(V_k w)(x) = g_d(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{3.1}$$

Über die eindeutige Lösung der Randintegralgleichung wurde in der Arbeit [6] von Brakhage und Werner der folgende Satz angegeben:

Satz 3.4. *Sei Ω ein Gebiet mit zweimal stetig differenzierbarem Rand Γ, dann hat die Randintegralgleichung*

$$(\frac{1}{2}I + K_k)w(x) - i\eta(V_k w)(x) = g_d(x) \quad \textit{für } x \in \Gamma$$

genau eine Lösung $w \in L_2(\Gamma)$.

Beweis: Da $\Gamma \in \mathcal{C}^2$ ist, existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|(n_y, y - x)| \le C|x - y|^2$$

(siehe [29], Lemma 2.2.14). Daher gilt

$$|\gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(x,y)| = \left| \frac{(n_y, y-x)}{|x-y|^2} \left(ik - \frac{1}{|x-y|} \right) \right| \le C \left| ik - \frac{1}{|x-y|} \right| \le \frac{\widetilde{C}(\Gamma)}{|x-y|}$$

und somit ist das Doppelschichtpotential

$$(K_k w)(x) = \int_\Gamma \gamma_{1,y}^{\text{int}} U_k^*(x,y) w(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma$$

ein schwach singuläres Integral und $K_k : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ daher kompakt. Das Einfachschichtpotential $V_k : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ ist ebenfalls kompakt, somit lässt sich $(\frac{1}{2}I + K_k) - i\eta V_k$ als Identität plus eine kompakte Störung auffassen. Daher ist die Fredholmsche Alternative anwendbar und es ist nur mehr die Injektivität der Randintegralgleichung zu zeigen. Dazu nehme man an, es gebe ein w, sodass gilt

$$(\frac{1}{2}I + K_k)w(x) - i\eta(V_k w)(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Da

$$u(x) = (W_k w)(x) - i\eta(\widetilde{V}_k w)(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$$

eine Lösung des Dirichlet-Randwertproblems im Aussenraum ist, muss

$$u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$$

gelten, da die Lösung im Aussenraum eindeutig ist. Daraus folgt $\gamma_1^{\text{ext}} u = 0$. Aus den Sprungrelationen (Lemma 2.31) für das Doppelschichtpotential folgt

$$\gamma_0^{\text{int}} u - \gamma_0^{\text{ext}} u = \gamma_0^{\text{int}} u = -w$$

und

$$\gamma_1^{\text{int}} u - \gamma_1^{\text{ext}} u = \gamma_1^{\text{int}} u = -i\eta w.$$

Setzt man dies in die Greensche Integralformel für Ω ein, so erhält man

$$i\eta \int_\Gamma |w(y)|^2 ds_y = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - k^2 \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht ein rein imaginärer und auf der rechten Seite ein reeller Ausdruck, d.h. es müssen beide Seite gleich Null sein, daraus folgt aber $w = 0$.

□

3.1.2 Neumann-Randwertproblem

Für die Lösung des Neumann-Randwertproblems macht man den Ansatz

$$u(x) = (W_k v)(x) + i\eta(\widetilde{V}_k v)(x), \quad x \in \Omega^c$$

mit $v \in L_2(\Gamma)$. Die Anwendung der äusseren Neumann-Spur auf diesen Ansatz führt auf die folgende Randintegralgleichung

$$-(D_k v)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')v(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{3.2}$$

Wie beim Dirichlet-Randwertproblem lässt sich ein Satz über die eindeutige Lösbarkeit dieser Randintegralgleichung formulieren:

Satz 3.5. *Sei Ω ein Gebiet mit zweimal stetig differenzierbarem Rand Γ, dann hat die Randintegralgleichung*

$$-(D_k v)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')v(x) = g_n(x) \quad \textit{für } x \in \Gamma$$

genau eine Lösung $v \in L_2(\Gamma)$.

Beweis: Wie im obigen Beweis für das Dirichlet-Randwertproblem lässt sich argumentieren, dass $K_k' : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ ein kompakter Operator ist. Laut Lemma 2.34 ist $D_k - D_0 : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ ein kompakter Operator, dann ist auch $C = D_k - D_0 + i\eta K_k' : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ kompakt. Somit erhält man die koerzive Linearform

$$|\langle(-D_k + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k') + C)\varphi, \varphi\rangle_\Gamma| = |\langle(-D_0 - i\eta\frac{1}{2}I)\varphi, \varphi\rangle_\Gamma| \geq c\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \geq c\|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Das heisst, der Randintegraloperator $-D_k + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')$ ist koerziv. Für den Beweis der Injektivität nehme man an, es gibt ein v, sodass

$$-D_k v + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')v = 0.$$

u sei dann definiert durch

$$u(x) = (W_k v)(x) + i\eta(\widetilde{V}_k v)(x) \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^c.$$

Da das Neumann-Randwertproblem der Helmholtz-Gleichung für den Aussenraum eine eindeutige Lösung besitzt, gilt $\gamma_0^{\text{ext}} u = 0$ und somit

$$\gamma_0^{\text{ext}} u - \gamma_0^{\text{int}} u = -\gamma_0^{\text{int}} u = v$$

bzw.

$$\gamma_1^{\text{ext}} u - \gamma_1^{\text{int}} u = -\gamma_1^{\text{int}} u = -i\eta v.$$

Setzt man dies in die Greensche Integralformel für Ω ein, so erhält man

$$i\eta \int_\Gamma |v(y)|^2 ds_y = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - k^2 \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Daraus folgt $v = 0$.

□

Beide Beweise setzen jedoch eine glatte Oberfläche Γ von Ω voraus. Bei Lipschitzgebieten sind die Operatoren K_k und K_k' nicht mehr kompakt.

3.2 Der Ansatz von Burton und Miller

Der Ansatz von Brakhage und Werner ist eine indirekte Formulierung, deren Dichtefunktion in der Regel keine physikalische Bedeutung besitzt. Eine direkte Formulierung, die für alle Wellenzahlen eine eindeutige Lösung besitzt, wurde von Burton und Miller 1971 gefunden. Die in der Arbeit [11] vorgeschlagene Methode führt wie beim Ansatz von Brakhage und Werner auf eine komplexe Linearkombination von Randintegraloperatoren. Der Zugang ist jedoch anders:

Man multipliziere die zweite Randintegralgleichung im Calderon-Projektor (2.18) für das Aussenraumproblem mit $i\eta$ und addiere sie zur ersten Randintegralgleichung:

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_0^{\text{ext}}u & = & (\frac{1}{2}I + K_k)\gamma_0^{\text{ext}}u & - & V_k\gamma_1^{\text{ext}}u, \\ \gamma_1^{\text{ext}}u & = & -D_k\gamma_0^{\text{ext}}u & + & (\frac{1}{2}I - K_k')\gamma_1^{\text{ext}}u \quad | \cdot i\eta. \end{array}$$

Das führt auf die folgende direkte Randintegralgleichung

$$\left(i\eta D_k - \frac{1}{2}I + K_k\right)\gamma_0^{\text{ext}}u = \left(V_k - i\eta\frac{1}{2}I - i\eta K_k'\right)\gamma_1^{\text{ext}}u. \tag{3.3}$$

Je nachdem ob man das Dirichlet- oder Neumann-Randwertproblem lösen will, muss man nun diese Randintgralgleichung nach $\gamma_0^{\text{ext}}u$ bzw. $\gamma_1^{\text{ext}}u$ auflösen. Die eindeutige Lösbarkeit der Randintgralgleichung für das Dirichlet- bzw. Neumann-Problem folgt wie in Satz 3.4 bzw. Satz 3.5.

3.3 Regularisierte Randintegralgleichungen

Bisher wurden die gesuchten Dichtefunktionen bzw. die unbekannten Cauchy-Daten als Funktionen in $L_2(\Gamma)$ aufgefasst. Das Problem ist nun, dass bei Lipschitz-Gebieten Ω die Randintegraloperatoren aus den Ansätzen von Brakhage und Werner bzw. Burton und Miller nicht mehr koerziv sind. Das bedeutet, dass die Standardmethoden zur numerischen Analysis der Randintegralgleichungen nicht mehr angewandt werden können. Das führte nun auf die Idee, die Operatoren nicht mehr in $L_2(\Gamma)$ zu betrachten, sondern in ihren natürlichen Spurräumen $H^{-1/2}(\Gamma)$ bzw. $H^{1/2}(\Gamma)$.

3.3.1 Regularisierung des Einfachschichtpotentials

Die Randintegralgleichung

$$\gamma_0^{\text{ext}}u = V_k w - i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)w$$

wurde von Brakhage und Werner für ein $w \in L_2(\Gamma)$ betrachtet. Es gelten jedoch die folgenden Abbildungseigenschaften

$$V_k : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{und} \quad K_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma).$$

Daher fasst man w als Element von $H^{-1/2}(\Gamma)$ auf und führt einen Operator

$$R : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$$

ein und setzt $w(x) = (R^{-1}v)(x)$. Dies führt dann auf den Ansatz

$$u(x) = (\widetilde{V}_k R^{-1}v)(x) - i\eta(W_k v)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c.$$

$u(x)$ ist wieder eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, da sie eine Linearkombination zweier Lösungen ist. Durch Anwendung der äusseren Dirichlet-Spur erhält man die Randintegralgleichung

$$V_k R^{-1} v - i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)v = g_d.$$

Diese Regularisierung wurde von Buffa und Hiptmair in der Arbeit [8] vorgeschlagen, mit

$$R = -\widetilde{D}_0^{-1}(\frac{1}{2}I + K_0'),$$

wobei K_0' das adjungierte Doppelschichtpotential und $\widetilde{D}_0$ ein stabilisierter hypersingulärer Integraloperator der Laplace-Gleichung sind,

$$\langle \widetilde{D}_0\psi, \varphi\rangle_\Gamma = \langle D_0\psi, \varphi\rangle_\Gamma + \alpha\langle 1, \psi\rangle\langle\varphi, 1\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+. \tag{3.4}$$

3.3.2 Regularisierung des Doppelschichtpotentials

Man betrachte nun die Randintegralgleichung

$$V_k w - i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)w = g_d$$

für $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und führe einen Operator

$$B : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$$

ein und setze $v(x) = (Bw)(x)$:

$$u(x) = (\widetilde{V}_k w)(x) - i\eta(W_k Bw)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c.$$

Daraus erhält man die Randintegralgleichung

$$V_k w - i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)Bw = g_d. \tag{3.5}$$

Die Wahl von B sollte so getroffen werden, dass die Randintegralgleichung für Lipschitz-Gebiete eindeutig lösbar ist. Es gilt (siehe [8])

Satz 3.6. *Für $B : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ gelte*

- *B ist ein kompakter Operator,*
- *$Re(\langle\varphi, B\varphi\rangle_\Gamma) > 0 \quad \forall\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma) \setminus \{0\}$.*

Dann ist die Randintegralgleichung

$$S_k w = V_k w - i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)Bw = g_d$$

in $H^{1/2}(\Gamma)$ eindeutig lösbar.

Beweis: Da $B : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ ein kompakter Operator ist, ist auch $(\frac{1}{2}I + K_k)B : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ kompakt. Weiters ist $V_0 - V_k : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ kompakt und daher existiert eine kompakter Operator C, sodass

$$|\langle S_k w, w\rangle_\Gamma + \langle Cw, w\rangle_\Gamma| = |\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma| > c_1^V \|w\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall w \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Daher ist S_k $H^{-1/2}(\Gamma)$-koerziv und daher kann man die Fredholmsche Alternative anwenden und es bleibt nur mehr die Injektivität zu zeigen: Es sei $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$S_k w = V_k w - i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)Bw = 0$$

und es sei

$$u(x) = (V_k w)(x) - i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)Bw(x) \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^c.$$

Durch die eindeutige Lösbarkeit des Aussenraumproblems und die Sprungrelationen für Einfach- und Doppelschichtpotential erhält man nun analog wie im Beweis von Brakhage und Werner (Satz 3.1)

$$\gamma_0^{\text{int}} u = -Bw$$

bzw.

$$\gamma_0^{\text{ext}} u = i\eta w.$$

In die zweite Greensche Formel für Ω eingesetzt ergibt dies

$$-i\eta\langle w, Bw\rangle_\Gamma = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - k^2 \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Da aber laut Voraussetzung $\mathrm{Re}(\langle w, Bw\rangle_\Gamma) > 0$ für $w \neq 0$ gilt, muss $w = 0$ gelten.

□

Beispiele für Operatoren B, die die Voraussetzungen von Satz 3.6 erfüllen, sind:

- $B = V_0^2 : H^{-1}(\Gamma) \to H^1(\Gamma)$ (siehe [12]).
- In der Arbeit [9] wird ein Operator vorgeschlagen, der durch die folgenden Bilinearform definiert ist:

  $$\langle \mathrm{grad}_\Gamma B\varphi, \mathrm{grad}_\Gamma \psi\rangle_\Gamma = \langle \varphi, \psi\rangle_\Gamma \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \psi \in H^{1/2}(\Gamma).$$

  B ist dann eine Linearkombination von inversen Laplace-Beltrami-Operatoren. Für die Definition des Laplace-Beltrami-Operators siehe [27].
- Der durch die Fundamentallösung $G_\varepsilon(x-y)$ des Pseudo-Differentialoperators

  $$(-\Delta + I)^{1+\varepsilon}$$

  definierte Operator

  $$(B_\varepsilon \varphi)(x) = \int_\Gamma G_\varepsilon(x-y)\varphi(y) ds_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3$$

  wird in der Arbeit [9] von Sauter und Buffa untersucht.

3.4 Modifizierte stabilisierte Randintegralgleichungen

Wie oben beschrieben gibt es schon verschiedene Ansätze zur Regularisierung der Randintegralgleichungen von Brakhage und Werner bzw. Burton und Miller. Die Idee dieser Regularisierungen bestand darin, die Randintegraloperatoren durch Einschub eines kompakten Operators auch auf Lipschitzgebieten koerziv zu machen. Die Idee hier ist, auf die Kompaktheit des Regularisierungsoperators zu verzichten und den Regularisierungsoperator so zu wählen, dass die Koerzivität auf Grund eines Elliptizitätsarguments gezeigt werden kann.

3.4.1 Dirichlet-Problem

In dieser Arbeit soll nun für (3.5) der Ansatz

$$B = B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})$$

untersucht werden. $B_0 : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ soll dabei selbstadjungiert, d.h.

$$\langle B_0\varphi, \psi\rangle_\Gamma = \langle \varphi, B_0\psi\rangle_\Gamma \quad \forall \varphi, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

und $H^{-1/2}(\Gamma)$-elliptisch sein, d.h. es gibt ein $c_1^{B_0} > 0$ mit

$$\langle B_0 w, w\rangle_\Gamma > c_1^{B_0}\|w\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall w \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Die Idee hierbei ist, die eindeutige Lösbarkeit der modifizierten Randintegralgleichung (3.5) nicht auf Grund von Kompaktheitsargumenten zu zeigen, sondern die Elliptizität von B_0 auszunutzen. Dieser Ansatz führt auf die Randintegralgleichung

$$(A_k w)(x) = g_d(x), \quad x \in \Gamma$$

wobei

$$A_k = V_k w + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})$$

mit $\eta \in \mathbb{R}_+$. Im folgenden soll nun die Lösbarkeit der Randintegralgleichung $A_k w = g_d$ untersucht werden:

Satz 3.7. *Der Operator* $A_k = V_k + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k}) : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ *ist koerziv.*

Beweis: Nach Lemma 2.30 ist $C := V_0 - V_k : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ ein kompakter Operator. Dann gilt

$$\mathrm{Re}\langle (A_k + C)w, w\rangle_\Gamma = \mathrm{Re}(\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma + i\eta\langle(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, w\rangle_\Gamma).$$

Da V_0 selbstadjungiert ist, gilt $\mathrm{Im}\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma = 0$ und damit folgt

$$\mathrm{Re}\langle (A_k + C)w, w\rangle_\Gamma = \langle V_0 w, w\rangle_\Gamma + \mathrm{Re}(i\eta\langle B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w\rangle_\Gamma).$$

B_0 ist ebenfalls selbstadjungiert und daher gilt $\langle B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w\rangle_\Gamma \in \mathbb{R}$ und daher

$$\mathrm{Re}\left(i\eta\langle B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w\rangle_\Gamma \right) = 0.$$

Damit erhält man schließlich

$$\mathrm{Re}\langle (A_k + C)w, w\rangle_\Gamma = \langle V_0 w, w\rangle_\Gamma \geq c_1^V \|w\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

□

Somit ist nur mehr die Injektivität des Operators $A_k = V_k + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})$ zu zeigen.

Lemma 3.8. *Es gilt*

$$Im\langle V_k w, w\rangle_\Gamma \geq 0 \quad \forall w \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Beweis: Man wähle ein beliebiges $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und definiere

$$u(x) = (\widetilde{V}_k w)(x) \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^c.$$

$u(x)$ ist dann eine abstrahlende Lösung des Helmholtz-Gleichung und es gilt

$$\gamma_0^{\mathrm{int}} u = \gamma_0^{\mathrm{ext}} u = V_k w.$$

Für Ω gilt dann die Greensche Formel

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - k^2 \int_\Omega |u(x)|^2 dx = \langle \gamma_0^{\mathrm{int}} u, \gamma_1^{\mathrm{int}} u\rangle_G amma,$$

d.h.

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} - k^2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \langle \gamma_0^{\mathrm{int}} u, \gamma_1^{\mathrm{int}} u\rangle_\Gamma.$$

Man wähle nun einen Punkt $y_0 \in \Omega$ und lege darum eine Kugel mit Radius R, sodass $\Omega \subset B_R(y_0)$. Für $\Omega_R = B_R(y_0) \setminus \overline{\Omega}$ lautet die Greensche Formel entsprechend

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_R)} - k^2 \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)} = -\langle \gamma_0^{\mathrm{ext}} u, \gamma_1^{\mathrm{ext}} u\rangle_\Gamma + \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\mathrm{int}} u \overline{\gamma_1^{\mathrm{int}} u}\, dx.$$

Zählt man diese zwei Gleichungen zusammen, so ergibt sich mit der Sprungbedingung für das Einfachschichtpotential V_k

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(B_R(y_0))} - k^2 \|u\|^2_{L_2(B_R(y_0))} = \langle V_k w, w\rangle_\Gamma + \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\mathrm{int}} u \overline{\gamma_1^{\mathrm{int}} u}\, ds_x.$$

Auf der linken Seite der Gleichung stehen reelle Werte, das heißt es gilt

$$0 = \mathrm{Im}(\langle V_k w, w\rangle_\Gamma + \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\mathrm{int}} u \overline{\gamma_1^{\mathrm{int}} u} ds_x)$$

und daher ist

$$\mathrm{Im}\langle V_k w, w\rangle_\Gamma = -\mathrm{Im} \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\mathrm{int}} u \overline{\gamma_1^{\mathrm{int}} u} ds_x.$$

$u(x)$ erfüllt die Abstrahlungsbedingung von Rellich (siehe Lemma 2.23), d.h. es gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R(y_0)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds_x = 0.$$

Durch Umformung des Integranden erhält man

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds_x &= \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial r}} + ik\overline{u} \right) ds_x \\ &= \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + |u|^2 + 2\mathrm{Im} \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial r}} u \right) \right\} ds_x. \end{aligned}$$

Da die ersten beiden Summanden im Integrand positiv sind, muss gelten

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \mathrm{Im} \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial r}} u \right) ds_x \leq 0$$

und damit

$$\mathrm{Im}\langle V_k w, w\rangle_\Gamma = -\mathrm{Im} \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\mathrm{int}} u \overline{\gamma_1^{\mathrm{int}} u} ds_x \geq 0.$$

$\square$

Damit lässt sich nun die Injektivität des Operators A_k beweisen :

Satz 3.9. *Der Operator* $A_k = V_k + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})$ *mit einem beliebigen* $\eta > 0$ *ist injektiv.*

Beweis: Man nehme an, es existiert ein $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$(A_k w)(x) = (V_k w)(x) + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 = \langle A_k w, w\rangle_\Gamma &= \langle V_k w, w\rangle_\Gamma + i\eta\langle(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, w\rangle_\Gamma \\ &= \langle V_k w, w\rangle_\Gamma + i\eta\langle B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w\rangle_\Gamma . \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.8 gilt $\mathrm{Im}\langle V_k w, w\rangle_\Gamma \geq 0$ und daher muss

$$0 = \eta\langle B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w\rangle_\Gamma \geq \eta c_1^{B_0} \, \|(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \geq 0$$

gelten, da vorausgesetzt wurde, dass $\eta > 0$ ist und B_0 $H^{-1/2}(\Gamma)$-elliptisch ist. Daraus folgt

$$(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w = 0$$

und daher auch

$$V_k w = 0.$$

Diese Gleichung besitzt jedoch nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn $k^2 = \lambda$ ein Eigenwert des homogenen Dirichlet-Randwertproblems für $-\Delta$ ist. Daher gilt

$$w = \gamma_1^{\mathrm{int}} u_\lambda,$$

wobei u_λ die zugehörige Eigenfunktion von $-\Delta$ ist. Daher gilt

$$(-\frac{1}{2}I + K'_k)w = 0.$$

Da aber auch $(-k)^2 = \lambda$ ist, gilt auch

$$(-\frac{1}{2}I + K'_{-k})w = 0.$$

Weil auch $(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w = 0$ gilt, folgt somit $w = 0$.

□

3.4.2 Wahl von B_0

Zur Lösung des Dirichlet-Randwertproblems muss also die folgende Randintegralgleichung gelöst werden:

$$(A_k w)(x) = (V_k w)(x) + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w(x) = g_d(x), \quad x \in \Gamma. \tag{3.6}$$

An dieser Stelle stellt sich natürlich die Frage nach der Wahl des elliptischen und selbstadjungierten Operators $B_0 : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Ein Operator, der die geforderten Eigenschaften erfüllt, ist das Einfachschichtpotential für den Laplace Operator

$$(V_0 w)(x) = \int_\Gamma \frac{1}{4\pi|x-y|} w(y) ds_y, \quad x \in \Gamma.$$

Der Nachweis, dass V_0 elliptisch und selbstadjungiert ist findet sich z.B. in [32]. Diese Wahl führt dann auf die Randintegralgleichung

$$(V_k w)(x) + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)V_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w(x) = g_d(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Ein zweiter Operator der von $H^{-1/2}(\Gamma)$ nach $H^{1/2}(\Gamma)$ abbildet und selbstadjungiert ist, ist der inverse, hypersinguläre Operator für den Laplace Operator $\widetilde{D}_0^{-1}$ (siehe (3.4)). Damit erhält man die Randintegralgleichung

$$(V_k w)(x) + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)\widetilde{D}_0^{-1}(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w(x) = g_d(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{3.7}$$

3.4.3 Variationsformulierung

Die Randintegralgleichung (3.6) ist äquivalent zum folgenden Variationsproblem:
Finde $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\langle V_k w, \tau\rangle_\Gamma + i\eta\langle(\frac{1}{2}I + K_k)B_0(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, \tau\rangle_\Gamma = \langle g_d, \tau\rangle_\Gamma \tag{3.8}$$

für alle $\tau \in H^{-1/2}(\Gamma)$ erfüllt ist.
Man betrachte zunächst $B_0 = V_0$. Das Problem ist nun, dass die Auswertung der Komposition von Randintegraloperatoren, die insbesondere bei der Diskretisierung benötigt wird, im Allgemeinen in der Praxis nicht exakt umzusetzen ist. Die gängige Methode, um diese Hintereinanderausführung zu vermeiden, ist die Umwandlung der Variationsgleichung (3.8) in ein System. Man setze dazu $\tilde{w} = (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w$ und $v = V_0\tilde{w}$. Das führt auf ein Variationsproblem mit 3 Variationsgleichungen:
Gesucht ist $(w, \tilde{w}, v) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{array}{rcrcl} \langle V_k w, \tau\rangle_\Gamma & + & i\eta\langle(\frac{1}{2}I + K_k)v, \tau\rangle_\Gamma & = & \langle g_d, \tau\rangle_\Gamma \\ \langle V_0 \tilde{w}, \tilde{\tau}\rangle_\Gamma & - & \langle v, \tilde{\tau}\rangle_\Gamma & = & 0 \\ \langle(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, \mu\rangle_\Gamma & - & \langle \tilde{w}, \mu\rangle_\Gamma & = & 0 \end{array} \tag{3.9}$$

für alle $(\tau, \tilde{\tau}, \mu) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ erfüllt ist.

Die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems von Variationsgleichungen ist durch die eindeutige Lösbarkeit der Randintegralgleichung $A_k w = g_d$ (Satz 3.7, 3.9) gesichert. Führt man hier eine Diskretisierung durch, so erhält man ein Block-Gleichungssystem, welches einem zweifachen Sattelpunktproblem entspricht.
Man betrachte nun $B_0 = \widetilde{D}_0^{-1}$ und setze wieder $v = \widetilde{D}_0^{-1}(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w$. Das ist äquivalent zu $\widetilde{D}_0 v = (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w$ und man erhält nun nur mehr ein Variationsproblem mit 2 Variationsgleichungen:

Gesucht ist $(w,v) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{array}{rcrcl} \langle V_k w, \tau\rangle_\Gamma & + & i\eta\langle(\frac{1}{2}I + K_k)v, \tau\rangle_\Gamma & = & \langle g_d, \tau\rangle_\Gamma \\ \langle(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, \mu\rangle_\Gamma & - & \langle \widetilde{D}_0 v, \mu\rangle_\Gamma & = & 0 \end{array} \tag{3.10}$$

für alle $(\tau,\mu) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ erfüllt ist.
Hier erhält man also ein Blockgleichungssystem für ein einfaches Sattelpunktproblem. Dies entspricht dem Vorgehen einer symmetrischen Randelementmethode für gemischte Randwertprobleme. Aus diesem Grund wird im Weiteren die Wahl $B_0 = \widetilde{D}_0^{-1}$ verfolgt. Diesem Variationsproblem entspricht dann das folgende System von Operatorgleichungen:

$$\begin{aligned} V_k w + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)v &= g_d, \\ \widetilde{D}_0 v - (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w &= 0. \end{aligned}$$

Durch Umordnung und Division der ersten Zeile durch $i\eta$ erhält man das System

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_0 v - (\frac{1}{2}I + K'_{-k})w &= 0, \\ (\frac{1}{2}I + K_k)v - \frac{i}{\eta}V_k w &= -\frac{i}{\eta}g_d. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Das Variationsproblem (3.10) ist dann äquivalent zum folgenden Variationsproblem:
Finde $(w,v) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{D}_0 u, \mu\rangle_\Gamma - \langle(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, \mu\rangle_\Gamma &= 0, \\ \langle(\frac{1}{2}I + K_k)v, \tau\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle V_k w, \tau\rangle_\Gamma &= -\frac{i}{\eta}\langle g_d, \tau\rangle_\Gamma \end{aligned} \tag{3.12}$$

für alle $(\tau,\mu) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ gilt.
Ähnlich dem Vorgehen in [8] lässt sich zu diesem Variationsproblem eine koerzive Bilinearform definieren:

Satz 3.10. *Die Bilinearform*

$$a(w,\tau;v,\mu) = \overline{\langle \widetilde{D}_0 v, \mu\rangle_\Gamma} - \overline{\langle(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, \mu\rangle_\Gamma} + \langle(\frac{1}{2}I + K_k)v, \tau\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle V_k w, \tau\rangle_\Gamma.$$

ist koerziv.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} |a(w,w;v,v)| &= |\langle \widetilde{D}_0 v, v\rangle_\Gamma - \overline{\langle(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, v\rangle_\Gamma} + \langle(\frac{1}{2}I + K_k)v, w\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle V_k w, w\rangle_\Gamma| \\ &= |\langle \widetilde{D}_0 v, v\rangle_\Gamma - \overline{\langle w, (\frac{1}{2}I + K_k)v\rangle_\Gamma} + \langle(\frac{1}{2}I + K_k)v, w\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle V_k w, w\rangle_\Gamma| \\ &= |\langle \widetilde{D}_0 v, v\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle V_k w, w\rangle_\Gamma|. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.30 ist

$$C = -\frac{i}{\eta}\begin{pmatrix} (V_0 - V_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kompakt und es gilt $\mathrm{Im}\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma = \mathrm{Im}\langle \widetilde{D}_0 u, u\rangle_\Gamma = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
|a(w,w;v,v) + \langle C\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}\rangle_\Gamma| &= |\langle \widetilde{D}_0 v, v\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma| \\
&= \sqrt{\langle \widetilde{D}_0 v, v\rangle_\Gamma^2 + \frac{1}{\eta^2}\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma^2} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle \widetilde{D}_0 v, v\rangle_\Gamma + \frac{1}{\eta}\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma\right) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_1^{\widetilde{D}_0}\|v\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \frac{c_1^V}{\eta}\|w\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.1. *Die Lösbarkeit der Variationsprobleme (3.9) und (3.10) folgt bereits aus der Koerzivität und Injektivität des Randintegraloperators (Satz 3.7 und 3.9). Die Koerzivität des Systems (3.10) ist aber wichtig für die numerische Analysis der Galerkin-Diskretisierung.*

3.4.4 Neumann-Problem

Für das Neumann-Problem lässt sich eine analoge Formulierung finden und zwar macht man den Ansatz

$$u(x) = i\eta(\widetilde{V}_k R v)(x) - (W_k v)(x) \quad \text{für } x \in \Omega^c$$

wobei

$$R = R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})$$

ist. $R_0 : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ sei ein selbstadjungierter, elliptischer Operator. Durch Anwendung der äusseren Neumann-Spur erhält man die Randintegralgleichung

$$D_k v + i\eta(-\frac{1}{2}I + K'_k)R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v = g_n.$$

Analog zur Formulierung für das Dirichlet-Randwertproblem wird nun die Invertierbarkeit des Randintegraloperators

$$C_k = D_k + i\eta(-\frac{1}{2}I + K'_k)R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})$$

bewiesen.

Satz 3.11. *Der Operator $C_k = D_k + i\eta(-\frac{1}{2}I + K'_k)R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})$ ist koerziv.*

Beweis: Nach [29], Lemma 3.9.8 ist $D_0 - D_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ kompakt, somit ist auch $C = D_0 - D_k + I : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ kompakt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle (C_k + C)v, v\rangle_\Gamma &= \mathrm{Re}(\langle (D_0 + I)v, v\rangle_\Gamma + i\eta\langle (-\frac{1}{2}I + K_k')R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, v\rangle_\Gamma) \\ &= \langle (D_0 + I)v, v\rangle_\Gamma + \mathrm{Re}(i\eta\langle R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, (-\frac{1}{2}I + K_{-k})v\rangle_\Gamma).\end{aligned}$$

Aus der Selbstadjungiertheit von R_0 folgt $\langle R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, (-\frac{1}{2}I + K_{-k})v\rangle_\Gamma) \in \mathbb{R}$ und daher

$$\mathrm{Re}(i\eta\langle R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, (-\frac{1}{2}I + K_{-k})v\rangle_\Gamma) = 0.$$

Schließlich gilt

$$\mathrm{Re}\langle C_k + Cv, v\rangle_\Gamma = \langle (D_0 + I)v, v\rangle_\Gamma \geq c\|v\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

□

Mit dem folgenden Lemma lässt sich nun die Injektivität des Operators C_k beweisen :

Lemma 3.12. *Es gilt*

$$Im\langle D_k v, v\rangle_\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Beweis: Der Beweis funktioniert ähnlich dem Beweis für das Einfachschichtpotential: Man wähle ein beliebiges $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ und definiert $u(x)$ als

$$u(x) = (W_k v)(x) \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^c.$$

$u(x)$ ist dann eine Lösung der Helmholtz-Gleichung und somit gilt die 2. Greensche Formel für Ω,

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} - k^2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \langle \gamma_0^{\mathrm{int}} u, \gamma_0^{\mathrm{ext}} u\rangle_\Gamma.$$

Sei nun y_0 ein Punkt in Ω und R so groß, dass $\Omega \subset B_R(y_0)$. Für das beschränkte Gebiet $\Omega_R = B_R(y_0) \setminus \Omega$ gilt nun ebenfalls die 2. Greensche Formel

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_R)} - k^2\|u\|^2_{L_2(\Omega_R)} = -\langle \gamma_0^{\mathrm{ext}} u, \gamma_1^{\mathrm{ext}} u\rangle_\Gamma + \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\mathrm{int}} u \overline{\gamma_1^{\mathrm{int}} u}\, dx.$$

Durch Addieren der beiden Gleichungen und Einsetzen der Sprungbedingungen für W_k erhält man

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(B_R(y_0))} - k^2\|u\|^2_{L_2(B_R(y_0))} = -\langle v, D_k v\rangle_\Gamma + \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\mathrm{int}} u \overline{\gamma_1^{\mathrm{int}} u}\, ds_x.$$

Betrachtet man den Imaginärteil dieser Gleichung, so erhält man

$$\langle v, D_k v\rangle_\Gamma = \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\mathrm{int}} u \overline{\gamma_1^{\mathrm{int}} u} ds_x.$$

$u(x)$ erfüllt ebenfalls die Abstrahlungsbedingung von Rellich (2.24), somit folgt analog zum Beweis für V_k

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\text{int}} u \overline{\gamma_1^{\text{int}} u} ds_x \leq 0$$

und somit

$$\text{Im}\langle D_k v, v\rangle_\Gamma = -\text{Im}\langle v, D_k v\rangle_\Gamma = -\int\limits_{\partial B_R(y_0)} \gamma_0^{\text{int}} u \overline{\gamma_1^{\text{int}} u} ds_x \geq 0.$$

□

Satz 3.13. *Sei $\eta > 0$, dann ist der Operator $C_k = D_k + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})$ injektiv.*

Beweis: Man nehme an, es existiert ein $v \in H^{1/2}(\Gamma)$, sodass gilt

$$(C_k v)(x) = (D_k v)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Dann folgt

$$\langle C_k v, v\rangle_\Gamma = \langle D_k v, v\rangle_\Gamma + i\eta\langle R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, (-\frac{1}{2}I + K_{-k})v\rangle_\Gamma = 0.$$

Man betrachte nun den Imaginärteil dieser Gleichung:

$$\text{Im}\langle C_k v, v\rangle_\Gamma = \text{Im}\langle D_k v, v\rangle_\Gamma + \eta\langle R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, (-\frac{1}{2}I + K_{-k})v\rangle_\Gamma = 0.$$

Da laut vorigem Lemma $\text{Im}\langle D_k v, v\rangle_\Gamma \geq 0$ gilt, folgt

$$0 \geq \langle R_0(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, (-\frac{1}{2}I + K_{-k})v\rangle_\Gamma \geq c_1^{R_0}\|(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \geq 0$$

und somit

$$(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v = 0$$

und in der Folge

$$D_k v = 0.$$

Also gilt $v \in \mathcal{N}(D_k)$. Das kann für ein $v \neq 0$ nur der Fall sein, wenn $k^2 = \mu$ ein Eigenwert des inneren Neumann-Eigenwertproblems für $-\Delta$ ist. Das heisst, es gilt

$$v = \gamma_0^{\text{int}} u_\mu,$$

wobei u_μ die zugehörige Eigenfunktion ist. Daraus folgt

$$(\frac{1}{2}I + K_k)\gamma_1^{\text{int}} u_\mu = (\frac{1}{2}I + K_k)v = 0,$$

da aber auch $(-k)^2 = \mu$ ist, gilt auch

$$(\frac{1}{2}I + K_{-k})v = 0.$$

Durch Addieren dieser Gleichung und $(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v = 0$ folgt schließlich $v = 0$.

□

3.4.5 Wahl von R_0

Zur Lösung des Neumann-Randwertproblems erhält man also die Randintegralgleichung

$$(D_k v)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')R_0(-\frac{1}{2} + K_{-k})v(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{3.13}$$

Eine mögliche Wahl für R_0 wäre der stabilisierte hypersinguläre Operator des Laplace-Operators (siehe (3.4)), was auf die Randintegralgleichung

$$(D_k v)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')\widetilde{D}_0(-\frac{1}{2} + K_{-k})v(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \tag{3.14}$$

führt. Eine weitere Möglichkeit ist das inverse Einfachschichtpotential des Laplace-Operator

$$(D_k v)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')V_0^{-1}(-\frac{1}{2} + K_{-k})v(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma. \tag{3.15}$$

3.4.6 Variationsformulierung

Die Randintegralgleichung (3.13) ist äquivalent zum Variationsproblem:
Finde $v \in H^{1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\langle D_k v, \mu\rangle_\Gamma + i\eta\langle(-\frac{1}{2} + K_k')R_0(-\frac{1}{2} + K_{-k})v, \mu\rangle_\Gamma = \langle g_n, \mu\rangle_\Gamma$$

für alle $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$ erfüllt ist.
Man betrachte das Variationsproblem für $R_0 = \widetilde{D}_0$. Hier ergibt sich wieder das Problem, dass man zur Berechnung der Matrixeinträge mehrere Integraloperatoren hintereinander-ausführen müsste. Deswegen setzt man $\tilde{v} = (-\frac{1}{2}I + K_{-k})v$ und $w = \widetilde{D}_0\tilde{v}$. Das führt auf ein Variationsproblem mit 3 Variationsgleichungen:
Gesucht ist $(v, \tilde{v}, w) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{array}{rcccl} \langle D_k v, \mu\rangle_\Gamma & + & i\eta\langle(-\frac{1}{2}I + K_k')w, \mu\rangle_\Gamma & = & \langle g_n, \mu\rangle_\Gamma \\ \langle \widetilde{D}_0\tilde{v}, \tilde{\mu}\rangle_\Gamma & - & \langle w, \tilde{\mu}\rangle_\Gamma & = & 0 \\ \langle(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, \tau\rangle_\Gamma & - & \langle \tilde{v}, \tau\rangle_\Gamma & = & 0 \end{array}$$

für alle $(\mu, \tilde{\mu}, \tau) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ erfüllt ist.
Setzt man $R_0 = V_0^{-1}$, so erhält man ein Variationsproblem mit nur 2 Variationsgleichungen:
Gesucht ist $(v, w) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{array}{rcccl} \langle D_k v, \mu\rangle_\Gamma & + & i\eta\langle(-\frac{1}{2}I + K_k')w, \mu\rangle_\Gamma & = & \langle g_n, \mu\rangle_\Gamma \\ \langle V_0 w, \tau\rangle_\Gamma & - & \langle(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, \tau\rangle_\Gamma & = & 0 \end{array} \tag{3.16}$$

für alle $(\mu, \tau) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ gilt.
Im Weiteren wird $R_0 = V_0^{-1}$ gesetzt. Das System von Variationsgleichungen (3.16) entspricht dem System von Operatorgleichungen

$$\begin{aligned} D_k v + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')w &= g_n, \\ V_0 w - (-\frac{1}{2}I + K_{-k}) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Umordnung und Division der zweiten Zeile durch $i\eta$ erhält man das Variationsproblem:
Gesucht ist $(v, w) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{aligned} \langle V_0 w, \tau\rangle_\Gamma \quad &- \quad \langle(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, \tau\rangle_\Gamma &= 0 \\ \langle(-\frac{1}{2}I + K_k')w, \mu\rangle_\Gamma \quad &- \quad \frac{i}{\eta}\langle D_k v, \mu\rangle_\Gamma &= \langle g_n, \mu\rangle_\Gamma \end{aligned} \tag{3.17}$$

für alle $(\mu, \tau) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ gilt.
Zu diesem Variationsproblem lässt sich ähnlich wie beim Dirichlet-Randwertproblem eine koerzive Bilinearform definieren.

Satz 3.14. *Die Bilinearform*

$$a(v, \mu; w, \tau) = \overline{\langle V_0 w, \tau\rangle_\Gamma} - \overline{\langle(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, \tau\rangle_\Gamma} + \langle(-\frac{1}{2}I + K_k')w, \mu\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle D_k v, \mu\rangle_\Gamma$$

ist koerziv.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} |a(v, v; w, w)| &= |\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma - \overline{\langle(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, w\rangle_\Gamma} + \langle(-\frac{1}{2}I + K_k')w, v\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle D_k v, v\rangle_\Gamma| \\ &= |\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma - \overline{\langle v, (-\frac{1}{2}I + K_k')w\rangle_\Gamma} + \langle(-\frac{1}{2}I + K_k')w, v\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle D_k v, v\rangle_\Gamma| \\ &= |\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle D_k v, v\rangle_\Gamma|. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.34 ist

$$C = -\frac{i}{\eta}\begin{pmatrix} (D_0 - D_k + I) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kompakt und es gilt $\mathrm{Im}\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma = \mathrm{Im}\langle D_0 u, u\rangle_\Gamma = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
|a(v,v;w,w) + \langle C\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\rangle_\Gamma| &= |\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma - \frac{i}{\eta}\langle (D_0 + I)v, v\rangle_\Gamma| \\
&= \sqrt{\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma^2 + \frac{1}{\eta^2}\langle (D_0 + I)v, v\rangle_\Gamma^2} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle V_0 w, w\rangle_\Gamma + \frac{1}{\eta}\langle (D_0 + I)v, v\rangle_\Gamma\right) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_1^V \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \frac{c}{\eta}\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2\right)
\end{aligned}$$

$\square$

4 Randelementmethoden für die Helmholtz-Gleichung

Bis jetzt wurden mehrere Randintegralgleichungen zur Lösung des Dirichlet- bzw. Neumann-Randwertproblems der Helmholtz-Gleichung hergeleitet. Der nächste Schritt zur näherungsweisen Lösung dieser Randwertprobleme, die Diskretisierung der Randintegralgleichung, soll nun in diesem Kapitel behandelt werden. In dieser Arbeit wird die Galerkin-Bubnov-Methode (siehe z.B. [32], [29], [30] oder [23]) angewendet, diese wird im ersten Abschnitt anhand einer allgemeinen Gleichung beschrieben. Danach werden die Räume der stückweise konstanten bzw. linearen Funktionen als Ansatzräume eingeführt. Für diese Wahl von Ansatzräumen können dann Aussagen über Stabilität und Konsistenz bzw. Konvergenzverhalten von Randelementmethoden für die Kapitel 3 hergeleiteten stabilisierten Randintegralgleichungen gemacht werden. Für die modifizierten Randintegralgleichungen von Brakhage und Werner, bzw. von Burton und Miller lässt sich bei Lipschitz-Gebieten die klassische Theorie nicht anwenden, da die Operatoren in $L_2(\Gamma)$ betrachtet werden. Bei den in dieser Arbeit hergeleiteten regularisierten Randintegralgleichungen werden jedoch alle Operatoren in den natürlichen Energieräumen $H^{1/2}(\Gamma)$ bzw. $H^{-1/2}(\Gamma)$ betrachtet und daher können auch die klassischen Resultate für die Galerkin Methode angewendet werden.

4.1 Grundlagen

Man betrachte die Randintegralgleichung

$$Aw = g$$

mit einem Randintegraloperator $A : X \to X'$ und einer gegebenen Funktion $g \in X'$. Diese Operatorgleichung ist dann äquivalent zum folgenden Variationsproblem zur Bestimmung von $w \in X$, sodass

$$\langle Aw, \tau \rangle = \langle g, \tau \rangle \quad \forall \tau \in X.$$

Man betrachte nun eine Familie $\{X_N : N \in \mathbb{N}\}$ von konformen Ansatzräumen, wobei

$$X_N = \text{span } \{\psi_k\}_{k=1}^{N} \subset X$$

ist. Die Ansatzräume X_N sollen so konstruiert werden, dass sie die Approximationseigenschaft

$$\lim_{N\to\infty} \inf_{w_N \in X_N} \|w - w_N\|_X = 0, \quad \forall w \in X. \tag{4.1}$$

erfüllen. Die gesuchte Funktion setzt man als Linearkombination der Basisfunktionen ψ_k an,

$$w_N = \sum_{j=1}^{N} w_j \psi_j \quad \in X_N,$$

und löst dann das folgenden diskrete Variationsproblem

$$\langle A w_N, \tau_N \rangle = \langle g, \tau_N \rangle \quad \forall \tau_N \in X_N.$$

Setzt man die Summendarstellung von w_N ein und ersetzt τ_N durch die Testfunktion ψ_i, so erhält man das lineare System

$$\sum_{j=1}^{N} \langle A\psi_j, \psi_i \rangle w_j = \langle g, \psi_i \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, N. \tag{4.2}$$

Geht man davon aus, dass das kontinuierliche Variationsproblem eine eindeutige Lösung besitzt, muss nachgewiesen werden, dass dies auch für das diskrete Variationsproblem gilt. Weiters muss man zeigen, dass die Lösung des diskreten Variationsproblems auch tatsächlich gegen die Lösung des kontinuierlichen Variationsproblems konvergiert. Dies kann garantiert werden, wenn die Ladzenskaya-Babuska-Brezzi Bedingung (kurz LBB-Bedingung, siehe [30])

$$\sup_{\tau_N \in X_N, \|\tau_N\|_X > 0} \frac{|\langle A w_N, \tau_N \rangle|}{\|\tau_N\|_X} \geq c_s \|w_N\|_X \quad \forall w_N \in X_N,\ \gamma > 0 \tag{4.3}$$

erfüllt ist.

Satz 4.1 (Cea's Lemma)**.** *Es sei $A : X \to X'$ ein beschränkter, linearer und koerziver Operator, der die LBB-Bedingung (4.3) erfüllt. Dann existiert eine eindeutige Lösung w_N des Variationsproblems*

$$\langle A w_N, \tau_N \rangle = \langle g, \tau_N \rangle \quad \forall \tau_N \in X_N$$

die die Stabilitätsbedingung

$$\|w_N\|_X \leq \frac{1}{c_s} \|g\|_{X'}$$

und die Fehlerabschätzung

$$\|w - w_N\|_X \leq \left(1 + \frac{c_2^A}{c_s}\right) \mathop{inf}_{\tau_N \in X_N} \|w - \tau_N\|_X$$

erfüllt.

Den Beweis findet man z.B. in [32].

Satz 4.2. *Sei $A : X \to X'$ ein beschränkter linearer Operator und sei $X_N \subset X$ eine dichte Folge von konformen Ansatzräumen. Ist A koerziv und injektiv, so existiert ein Index $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass*

$$c_s \|w_N\|_X \leq \sup_{\tau_N \in X_N, \|\tau_N\|_X > 0} \frac{|\langle A w_N, \tau_N \rangle|}{\|\tau_N\|_X} \tag{4.4}$$

mit einem $c_s > 0$ für alle $w_N \in X_N$ mit $N > N_0$ gilt.

Beweis: Sei $w_N \in X_N$. Da A koerziv ist, gibt es einen kompakten Operator C, sodass $D = A + C$ elliptisch und somit invertierbar ist. Sei nun $\overline{v} = D^{-1}Cw_N \in X$ die eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\langle D\overline{\tau}, \tau\rangle = \langle Cw_N, \tau\rangle \quad \forall \tau \in X$$

und $\overline{\tau}_N = P_N\overline{\tau} \in X_N$ die Projektion von $\overline{\tau}$ auf den Raum X_N. $\overline{\tau}_N$ ist dann Lösung des Variationsproblems

$$\langle D\overline{\tau}_N, \tau_N\rangle = \langle Cw_N, \tau_N\rangle \quad \forall \tau_N \in X_N$$

und es kann Cea's Lemma für den elliptischen Operator D angewandt werden (siehe z.B. [32]), das heißt es gilt

$$\|\overline{\tau}_N\|_X \leq \frac{1}{c_1^D}\|Cw_N\|_{X'} \leq \frac{c_2^C}{c_1^D}\|w_N\|_X$$

und somit

$$\|w_N - \overline{\tau}_N\| \leq \|w_N\|_X + \|\tau_N\|_X \leq \left(1 + \frac{c_2^C}{c_1^D}\right)\|w_N\|_X.$$

Weiters folgt aus Cea's Lemma

$$\|\overline{\tau} - \overline{\tau}_N\|_X \leq \frac{c_2^D}{c_1^D}\inf_{\tau_N \in X_N}\|\overline{\tau} - \tau_N\|_X$$

und daher

$$\|(I - P_N)\overline{\tau}\|_X \to 0 \quad \text{für } N \to \infty. \tag{4.5}$$

Man wähle nun als Testfunktion $w_N - \overline{\tau}_N$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle Aw_N, w_N - \overline{\tau}_N\rangle &= \langle Aw_N, w_N - \overline{\tau}\rangle + \langle Aw_N, \overline{\tau} - \overline{\tau}_N\rangle \\
&= \langle Aw_N, w_N - D^{-1}Cw_N\rangle + \langle Aw_N, \overline{\tau} - \overline{\tau}_N\rangle.
\end{aligned}$$

Da D elliptisch ist und A eine beschränkte Inverse besitzt, gilt

$$\begin{aligned}
|\langle Aw_N, w_N - D^{-1}Cw_N\rangle| &= |\langle Aw_N, D^{-1}(D - C)w_N\rangle| \\
&= |\langle Aw_N, D^{-1}Aw_N\rangle| \\
&\geq c_1^D\|Aw_N\|_{X'}^2 \geq c_1^D c_A\|w_N\|_X^2.
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
|\langle Aw_N, \overline{\tau} - \overline{\tau}_N\rangle| &= |\langle Aw_N, (I - P_N)\overline{\tau}\rangle| \\
&= |\langle Aw_N, (I - P_N)D^{-1}Cw_N\rangle| \\
&\leq \|A\|_{X'}\|(I - P_N)D^{-1}C\|_X\|w_N\|_X.
\end{aligned}$$

Da $D^{-1}C$ ein kompakter Operator ist folgt aus der Konvergenz (4.5)

$$\|(I - P_N)D^{-1}C\|_{X \to X} \to 0 \quad \text{für } N \to \infty. \tag{4.6}$$

d.h.

$$\begin{aligned}|\langle Aw_N, w_N - \overline{\tau}_N\rangle| &\geq |\langle Aw_N, w_N - D^{-1}Cw_N\rangle| - |\langle Aw_N, \overline{\tau} - \overline{\tau}_N\rangle| \\ &\geq \left(c_1^D c_A - \|A\|_{X\to X'}\|(I-P_N)D^{-1}C\|_{X\to X}\right)\|w_N\|_X^2.\end{aligned}$$

Wegen (4.6) gibt es nun einen Index N_0, sodass

$$\|A\|_{X\to X'}\|(I-P_N)D^{-1}C\|_{X\to X} \leq \frac{1}{2}c_1^D c_A$$

für alle $N > N_0$ gilt und somit

$$\begin{aligned}|\langle Aw_N, w_N - \overline{\tau}_N\rangle| &\geq \frac{1}{2}c_1^D c_A\|w_N\|_X^2 \\ &\geq \frac{1}{2}c_1^D c_A\left(1+\frac{c_2^D}{c_1^D}\right)^{-1}\|w_N\|_X\|w_N - \overline{\tau}_N\|_X,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

□

4.2 Diskretisierung

Man betrachte nun eine Randdiskretisierung des Randes Γ mit N Randelementen τ_l

$$\overline{\Gamma} = \bigcup_{l=1}^{N}\overline{\tau}_l,$$

und M Knoten x_k. Es sei

$$h_l = \left(\int_{\tau_l} ds_x\right)^{1/2}$$

die lokale Maschenweite und

$$h = \max_{l=1,\ldots,N} h_l$$

die globale Maschenweite. Dann bezeichne

$$X_N = S_h^0(\Gamma) = \text{span}\ \{\varphi_k^0\}_{k=1}^N$$

den Raum der stückweise konstanten Basisfunktionen mit

$$\varphi_k^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \tau_k, \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für diesen Raum gilt die folgende Approximationseigenschaft (siehe [32]):

Satz 4.3. *Für $\sigma \in [-1,0]$ und $u \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in [0,1]$ gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{v_h \in S_h^0(\Gamma)} \|u - v_h\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq c h^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Gamma)}.$$

Weiters ist

$$\Pi_N = S_h^1(\Gamma) = \text{span } \{\varphi_k^1\}_{k=1}^M,$$

der Raum der stückweise linearen Basisfunktionen mit

$$\varphi_k^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_k, \\ 0 & \text{für } x = x_l \neq x_k, \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für diesen Raum gilt die Approximationseigenschaft:

Satz 4.4. *Für $\sigma \in [0,1]$ und $u \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in [\sigma,2]$ gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{v_h \in S_h^1(\Gamma)} \|u - v_h\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq c h^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Gamma)}.$$

4.3 Dirichlet-Problem

Im Kapitel 3.4 wurde die Randintegralgleichung (3.7)

$$(A_k w)(x) = (V_k w)(x) + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)\widetilde{D}_0^{-1}(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w(x) = g_d(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \tag{4.7}$$

zur Lösung des äusseren Dirichlet-Randwertproblems erhalten. Diese Gleichung ist äquivalent zum Variationsproblem:
Gesucht ist $(w, v) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{array}{rcrcl} \langle V_k w, \tau\rangle_\Gamma & + & i\eta\langle(\frac{1}{2}I + K_k)v, \tau\rangle_\Gamma & = & \langle g_d, \tau\rangle_\Gamma \\ \langle(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w, \mu\rangle_\Gamma & - & \langle \widetilde{D}_0 v, \mu\rangle_\Gamma & = & 0 \end{array} \tag{4.8}$$

für alle $(\tau, \mu) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ erfüllt ist.
Dieses kontinuierliche Variationsproblem wird nun auf ein diskretes Variationsproblem zurückgeführt, indem man die Lösung und die Testfunktionen als Linearkombinationen von Basisfunktionen in

$$X_N = \text{span}\{\psi_k\}_{k=1}^N \subset H^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{und} \quad \Pi_M = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M \subset H^{1/2}(\Gamma) \tag{4.9}$$

ansetzt. Gesucht ist $(w_N, v_M) \in X_N \times \Pi_M$, sodass

$$\begin{array}{rcrcl} \langle V_k w_N, \tau_N\rangle_\Gamma & + & i\eta\langle(\frac{1}{2}I + K_k)v_M, \tau_N\rangle_\Gamma & = & \langle g_d, \tau_N\rangle_\Gamma \\ \langle(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w_N, \mu_M\rangle_\Gamma & - & \langle \widetilde{D}_0 v_M, \mu_M\rangle_\Gamma & = & 0 \end{array} \tag{4.10}$$

für alle $(\tau_N, \mu_M) \in X_N \times \Pi_M$ erfüllt ist.

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob auch hier die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems gewährleistet ist bzw. ob die Lösung des diskreten Variationsproblems auch tatsächlich gegen die Lösung des kontinuierlichen Variationsproblems konvergiert. Setzt man $X_N = S_h^0(\Gamma)$ und $\Pi_M = S_h^1(\Gamma)$, dann gilt:

Satz 4.5. *Es sei (w, v) die eindeutige Lösung des Variationsproblems (3.10). Dann hat das diskrete Variationsproblem (4.10) eine eindeutige Lösung (w_N, v_M) vorausgesetzt N und M sind groß genug. Ist $w \in H^1_{pw}(\Gamma)$ und $v \in H^2(\Gamma)$, so gilt*

$$\|w - w_N\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|v - v_M\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq ch^3(\|w\|^2_{H^1_{pw}(\Gamma)} + \|v\|^2_{H^2(\Gamma)}).$$

Beweis: Da laut Satz 3.10 das System auch koerziv ist und somit für das System bei hinreichend großer Wahl von N und M die LBB-Bedingung auch erfüllt ist, folgt aus Cea's Lemma die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Variationsproblems und

$$\|w - w_N\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|v - v_M\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c \left(\inf_{w_h \in S_h^0(\Gamma)} \|w - w_h\|^2 + \inf_{v_h \in S_h^1(\Gamma)} \|v - v_h\|^2 \right).$$

Mit Satz 4.3 und Satz 4.4 folgt dann die Aussage.

□

Mit dem **Aubin-Nitsche-Trick** (siehe [32], Kapitel 12) gilt

$$\|w - w_N\|^2_{H^{\sigma_1}} + \|v - v_M\|^2_{H^{\sigma_2}} \leq ch^{2\min\{s_1-\sigma_1, s_2-\sigma_2\}} \left(\|w\|^2_{H^{s_1}_{\mathrm{pw}}(\Gamma)} + \|v\|^2_{H^{s_2}(\Gamma)} \right)$$

für $s_1 \in [-\frac{1}{2}, 1]$, $\sigma_1 \in [-2, -\frac{1}{2}]$, $s_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $\sigma_2 \in [-1, \frac{1}{2}]$.

Für den punktweisen Fehler in einem Feldpunkt $x \in \Omega^c$ gilt dann mit $v = \widetilde{D}_0^{-1}(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w$

$$\begin{aligned} |u(x) - u_h(x)| &= |(\widetilde{V}_k w)(x) + i\eta(W_k v)(x) - (V_k w_N)(x) + i\eta(W_k v_M)(x)| \\ &= |\widetilde{V}_k(w - w_N)(x) + i\eta W_k(v - v_M)(x)| \\ &\leq \left| \int_\Gamma U_k^*(x, y)(w - w_N)(y) ds_y \right| + \eta \left| \int_\Gamma \gamma^{\mathrm{int}}_{1,y} U_k^*(x, y)(v - v_M)(y) ds_y \right| \\ &\leq \|U_k^*(x, .)\|_{H^{-\sigma_1}} \|w - w_N\|_{H^{\sigma_1}} + \eta \|\gamma^{\mathrm{int}}_{1,y} U_k^*(x, .)\|_{H^{-\sigma_2}} \|v - v_M\|_{H^{\sigma_2}}. \end{aligned}$$

Da $x \in \Omega^c$ ist, ist die Fundamentallösung unendlich oft differenzierbar, d.h es gilt

$$U_k^*(x, .) \in H^{-\sigma} \quad \text{und} \quad \gamma^{\mathrm{int}}_{1,y} U_k^*(x, .) \in H^{-\sigma}$$

für beliebiges $\sigma \in \mathbb{R}$.
Sind die Voraussetzungen von Satz 4.5 erfüllt, dann folgt für $\sigma_1 = -2$ und $\sigma_2 = -1$

$$|u(x) - u_h(x)| \leq ch^{3/2} \left(\|w\|^2_{H^1_{\mathrm{pw}}(\Gamma)} + \eta \|v\|^2_{H^2(\Gamma)} \right)^{1/2}.$$

Als nächstes wird das zum diskreten Variationsproblem (4.10) äquivalente lineare Gleichungssystem betrachtet:
Für $w_N \in S_h^0(\Gamma)$ und $\tau_N = \varphi_j^0 \in S_h^0(\Gamma), j = 1, \ldots, N$ gilt

$$w_N = \sum_{i=1}^{N} w_i \varphi_i^0,$$

bzw. für $v_M \in S_h^1(\Gamma)$ und $\mu_M = \varphi_j^1 \in S_h^1(\Gamma), j = 1, \ldots, M$

$$v_M = \sum_{i=1}^{M} v_i \varphi_i^1.$$

Mit

$$\begin{aligned}
V_{k,h}[j,i] &= \langle V_k \varphi_i^0, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma \quad && i = 1 \ldots N, j = 1 \ldots N \\
D_{0,h}[j,i] &= \langle D_0 \varphi_i^1, \varphi_j^1 \rangle_\Gamma \quad && i = 1 \ldots M, j = 1 \ldots M \\
K_{k,h}[j,i] &= \langle K_k \varphi_i^1, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma \quad && i = 1 \ldots M, j = 1 \ldots N \\
M_h[j,i] &= \langle \varphi_i^1, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma \quad && i = 1 \ldots M, j = 1 \ldots N
\end{aligned}$$

und

$$\underline{v} = (v_1, \ldots, v_M)^T, \quad \underline{w} = (w_1, \ldots, w_N)^T,$$
$$\underline{g}^d = (g_1^d, \ldots, g_N^d)^T, \quad g_i^d = \langle g_d, \varphi_i^0 \rangle_\Gamma$$

ergibt sich durch Einsetzen in das Variationsproblem (4.10) das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D_{0,h} & (\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^* \\ i\eta(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h}) & V_{k,h} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_{k,h}} \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{g}^d \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

mit $\tilde{A}_{k,h} \in \mathbb{C}^{(N+M)\times(N+M)}$. Wir wissen nun, dass das diskrete Variationsproblem für ein hinreichend feines Netz eine eindeutige Lösung besitzt. Das bedeutet nun, dass auch das dazu äquivalente lineare Gleichungssystem, für ein hinreichend feines Netz, invertierbar ist. Da $\widetilde{D}_{0,h}$ positiv definit und symmetrisch ist, kann das Gleichungssystem (4.11) in ein Schur-Komplent-System umgeformt werden:

$$A_{k,h}\underline{w} = \left[V_{k,h} + i\eta(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})\widetilde{D}_{0,h}^{-1}(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^* \right] \underline{w} = \underline{g}^d. \tag{4.12}$$

In vielen Fällen sind die Dirichlet-Daten nicht als Funktion gegeben, sondern nur an den Knotenpunkten bekannt. Dann interpoliert man die Dirichlet-Daten mit stückweise linearen Funktionen:

$$\tilde{g}_d = \sum_{j=1}^{M} g_d(x_j) \varphi_j^1. \tag{4.13}$$

Es gilt dann

$$\tilde{g}_i^d = \langle \tilde{g}_d, \varphi_i^0 \rangle_\Gamma = \sum_{j=1}^{M} g_d(x_j) \langle \varphi_j^1, \varphi_i^0 \rangle_\Gamma = \sum_{j=1}^{M} M_h[j,i] g_d(x_j) = (M_h^T \underline{g}_d)_i \tag{4.14}$$

mit $\underline{g}_d = (g_d(x_1), \ldots, g_d(x_M))$. Den Fehler in der rechten Seite des Gleichungssystems, der durch Interpolation der Dirichlet-Daten entsteht, bringt jedoch eine schlechtere Konvergenzordnung (siehe [32]). Diese Tatsache wird dann im Kapitel 5 anhand numerischer Beispiele verifiziert.

4.4 Neumann-Problem

Für die Lösung des äusseren Neumann-Randwertproblems wurde im vorigen Kapitel die Randintegralgleichung (3.15)

$$(C_k w)(x) = (D_k w)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')V_0^{-1}(-\frac{1}{2}I + K_{-k})w(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma$$

erhalten. Äquivalent dazu ist das Variationsproblem (3.16):
Gesucht ist $(v, w) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{array}{rcccl} \langle D_k v, \mu \rangle_\Gamma & + & i\eta\langle(-\frac{1}{2}I + K_k')w, \mu\rangle_\Gamma & = & \langle g_n, \mu \rangle_\Gamma \\ \langle V_0 w, \tau \rangle_\Gamma & - & \langle(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v, \tau\rangle_\Gamma & = & 0 \end{array} \tag{4.15}$$

für alle $(\mu, \tau) \in (H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma))$ gilt.
Durch Wahl des Raums der Basisfunktionen (4.9) analog zum Dirichlet-Problem erhält man das diskrete Variationsproblem:
Gesucht ist $(v_M, w_N) \in \Pi_M \times X_N$, sodass

$$\begin{array}{rcccl} \langle D_k v_M, \mu_M \rangle_\Gamma & + & i\eta\langle(-\frac{1}{2}I + K_k')w_N, \mu_M\rangle_\Gamma & = & \langle g_n, \mu_M \rangle_\Gamma \\ \langle(-\frac{1}{2}I + K_{-k})v_M, \tau_N\rangle_\Gamma & - & \langle V_0 w_N, \tau_N \rangle_\Gamma & = & 0 \end{array} \tag{4.16}$$

für alle $(\mu_M, \tau_N) \in \Pi_M \times X_N$ erfüllt ist.
Analog wie beim Dirichlet-Problem wählt man $X_N = S_h^0(\Gamma)$ und $\Pi_M = S_h^1(\Gamma)$ und es gilt:

Satz 4.6. *Es sei (v, w) die eindeutige Lösung des Variationsproblems (3.16). Dann hat das diskrete Variationsproblem (4.16) eine eindeutige Lösung (v_M, w_N), vorausgesetzt N und M sind groß genug. Ist $v \in H^2(\Gamma)$ und $w \in H^1_{pw}(\Gamma)$, dann gilt*

$$\|w - w_N\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|v - v_M\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq ch^3(\|w\|^2_{H^1_{pw}(\Gamma)} + \|v\|^2_{H^2(\Gamma)}).$$

Nach Satz 3.14 ist das System koerziv und man kann Cea's Lemma anwenden. Die Fehlerabschätzung folgt analog wie beim Dirichlet-Problem aus Cea's Lemma und den Approximationseigenschaften der Räume $S_h^0(\Gamma)$ und $S_h^1(\Gamma)$.
Analog wie beim Dirichlet-Problem erhält man unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 die punktweise Fehlerabschätzung

$$|u(x) - u_h(x)| \leq h^{3/2} \left(\eta\|w\|^2_{H^1_{\mathrm{pw}}(\Gamma)} + \|v\|^2_{H^2(\Gamma)}\right)^{1/2}.$$

Für $v_M \in S_h^1(\Gamma)$ und $\varphi_j^1 \in S_h^1(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, M$ gilt wie beim Dirichlet-Problem

$$v_M = \sum_{i=1}^{M} v_i \varphi_i^1$$

bzw. für $w_N \in S_h^0(\Gamma)$ und $\varphi_j^0 \in S_h^0(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, N$

$$w_N = \sum_{i=1}^{N} w_i \varphi_i^0.$$

Mit

$$\begin{aligned}
D_{k,h}[j,i] &= \langle D_k \varphi_i^1, \varphi_j^1 \rangle_\Gamma & i = 1\ldots M, j = 1\ldots M\\
V_{0,h}[j,i] &= \langle V_0 \varphi_i^0, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma & i = 1\ldots N, j = 1\ldots N\\
K_{k,h}[j,i] &= \langle K_k \varphi_i^1, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma & i = 1\ldots M, j = 1\ldots N\\
M_h[j,i] &= \langle \varphi_i^1, \varphi_j^0 \rangle_\Gamma & i = 1\ldots M, j = 1\ldots N
\end{aligned}$$

und

$$\underline{v} = (v_1, \ldots, v_M)^T, \quad \underline{w} = (w_1, \ldots, w_N)^T,$$
$$\underline{g}^n = (g_1^n, \ldots, g_M^n), \quad g_i^n = \langle g_n, \varphi_i^1 \rangle_\Gamma.$$

ergibt sich durch Einsetzen in das Variationsproblem (3.16) das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} V_{0,h} & (-\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^T \\ i\eta(\frac{1}{2}M_h + K_{-k,h}) & D_{k,h} \end{pmatrix}}_{\tilde{C}_{k,h}} \begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{g}^n \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

mit $\tilde{C}_{k,h} \in \mathbb{C}^{(N+M)\times(N+M)}$. Da $V_{0,h}$ positiv definit und symmetrisch ist, kann das Gleichungssystem (4.11) in ein Schur-Komplent-System umgeformt werden:

$$C_{k,h}\underline{w} = \left[D_{k,h} + i\eta(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h}) V_{0,h}^{-1} (\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^* \right] \underline{v} = \underline{g}^n. \tag{4.18}$$

Liegen die Neumann-Daten nicht als Funktion sondern nur an gewissten Punkten vor, so interpoliert man die Neumann-Daten mit konstanten Funktionen:

$$\tilde{g}_n(x) = \sum_{j=1}^{N} g_n(x_j^s) \varphi_j^0. \tag{4.19}$$

Der Punkt x_j^s wird hier als Schwerpunkt des Elements τ_j gewählt. Analog zum Dirichlet-Problem erhält man

$$\tilde{g}_i^n = \langle \tilde{g}_n, \varphi_i^1 \rangle_\Gamma = \sum_{j=1}^{N} g_n(x_j^s) \langle \varphi_j^0, \varphi_i^1 \rangle_\Gamma = \sum_{j=1}^{N} g_n(x_j^s) M_h[i,j] = (M_h \underline{g}_n)_i \tag{4.20}$$

mit $\underline{g}_n = (g_n(x_1^s), \ldots, g_n(x_N^s))^T$.

5 Numerische Beispiele

Im letzten Kapitel sollen die in dieser Arbeit betrachteten Methoden zur Lösung des äusseren Dirichlet- bzw. Neumann-Randwertproblems, mittels numerischer Beispiele untersucht werden. Die Matrizen für die Randintegraloperatoren wurden mit Hilfe der Programme von Matthias Fischer erstellt (siehe [18]). Die komplexwertigen linearen Gleichungssysteme wurden mit dem GMRES-Algorithmus (siehe [33], [26]) mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-8} gelöst.

5.1 Dirichlet-Randwertproblem

Im folgenden wird als Geometrie ein Würfel mit den Eckpunkten $(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),$ $(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)$ mit einer Randdiskretisierung mit $N = 816$ Elementen und $M = 410$ Knoten betrachtet. Als Wellenzahl wird

$$k = \sqrt{3}\pi$$

betrachtet. $k^2 = \lambda$ ist dann ein Eigenwert des inneren Dirichlet-Eigenwertproblems für $-\Delta$ mit der Eigenfunktion

$$u_\lambda(x) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3).$$

Laut Satz 3.1 ist der Operator V_k dann nicht mehr invertierbar. Hier soll zunächst demonstriert werden, dass die Verwendung des Einfachschichtpotentialansatzes tatsächlich zu einer falschen Lösung führt.
Die Dirichlet-Daten für das Beispiel wurden durch Interpolation (siehe (4.13), (4.14)) der Funktion

$$u(x) = \frac{e^{ik|x-x_s|}}{|x-x_s|}, \quad x_s = (0.2, 0.2, 0.2)^T \in \Omega \tag{5.1}$$

erhalten, die einen Monopol, also eine punktförmige Schallquelle mit Quellpunkt $x_s \in \Omega$, modelliert. Die berechnete Lösung wurde dann mit der exakten Lösung entlang der Geraden

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1]$$

verglichen.

1. Zuerst wurde der Einfachschichtpotentialansatz (2.10)

$$(V_k w)(x) = g_d(x), \quad x \in \Gamma,$$

betrachtet. Die Diskretisierung und die Interpolation der Dirichlet-Daten führt dann auf das lineare Gleichungssystem

$$V_{k,h}\underline{w} = M_h^T \underline{g}_d. \tag{5.2}$$

Durch die Lösung dieses Gleichungssystems und Einsetzen in die Darstellungsformel

$$u_h(x) = (\widetilde{V}_k w_N)(x), \quad x \in \Omega^c$$

erhält man für die Näherungslösung u_h das in Abbildung 5.1 dargestellte Ergebnis:

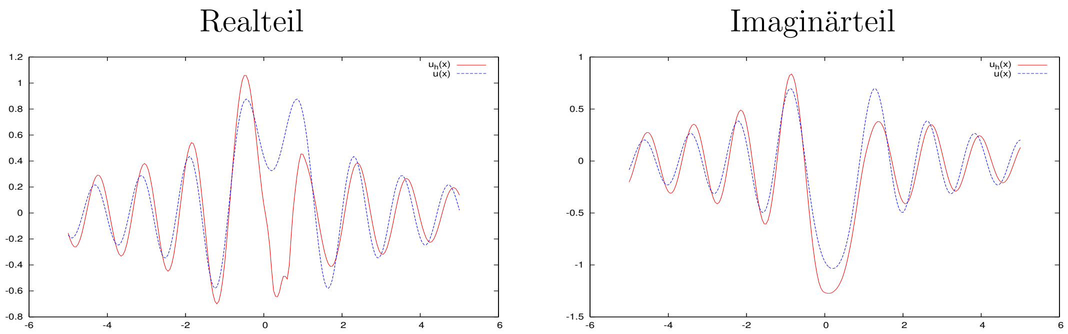

Abbildung 5.1: Einfachschichtpotentialansatz

Hier ist der erwartete Effekt eingetreten: Durch die Tatsache, dass V_k im Kontinuierlichen nicht invertierbar ist, ist die Matrix $V_{k,h}$, die ja den Operator V_k approximiert, schlecht konditioniert. Das GMRES-Verfahren für das Gleichungssystem (5.2) konvergiert zwar gegen eine Lösung, diese weicht jedoch sehr deutlich von der exakten Lösung ab und ist damit unbrauchbar.

2. Als nächstes wurde das Randwertproblem mit der modifizierten Randintegralgleichung (3.7)

$$(V_k w)(x) + i\eta(\frac{1}{2}I + K_k)\widetilde{D}_0^{-1}(\frac{1}{2}I + K'_{-k})w(x) = g_d(x), \quad x \in \Gamma$$

mit $\eta = 1$ gelöst. Für diese Randintegralgleichung wurde in Kapitel 4 das lineare Gleichungssystem (4.11)

$$\begin{pmatrix} D_{0,h} & (\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^* \\ i(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h}) & V_{k,h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ M_h^T \underline{g}_d \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

erhalten. Einsetzen der Lösung des linearen Gleichungssystems in die Darstellungsformel

$$u_h(x) = (\widetilde{V}_k w_N)(x) + i(W_k v_M)(x), \quad x \in \Omega^c$$

ergibt eine Näherungslösung u_h, die bis auf einen sehr kleinen Diskretisierungsfehler mit der exakten Lösung übereinstimmt, vgl. Abbildung 5.2:

Realteil Imaginärteil

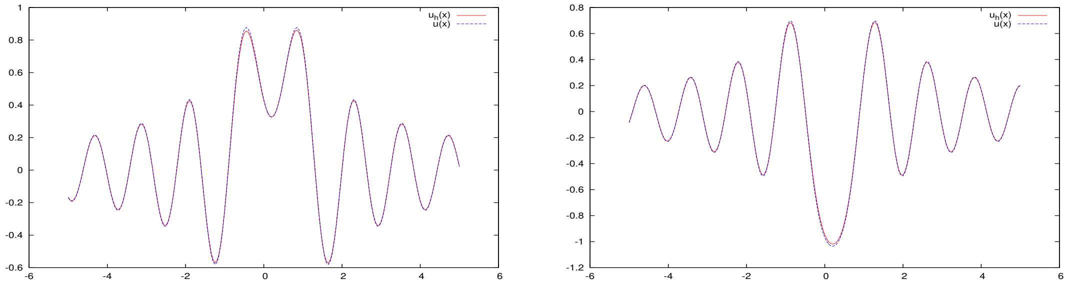

Abbildung 5.2: Modifizierte Randintegralgleichung

3. Der direkte Ansatz führt auf die Randintegralgleichung (2.14)

$$(V_k \gamma_1^{\text{ext}} u)(x) = (-\frac{1}{2} I + K_k) g_d(x), \quad x \in \Gamma. \tag{5.4}$$

Durch die Diskretisierung dieser Randintegralgleichung erhält man dann das lineare Gleichungssystem

$$V_{k,h} \underline{g}_n = (-\frac{1}{2} M_h + K_{k,h}) \underline{g}_d.$$

Die durch

$$\tilde{g}_n(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i \varphi_i^0(x), \quad x \in \Gamma$$

mit $\underline{g}_n = (g_1, \ldots, g_n)^T$ definierte Funktion ist dann eine Näherung der Neumann-Daten g_n. Die Näherungslösung u_h erhält man dann durch Einsetzen der Dirichlet-Daten $\tilde{g}_d$ und der Neumann-Daten $\tilde{g}_n$ in die Darstellungsformel

$$u_h(x) = -(\widetilde{V}_k \tilde{g}_n)(x) + (W_k \tilde{g}_d)(x), \quad x \in \Omega^c.$$

Die so berechnete Näherungslösung u_h stimmt jedoch ebenfalls bis auf einen kleinen Fehler mit der exakten Lösung überein, siehe Abbildung 5.3:

Realteil Imaginärteil

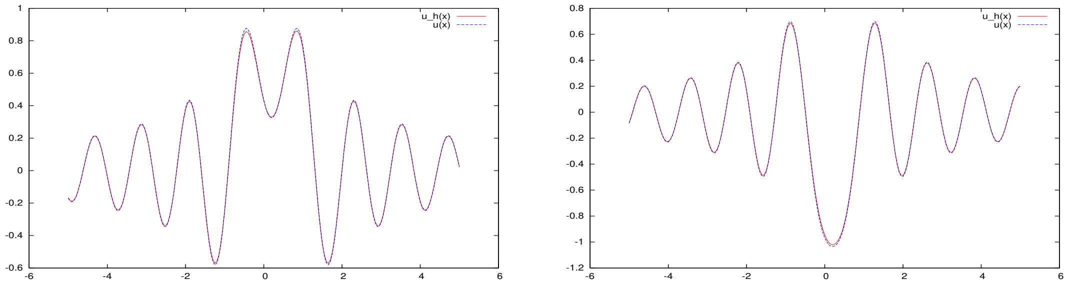

Abbildung 5.3: Direkter Ansatz

Dies lässt sich dadurch erklären, dass im kontinuerlichen (siehe Korollar 3.3)

$$(-\frac{1}{2}I + K_k)g_d \in \mathcal{I}(V_k)$$

gilt. Das heisst, die rechte Seite der Gleichung (2.9) ist im Bild von V_k. In diesem Beispiel hat sich diese Eigenschaft vom Kontinuierlichen ins Diskrete übertragen. Diese Tatsache ist aber als Ausnahme anzusehen, d.h. im Allgemeinen (beispielsweise bei komplizierteren Gebieten oder einer ungenauen Approximation der Randintegraloperatoren) kann man sich nicht darauf verlassen, dass diese Eigenschaft im Diskreten auch gilt. Daher sollte man auch hier zur Lösung eine Randintegralgleichung verwenden, die für alle Wellenzahlen eindeutig lösbar ist.

5.2 Neumann-Randwertproblem

Für das Neumann-Randwertproblem wurden die in dieser Arbeit besprochenen Lösungsansätze für verschiedene Geometrien und verschiedene Wellenzahlen verglichen. Die Neumann-Daten wurden durch Interpolation bzw. Projektion der Monopol-Funktion (5.1) erhalten. Für jede betrachtete Methode wurde der absolute Fehler in einem Feldpunkt $x^* \in \Omega$

$$\text{error} = |u(x^*) - u_h(x^*)|$$

berechnet.

5.2.1 Indirekte Methoden

Die folgenden indirekten Lösungsmethoden wurden betrachtet:

1. Für die **Modifizierte Randintegralgleichung** (3.15)

$$(D_k v)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')V_0^{-1}(-\frac{1}{2} + K_{-k})v(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma$$

mit $\eta = 1$ wurde das Schur-Komplement-System (4.18)

$$C_{k,h}\underline{v} = D_{k,h}\underline{v} + i(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})V_{0,h}^{-1}(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^*\underline{v} = \underline{g}^n \tag{5.5}$$

mit dem GMRES-Algorithmus gelöst. Die Matrix-Vektor Multiplikation im k-ten GMRES-Schritt sieht dann wie folgt aus

$$C_{k,h}\underline{w}^k = D_{k,h}\underline{v}^k + i(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})\underline{p}^k \tag{5.6}$$

mit
$$\underline{p}^k = V_{0,h}^{-1}(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^* \underline{v}^k.$$
Das heisst, zuerst wird die eindeutige Lösung $\underline{p}^k$ des linearen Gleichungssystems
$$V_{0,h}\underline{p}^k = (\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^* \underline{v}^k$$
bestimmt. $V_{0,h}$ ist eine positive-definite, symmetrische und reellwertige Matrix. Daher wird die Lösung $\underline{p}^k$ durch zweimaliges Anwenden des reellen CG-Algorithmus (siehe [33], [26]) mit einer relativen Genauigkeit 10^{-8} bestimmt und schließlich in (5.6) eingesetzt.
Die Lösung des linearen Gleichungssystems (5.5) setzt man dann in die Darstellungsformel
$$u_h(x) = i(\widetilde{V}_k w_N)(x) - (W_k v_M)(x), \quad x \in \Omega^c$$
ein.

2. Für den Ansatz von **Brakhage-Werner** (3.2)
$$-(D_k v)(x) + i\eta(-\frac{1}{2}I + K_k')v(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma$$
erhält man mit $\eta = 1$ das lineare Gleichungssystem
$$(-D_{k,h} + i(-\frac{1}{2}\hat{M}_h + \hat{K}_{k,h})^T)\underline{v} = \underline{g}^n,$$
wobei
$$\begin{aligned} \hat{M}_h[j,i] &= \langle \varphi_i^1, \varphi_j^1 \rangle_\Gamma \\ \hat{K}_{k,h}[j,i] &= \langle K_k \varphi_i^1, \varphi_j^1 \rangle_\Gamma \end{aligned}$$
ist. Die Näherungslösung u_h erhält man durch Einsetzen in die Darstellungsformel
$$u_h(x) = i(\widetilde{V}_k v_M)(x) + (W_k v_M)(x), \quad x \in \Omega^c.$$

3. Der **Einfachschichtpotentialansatz** (2.11)
$$-\frac{1}{2}v(x) + (K_k' v)(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma$$
führt auf das lineare Gleichungssystem
$$(-\frac{1}{2}\hat{M}_h + \hat{K}_{k,h})^T \underline{v} = \underline{g}^n.$$

4. Für den **Doppelschichtpotentialansatz** (2.13)

$$-(D_k v)(x) = g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma$$

wird das lineare Gleichungssystem

$$-D_{k,h}\underline{v} = \underline{g}^n$$

gelöst. Einsetzen in die Darstellungsformel

$$u_h(x) = (W_k v_M)(x), \quad x \in \Omega^c$$

ergibt wieder eine Näherungslösung u_h.

Sind die Neumann-Daten durch Interpolation (siehe (4.19)) gegeben, so wird der Vektor $\underline{g}^n$ durch $M_h \underline{g}_n$ (siehe (4.20)) ersetzt.

5.2.2 Direkte Methoden

Für die folgenden 2 direkten Methoden wurden nur interpolierte Randdaten betrachtet:

1. Die Randintegralgleichung von **Burton-Miller** (3.3)

$$\left(i\eta D_k - \frac{1}{2}I + K_k\right)\gamma_0^{\text{ext}} u = \left(V_k - i\eta\frac{1}{2}I - i\eta K_k'\right) g_n$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\left(i\eta D_{k,h} - \frac{1}{2}\hat{M}_h + \hat{K}_{k,h}\right)\underline{u}_d = \left(\hat{V}_{k,h} - i\eta(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h})^T\right)\underline{g}_n,$$

wobei dann $\underline{u}_d$ eine Näherung der unbekannten Dirichlet-Daten darstellt und

$$\hat{V}_{k,h}[j,i] = \langle V_k \varphi_i^0, \varphi_j^1 \rangle_\Gamma$$

gilt.

2. Weiters wurde für das Neumann-Problem die **direkte Randintegralgleichung 1. Art** betrachtet, (2.17)

$$(D_k \gamma_0^{\text{ext}} u)(x) = -(\frac{1}{2}I + K_k')g_n(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Durch Diskretisierung erhält man dann das lineare Gleichungssystem

$$(D_{k,h}\underline{u}_d) = -(\frac{1}{2}M_h + K_{k,h}^T)\underline{g}_n.$$

Bei den obigen zwei direkten Methoden erhält man als Lösung des linearen Gleichungssystems $\underline{u}_d = (u_1^d, \dots, u_N^d)^T$.

$$\tilde{u}_d(x) = \sum_{i=1}^{M} u_i^d \varphi_i^1(x)$$

ist dann eine Näherungslösung der Dirichlet-Daten. Einsetzen der Neumann- und Dirichlet-Daten in die Darstellungsformel

$$u_h(x) = -(\widetilde{V}_k \tilde{g}_n)(x) + (W_k \tilde{u}_d)(x), \quad x \in \Omega^c$$

ergibt dann die Näherungslösung u_h.

5.2.3 Kugel

Es sei $\Omega \approx B_1(0)$ ein Icosaeder dessen Form sich in jedem Verfeinerungsschritt der Form einer Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung annähert. Es wurde die Wellenzahl

$$k_1 = 4$$

betrachtet. Der Quellpunkt des Monopols $x_s \in \Omega$ und den Auswertungspunkt $x^* \in \Omega$ wurden wie folgt gewählt:

$$x_s = (0, 0, 0.9)^T, \quad x^* = (1.5, 0, 0)^T$$

- Interpolation - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
42	80	14	2.004e−1	13	2.058e−1	14	2.060e−1	14	2.037e−1
162	320	23	4.892e−2	18	5.104e−2	21	4.814e−2	19	5.103e−2
642	1280	28	1.293e−3	25	1.794e−3	25	1.132e−3	26	1.885e−3
2562	5120	36	3.864e−4	35	3.277e−4	26	4.262e−4	36	4.698e−4

Tabelle 5.1

- Interpolation - Direkte Methoden

		1. Burton-Miller		2. Direkter Ansatz	
M	N	It	error	It	error
42	80	13	2.002e−1	13	2.020e−1
162	320	18	4.082e−2	18	4.904e−2
642	1280	24	1.316e−3	25	1.428e−3
2526	5120	32	4.006e−4	35	4.125e−4

Tabelle 5.2

Diese Wellenzahl stimmt nicht mit einem Eigenwert des inneren Neumann-Eigenwert-Problems für $-\Delta$ überein, das heisst es ist zu erwarten dass alle Methoden konvergieren und ähnliche Ergebnisse liefern, was sich auch im numerischen Beispiel bestätigt.

- L_2-Projektion - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
42	80	14	4.111e−2	14	4.059e−2	14	6.942e−2	14	5.180e−2
162	320	23	2.918e−3	18	1.689e−2	22	2.906e−3	19	3.971e−3
642	1280	28	3.364e−4	25	7.883e−4	25	1.111e−4	26	9.640e−4
2562	5120	36	9.572e−6	35	1.129e−4	26	3.920e−5	36	1.445e−4

Tabelle 5.3

Diskretisiert man die Neumann-Daten mit L_2-Projektion ergibt sich wie erwartet eine bessere Konvergenzordnung.

Das folgende Beispiel wurde nun mit der Wellenzahl

$$k_2 = 4.5,$$

gerechnet. k_2 ist hier nahe an einem 'spurious mode', der bei ca. 4.493 liegt. Quell- und Auswertungspunkt wurden wie oben gewählt:

$$x_s = (0, 0, 0.9)^T, \quad x^* = (1.5, 0, 0)^T$$

- Interpolation - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
42	80	16	2.139e−1	15	2.309e−1	15	2.279e−1	15	2.375e−1
162	320	25	5.188e−2	22	5.715e−2	26	5.181e−2	26	5.407e−2
642	1280	31	2.365e−3	27	3.179e−3	36	2.358e−3	39	5.096e−3
2562	5120	39	1.688e−4	38	1.172e−4	38	2.856e−4	58	2.074e−3

Tabelle 5.4

Man sieht hier, dass der Doppelschichtpotentialansatz Konvergenz liefert. Durch die Tatsache, dass k sehr nahe an einem 'spurious mode' liegt ist die Matrix $D_{k,h}$ schlecht konditioniert und daher die Iterationszahlen beim Doppelschichtpotentialansatz höher. Die Konvergenzordnung ist zwar schlechter als bei den anderen Methoden aber der Fehler liegt noch immer in einem tolerierbaren Bereich.

- Interpolation - Direkte Methoden

		1. Burton-Miller		2. Direkter Ansatz	
M	N	It	error	It	error
42	80	14	2.152e−1	14	2.162e−1
162	320	19	5.115e−2	23	5.261e−2
642	1280	23	2.094e−3	36	2.314e−3
2562	5120	32	1.586e−4	52	1.405e−4

Tabelle 5.5

Bei den Iterationszahlen beim direkten Ansatz lässt sich der gleiche Effekt beobachten wie beim Doppelschichtpotentialansatz.

- L_2-Projektion - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
42	80	17	5.435e−2	15	2.181e−2	15	7.317e−2	15	1.978e−2
162	320	25	3.031e−3	22	4.608e−3	27	2.433e−3	26	7.262e−3
642	1280	31	4.649e−4	27	1.264e−3	36	4.135e−4	39	4.809e−3
2562	5120	39	7.749e−5	38	1.834e−4	38	1.583e−4	58	1.911e−3

Tabelle 5.6

5.2.4 Würfel

Als nichtglatte Geometrie wurde ein Würfel mit Seitenlänge 1 mit Eckpunkten in $(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)$ betrachtet. Die Wellenzahl sei

$$k_1 = 5.4414$$

k_1 ist dann nahe zum Eigenwert $\lambda = \sqrt{3}\pi$ des Dirichlet- und Neumann-Eigenwertproblems des Operators $-\Delta$. Quell- und Auswertungspunkt sind wie folgt gewählt

$$x_s = (0.2, 0.2, 0.2)^T, \quad x^* = (1.2, 0, 2)^T.$$

- Interpolation - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
53	108	28	1.087e−2	25	2.629e−2	26	9.249e−2	27	1.731e−1
104	204	29	8.881e−3	27	1.385e−2	31	1.303e−1	30	1.946e−1
231	458	31	4.179e−3	30	5.800e−3	36	1.155e−1	35	1.481e−1
410	816	33	1.754e−3	33	2.354e−3	39	2.799e−1	41	1.377e−1
899	1794	40	6.962e−4	39	8.437e−4	42	3.860e−1	50	1.230e−1
1592	3180	45	4.176e−4	45	4.763e−4	43	2.145e−1	59	1.388e−1
3524	7044	54	1.729e−4	54	1.897e−4	44	1.192e−1	72	1.444e−1

Tabelle 5.7

Wie erwartet liefern Einfach- und Doppelschichtpotentialansatz ungenaue Ergebnisse, da k mit einem Eigenwert des Dirichlet- und Neumann-Eigenwertproblems zusammenfällt. Hingegen liefern die modifizierte Randintegralgleichungen eine vergleichbar gute Konvergenzordnung.

- Interpolation - Direkte Methoden

		1. Burton-Miller		2. Direkter Ansatz	
M	N	It	error	It	error
53	108	24	2.455e−2	26	2.112e−2
104	204	26	8.145e−3	30	5.532e−3
231	458	30	1.759e−3	36	2.312e−3
410	816	33	9.430e−4	41	9.828e−4
899	1794	38	3.764e−4	50	3.634e−4
1592	3180	44	2.533e−4	59	2.553e−4
3524	7044	52	1.107e−4	72	1.107e−4

Tabelle 5.8

Hier ist wieder ein ähnlicher Effekt wie beim Dirichlet-Problem zu beobachten. Die durch Verwendung der direkten Randintegralgleichung erhaltene Lösung konvergiert mit fast gleicher Konvergenzordnung wie Burton-Miller gegen die Lösung, obwohl k mit einem Eigenwert zusammenfällt. Der Grund dafür ist wieder, dass die rechte Seite der direkten Randintegralgleichung im Bild von $-D_k$ liegt, d.h. laut Korollar 3.3 gilt

$$(\frac{1}{2}I + K_k')w \in \mathcal{I}(-D_k) \quad \forall w \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Hier hat sich diese Eigenschaft der kontinuierlichen Randintegraloperatoren auf das lineare Gleichungssystem übertragen. Hier ist wieder zu beachten, dass keineswegs garantiert ist, dass sich diese Eigenschaft immer auf das lineare Gleichungssystem überträgt.

- L_2-Projektion - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
53	108	29	6.612e−3	24	1.334e−2	26	7.613e−2	26	1.603e−1
104	204	30	2.564e−3	27	6.502e−3	31	1.208e−1	30	1.850e−1
231	458	32	1.360e−3	30	3.224e−3	37	1.142e−1	36	1.464e−1
410	816	33	4.759e−4	33	1.077e−3	39	2.790e−1	41	1.367e−1
899	1794	40	2.468e−4	39	4.125e−4	42	3.858e−1	50	1.228e−1
1592	3180	45	1.279e−4	45	1.769e−4	43	2.146e−1	59	1.386e−1
3524	7044	54	5.237e−5	54	6.836e−5	44	1.193e−1	72	1.443e−1

Tabelle 5.9

Approximation der Neumann-Daten mit L_2-Projektion ergibt wieder im Fall der modifizierten Randintegralgleichung und des Ansatz von Brakhage-Werner eine bessere Konvergenzordnung.

Als nächstes wurde dasselbe Beispiel mit der Wellenzahl

$$k_2 = 5.5440$$

gerechnet. k fällt hier mit keinem Eigenwert von $-\Delta$ zusammen, weicht aber nur wenig von k_1 aus dem vorigen Beispiel ab. Quell- und Auswertungspunkt wurden wie oben gewählt

$$x_s = (0.2, 0.2, 0.2)^T, \quad x^* = (1.1, 0, 2)^T.$$

- Interpolation - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
53	108	29	1.167e−2	25	2.773e−2	24	1.588e−2	28	1.332
104	204	30	9.918e−3	27	1.426e−2	28	1.044e−2	30	7.683e−2
231	458	32	4.645e−3	30	5.918e−3	30	3.832e−3	34	1.189e−2
410	816	34	1.884e−3	34	2.473e−3	30	1.632e−3	38	3.792e−3
899	1794	40	7.858e−4	39	9.184e−4	30	5.397e−4	44	1.344e−3
1592	3180	46	4.439e−4	45	5.175e−4	31	3.564e−4	51	5.307e−4
3524	7044	54	1.831e−4	54	2.101e−4	30	1.445e−4	59	2.201e−4

Tabelle 5.10

Hier liefern, wie zu erwarten war, alle vier Methoden eine vergleichbar gute Konvergenzordnung. Die Tatsache, dass k_2 relativ nahe an einem Eigenwert liegt, sieht man an den hohen

Iterationszahlen des Doppelschichtpotentialansatzes. Weiters beobachtet man sehr niedrige Iterationszahlen für den Einfachschichtpotentialansatz, der Grund dafür ist allerdings noch nicht klar.

- Interpolation - Direkte Methoden

		1. Burton-Miller		2. Direkter Ansatz	
M	N	It	error	It	error
53	108	24	2.384e−2	28	3.646e−2
104	204	26	8.428e−3	30	5.822e−3
231	458	30	1.978e−3	34	3.149e−3
410	816	33	1.096e−3	38	1.321e−3
899	1794	39	4.399e−4	44	4.572e−4
1592	3180	44	2.912e−4	52	3.338e−4
3524	7044	52	1.306e−4	60	1.469e−4

Tabelle 5.11

Hier beobachtet man wie beim Doppelschichtpotentialansatz höhere Iterationszahlen beim direkten Ansatz, auf Grund der schlechten Kondition von D_k.

- L_2-Projektion - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
53	108	29	6.089e−3	25	1.263e−2	25	2.275e−3	28	1.194
104	204	31	2.614e−3	27	6.318e−3	28	2.272e−3	30	8.071e−2
231	458	32	1.508e−3	30	3.142e−3	30	6.973e−4	34	1.455e−2
410	816	34	4.504e−4	34	1.040e−3	30	1.924e−4	38	4.885e−2
899	1794	40	2.450e−4	39	4.120e−4	30	5.487e−5	44	1.424e−3
1592	3180	46	1.236e−4	45	1.778e−4	31	2.107e−5	51	7.220e−4
3524	7044	54	4.874e−5	54	7.020e−5	30	5.533e−6	59	2.884e−4

Tabelle 5.12

5.2.5 Zylinder

Zuletzt wurde als Geometrie ein Zylinder mit 2 Einheiten Höhe und mit dem Kreis $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ als Grundfläche betrachtet. Das Gebiet Ω nähert sich mit jedem Verfeinerungsschritt an den Zylinder an. Es wurde mit der Wellenzahl

$$k_1 = 3.696$$

und dem Quell- und Auswertungspunkt

$$x_s = (0, 0, 1.5)^T, \quad x^* = (1.5, 0, 0)^T$$

gerechnet.

- Interpolation - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
26	48	11	2.856e−1	10	2.155e−1	9	3.772e−2	10	8.428e−2
98	192	34	3.016e−2	30	3.878e−2	28	3.734e−2	40	4.079e−2
386	768	27	5.166e−3	25	6.665e−3	22	6.278e−3	27	8.558e−3
1570	3136	48	1.664e−3	50	1.279e−3	33	1.212e−4	64	1.775e−3

Tabelle 5.13

- Interpolation - Direkte Methoden

		1. Burton-Miller		2. Direkter Ansatz	
M	N	It	error	It	error
26	48	10	7.416e−2	11	7.055e−2
98	192	27	3.168e−2	40	2.987e−2
386	768	23	6.683e−3	27	6.867e−3
1570	3136	42	1.562e−3	64	1.544e−3

Tabelle 5.14

- L_2-Projektion - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
26	48	12	1.043e−1	10	6.349e−2	9	6.103e−1	10	2.034e−2
98	192	34	1.671e−2	30	1.862e−2	27	9.597e−3	40	3.629e−2
386	768	28	1.721e−3	25	2.092e−3	22	3.207e−4	27	5.665e−3
1570	3136	48	2.435e−4	50	3.234e−4	33	7.847e−5	64	8.313e−4

Tabelle 5.15

Das obige Beispiel wurde nun mit der Wellenzahl

$$k_2 = 5.5440$$

und dem Quell- und Auswertungspunkt

$$x_s = (0, 0, 1.5)^T, \quad x^* = (1.5, 0, 0)^T$$

gerechnet.

- Interpolation - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
26	48	13	1.305e−1	16	3.608e−1	9	3.015e−1	12	3.281e−1
98	192	53	1.212e−1	49	1.474e−1	42	1.125e−1	58	1.575e−1
386	768	45	2.471e−2	45	2.868e−2	33	2.320e−2	51	3.250e−2
1570	3136	68	5.470e−3	74	5.618e−3	50	4.813e−3	97	6.133e−3

Tabelle 5.16

- Interpolation - Direkte Methoden

		1. Burton-Miller		2. Direkter Ansatz	
M	N	It	error	It	error
26	48	11	1.615e−1	12	1.668e−1
98	192	38	1.094e−1	57	1.075e−1
386	768	29	2.550e−2	53	2.526e−2
1570	3136	54	5.324e−3	100	5.269e−3

Tabelle 5.17

- L_2-Projektion - Indirekte Methoden

		1. Modifizierte Formulierung		2. Brakhage-Werner		3. Einfachschicht-potentialansatz		4. Doppelschicht-potentialansatz	
M	N	It	error	It	error	It	error	It	error
26	48	13	2.919e−1	16	3.827e−1	10	4.663e−1	12	3.297e−1
98	192	53	5.857e−2	49	6.936e−2	42	3.528e−2	58	8.018e−2
386	768	45	2.971e−3	45	8.947e−3	35	2.110e−3	51	1.187e−2
1570	3136	68	1.371e−3	74	1.625e−3	50	4.141e−5	103	1.422e−3

Tabelle 5.18

Für k_1 und k_2 ist auffällig, dass der Einfachschichtpotentialansatz weniger Iterationen braucht als die anderen Methoden und eine Lösung mit einer deutlich höheren Genauigkeit liefert. Der gleiche Effekt lässt sich auch bei Würfel und Kugel beobachten, der Grund dafür ist aber noch ein offener Punkt.

5.3 Ausblick

In dieser Arbeit wurden Randintegralgleichungen und zugehörige Randelementmethoden zur Lösung von Dirichlet- und Neumann-Randwertproblemen der Helmholtzgleichung erhalten. Weiters wurde bewiesen und durch numerische Beispiele verifiziert, dass diese Methode für ein hinreichend feines Netz für alle Wellenzahlen eine Lösung mit guter Genauigkeit liefert. Viele Aspekte dieser Randelementmethode wurden jedoch in dieser Arbeit noch nicht betrachtet, wie zum Beispiel

- die Vorkonditionierung und effiziente Lösung der Blockgleichungssysteme,
- die Vorkonditionierung und effiziente Lösung der Schur-Komplement-Systeme,
- der Einfluss der Wellenzahl auf die Kondition der Gleichungssysteme,
- der Einfluss des Kopplungsparameters η auf die Kondition der Gleichungssysteme.

Bei der numerischen Analysis gibt noch viele offene Punkte, wie zum Beispiel

- die Untersuchung des Einflusses der Matrixapproximation auf die Genauigkeit,
- die Untersuchung des Einflusses der Wellenzahl auf das Konvergenzverhalten.

In den numerischen Beispielen wurde beobachtet, dass die durch den Einfachschichtpotentialansatz erhaltene Lösung bei Verfeinerung des Netzes deutlich schneller als, die durch die anderen Verfahren erhaltenen Lösungen, konvergiert und die entsprechenden Matrizen eine sehr gute Kondition haben. Der Grund dafür ist noch nicht geklärt.

Um grössere Beispiele aus industriellen Anwendungen zu berechnen ist der Einsatz von geeigneter Matrixkompression und schnellen Randelementmethoden nötig wie

- Schnelle Multipol Methode,
- $\mathcal{H}$-Matrizen,
- ACA,
- Wavelets.

Literaturverzeichnis

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Amini and P. J. Harris. A comparison between various boundary integral formulations of the exterior acoustic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 84(1):59–75, 1990.

[3] S. Amini and D. T. Wilton. An investigation of boundary element methods for the exterior acoustic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 54(1):49–65, 1986.

[4] X. Antoine and M. Darbas. Alternative integral equations for the iterative solution of acoustic scattering problems. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 58(1):107–128, 2005.

[5] W. Benthien and A. Schenck. Nonexistence and nonuniqueness problems associated with integral equation methods in acoustics. *Comput. & Structures*, 65(3):295–305, 1997.

[6] H. Brakhage and P. Werner. Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Arch. Math.*, 16:325–329, 1965.

[7] I. N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik, ergänzende Kapitel.* Teubner, Leipzig, 1979.

[8] A. Buffa and R. Hiptmair. Regularized combined field integral equations. *Numer. Math.*, 100(1):1–19, 2005.

[9] A. Buffa and S. Sauter. Stabilisation of the acoustic single layer potential on non-smooth domains. *SIAM J. Sci. Comput., to appear*, 2003.

[10] D. Burnett. A 3-d acoustic infinite element based on a generlized multipole expansion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96(5):2798–2816, 1994.

[11] A. J. Burton and G. F. Miller. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 323:201–210, 1971. A discussion on numerical analysis of partial differential equations (1970).

[12] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[13] L. Cremer and M. Möser. *Technische Akustik.* Springer, Berlin, 2003.

[14] L. Demkowicz and K. Gerdes. Convergence of the infinite element methods for the Helmholtz equation in separable domains. *Numer. Math.*, 79(1):11–42, 1998.

[15] K. Ehrenfried. Strömungsakustik I, Skript zur Vorlesung. http://vento.pi.tu-berlin.de/formB/nmain.pdf.

[16] S. Engleder and O. Steinbach. Modified Boundary Integral Formulations for the Helmholtz Equation. *J. Math. Anal. Appl., published electronically*, 2006.

[17] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31:629–651, 1977.

[18] M. Fischer. The Fast Multipole Boundary Element Method and its Application to Structure-Acoustic Field Interaction, 2004. Dissertation, Universität Stuttgart.

[19] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. *Boundary Integral Equations*. Springer, in preparation, Berlin.

[20] F. Ihlenburg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Springer, New-York, 1998.

[21] M. Kaltenbacher. *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. Springer, Berlin-Heidelberg, 2004.

[22] R. E. Kleinman and G. F. Roach. Boundary integral equations for the three-dimensional Helmholtz equation. *SIAM Rev.*, 16:214–236, 1974.

[23] R. Kress. *Linear integral equations*, volume 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[24] V. Kuznetsov. Equations of nonlinear acoustics. *Soviet Physics - Acoustics*, 16(4):467–470, 1971.

[25] W. McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[26] A. Meister. *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1999.

[27] J-C. Nèdèlec. *Acoustic and Electromagnetic Equations*. Springer, New-York, 2001.

[28] G. Of. BETI Gebietszerlegungsmethoden mit schnellen Randelementverfahren und Anwendungen, 2006. Dissertation, Universität Stuttgart.

[29] S. Sauter and C. Schwab. *Randelementmethoden*. Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2004.

[30] A. Schatz, V. Thomée, and W. Wendland. *Mathematical theory of finite and boundary element methods*, volume 15 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[31] A. Sommerfeld. *Partielle Differentialgleichungen der Physik, Vorlesungen über Theoretische Physik, Band 6*. Verlag Harri Deutsch, Nachdruck der 6. Auflage, Thun, 1978.

[32] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente.* Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2003.

[33] O. Steinbach. *Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Algorithmen und Anwendungen.* Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2005.

[34] O. Steinbach. *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. Finite and Boundary Elements.* Springer, New York, 2007.

[35] P. Werner. Randwertprobleme der mathematischen Akustik. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 10:29–66, 1962.

[36] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1982.

Erschienene Preprints ab Nummer 2006/1
Erschienene Preprints ab Nummer 2005/1

2005/1	O. Steinbach	Numerische Mathematik 1. Vorlesungsskript.
2005/2	O. Steinbach	Technische Numerik. Vorlesungsskript.
2005/3	U. Langer G. Of O. Steinbach W. Zulehner	Inexact Fast Multipole Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/4	U. Langer G. Of O. Steinbach W. Zulehner	Inexact Data–Sparse Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/5	U. Langer O. Steinbach W. L. Wendland	Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications Söllerhaus Workshop, 25.–28.9.2005, Book of Abstracts.
2005/6	U. Langer A. Pohoata O. Steinbach	Dual–Primal Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods
2005/7	O. Steinbach (ed.)	Jahresbericht 2004/2005
2006/1	S. Engleder O. Steinbach	Modified Boundary Integral Formulations for the Helmholtz Equation.
2006/2	O. Steinbach	2nd Austrian Numerical Analysis Day. Book of Abstracts.
2006/3	B. Muth G. Of P. Eberhard O. Steinbach	Collision Detection for Complicated Polyhedra Using the Fast Multipole Method of Ray Crossing
2006/4	G. Of B. Schneider	Numerical Tests for the Recovery of the Gravity Field by Fast Boundary Element Methods
2006/5	U. Langer O. Steinbach W. L. Wendland	4th Workshop on Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications. Book of Abstracts.
2006/6	O. Steinbach (ed.)	Jahresbericht 2005/2006
2006/7	G. Of	The All–floating BETI Method: Numerical Results
2006/8	P. Urthaler G. Of O. Steinbach	Automatische Positionierung von FEM–Netzen
2006/9	O. Steinbach	Challenges and Applications of Boundary Element Domain Decomposition Methods