Mathematische Grundlagen

Vektorraum

$$\underline{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top, \quad u_k \in \mathbb{R}$$

Euklidisches Skalarprodukt

$$(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

Euklidische Vektornorm

$$\|\underline{u}\|_2 = \sqrt{(\underline{u}, \underline{u})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}$$

Vektoren $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, falls

$$(\underline{u}, \underline{v})_2 = 0$$

Cauchy Schwarz Ungleichung

$$(\underline{u}, \underline{v})_2 \leq \|\underline{u}\|_2 \|\underline{v}\|_2$$

Matrix

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A = (A[i,j])_{i,j=1}^n, \quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Euklidische Matrixnorm

$$\|A\|_2 = \sup_{0\neq \underline{u}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|A\underline{u}\|_2}{\|\underline{u}\|_2}, \qquad \|A\underline{u}\|_2 \le \|A\|_2 \|\underline{u}\|_2$$

Frobenius Norm

$$\|A\|_F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A[i,j])^2, \qquad \|A\underline{u}\|_2 \le \|A\|_F \|\underline{u}\|_2$$

Spektrale Konditionszahl einer invertierbaren Matrix

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

Matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal, falls

$$V^\top V = V\, V^\top = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Für orthogonale Matrizen folgt

$$\|V^\top \underline{u}\|_2^2 = (V^\top \underline{u}, V^\top \underline{u}) = (V\,V^\top \underline{u}, \underline{u}) = (\underline{u}, \underline{u}) = \|\underline{u}\|_2^2$$

und somit auch

$$\|A\|_2 = \sup_{\underline{0} \neq \underline{u} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\underline{u}\|_2}{\|\underline{u}\|_2} = \sup_{\underline{0} \neq \underline{u} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|V^\top A\underline{u}\|_2}{\|\underline{u}\|_2} = \|V^\top A\|_2$$

Für die Frobenius Norm gilt entsprechend

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A[i,j])^2 = \sum_{j=1}^n \|A[\cdot,j]\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|V^\top A[\cdot,j]\|_2^2 = \|V^\top A\|_F^2$$

Invarianz bezüglich orthogonaler Transformationen

$$\|A\|_2 = \|V^\top A\|_2 = \|AV\|_2 = \|V^\top AV\|_2$$

$$\|A\|_F = \|V^\top A\|_F = \|AV\|_F = \|V^\top AV\|_F$$

Eigenwert, Eigenvektor

$$A\underline{v}^k = \lambda_k \underline{v}^k$$

Spektralradius

$$\varrho(A) = \max_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k(A)|$$

Eigenwerte $\lambda_k(A)$ einer symmetrischen Matrix $A = A^\top$ sind reell und die zugehörigen Eigenvektoren sind orthonormal:

$$(\underline{v}^k, \underline{v}^j) = \sum_{i=1}^n v_i^k v_i^j = 0 \quad \text{für } k \neq j, \quad (\underline{v}^k, \underline{v}^k) = 1$$

Folgerung: Für einen beliebigen Vektor $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\underline{u} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \underline{v}^k, \quad (\underline{u}, \underline{v}^j) = \sum_{k=1}^n \gamma_k (\underline{v}^k, \underline{v}^j), \quad \gamma_k = (\underline{u}, \underline{v}^k)$$

$$\|\underline{u}\|_2^2 = (\underline{u}, \underline{u}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_k \gamma_j (\underline{v}^k, \underline{v}^j) = \sum_{k=1}^n \gamma_k^2$$

Eine symmetrische Matrix $A = A^\top$ heißt positiv definit, falls alle ihre Eigenwerte positiv sind.

Folgerung: Für einen beliebigen Vektor $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}(A\underline{u}, \underline{u}) &= (A\sum_{k=1}^n \gamma_k \underline{v}^k, \underline{u}) = \sum_{k=1}^n \gamma_k (A\underline{v}^k, \underline{u}) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \lambda_k(A)(\underline{v}^k, \underline{u}) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k(A)\gamma_k^2 \geq \min_{k=1,\ldots,n} \lambda_k(A) \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 = \min_{k=1,\ldots,n} \lambda_k(A)\, (\underline{u}, \underline{u})\end{aligned}$$

Rayleigh Quotient

$$\min_{k=1,\ldots,n} \lambda_k(A) \leq \frac{(A\underline{u}, \underline{u})}{(\underline{u}, \underline{u})} \leq \max_{k=1,\ldots,n} \lambda_k(A), \quad \|\underline{u}\|_2 > 0$$

A symmetrisch und positiv definit

$$A\underline{v}^k = \lambda_k \underline{v}^k, \quad V = (\underline{v}^1, \ldots, \underline{v}^n) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad V^\top V = I$$

Dann gilt

$$AV = (A\underline{v}^1, \ldots, A\underline{v}^n) = (\lambda_1 \underline{v}^1, \ldots, \lambda_n \underline{v}^n) = VD, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_k(A))$$

Folgerung

$$V^\top A V = D, \quad A = VDV^\top = \sum_{k=1}^n \lambda_k(A) \underline{v}^k \underline{v}^{k,\top}$$

Folgerung

$$\|A\|_2 = \|VDV^\top\|_2 = \|D\|_2 = \max_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k(A)| = \lambda_{\max}(A) = \varrho(A)$$

Folgerung

$$\|A\|_F = \|VDV^\top\|_F = \|D\|_F = \sqrt{\sum_{k=1}^n [\lambda_k(A)]^2}$$

A symmetrisch und positiv definit

$$0 < \lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \ldots \leq \lambda_2(A) \leq \lambda_1(A)$$

Rang r Approximation A_r von A

$$A_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k(A) \underline{v}^k \underline{v}^{k,\top}$$

Fehler

$$A - A_r = \sum_{k=r+1}^{n} \lambda_k(A) \underline{v}^k \underline{v}^{k,\top}$$

$$\|A - A_r\|_2 = \|V(D - D_r)V^\top\|_2 = \|D - D_r\|_2 = \lambda_{r+1}(A)$$

$$\|A - A_r\|_F = \|V(D - D_r)V^\top\|_F = \|D - D_r\|_F = \sqrt{\sum_{k=r+1}^{n} [\lambda_k(A)]^2}$$

Für $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist

$$A = B^\top B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

symmetrisch und wegen

$$0 \leq \|B\underline{u}\|_2^2 = (B\underline{u}, B\underline{u}) = (B^\top B\underline{u}, \underline{u}) = (A\underline{u}, \underline{u}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\gamma_k^2$$

mit

$$A\underline{v}^k = \lambda_k \underline{v}^k, \quad \gamma_k = (\underline{u}, \underline{v}^k),$$

folgt

$$\lambda_k(A) \geq 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Faktorisierung

$$V^\top A V = V^\top B^\top B V = D = \operatorname{diag}(\lambda_k(A))_{k=1}^n$$

Wegen $\lambda_k(A) \geq 0$ existieren die Singulärwerte

$$\sigma_k(B) = \sqrt{\lambda_k(B^\top B)} \geq 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

Insbesondere sei

$$\sigma_k(B) > 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, \mu \leq \min\{n, m\}$$

Diagonalmatrix

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_k(B))_{k=1}^{\min\{n,m\}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Pseudoinverse

$$\Sigma^+ = \operatorname{diag}(\frac{1}{\sigma_1(B)}, \ldots, \frac{1}{\sigma_\mu(B)}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

mit

$$\Sigma^+ \Sigma = \begin{pmatrix} I_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Faktorisierung

$$V^\top B^\top B V = D = \Sigma^\top \Sigma$$

Multiplikation mit $\Sigma^{+,\top} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\Sigma^{+,\top} V^\top B^\top B V = \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Dann ist

$$U^\top B V = \Sigma, \qquad U = B V \Sigma^{+} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Singulärwertzerlegung

$$B = U \Sigma V^\top = \sum_{k=1}^{\mu} \sigma_k(B) \underline{u}^k \underline{v}^{k,\top}$$

Singulärwertzerlegung

$$B = U\Sigma V^\top = \sum_{k=1}^{\mu} \sigma_k(B)\underline{u}^k \underline{v}^{k,\top}$$

Rang r Approximation B_r von B $(r \leq \mu)$

$$B = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k(B)\underline{u}^k \underline{v}^{k,\top}$$

Fehler

$$\|B - B_r\|_2 = \|U(\Sigma - \Sigma_r)V^\top\|_2 = \|\Sigma - \Sigma_r\|_2 = \sigma_{r+1}(B)$$

$$\|B - B_r\|_F = \|U(\Sigma - \Sigma_r)V^\top\|_F = \|\Sigma - \Sigma_r\|_F = \sqrt{\sum_{k=r+1}^{\mu} [\sigma_k(B)]^2}$$

Rand 1 Störung einer regulären Matrix

$$M = A + \underline{a}\,\underline{b}^\top, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

Ansatz für inverse Matrix

$$M^{-1} = A^{-1} + \alpha A^{-1}\underline{a}\,\underline{b}^\top A^{-1}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} M^{-1}M &= [A^{-1} + \alpha A^{-1}\underline{a}\,\underline{b}^\top A^{-1}][A + \underline{a}\,\underline{b}^\top] \\ &= I + \alpha A^{-1}\underline{a}\,\underline{b}^\top + A^{-1}\underline{a}\,\underline{b}^\top + \alpha A^{-1}\underline{a}\,\underline{b}^\top A^{-1}\underline{a}\,\underline{b}^\top \\ &= I + (\alpha + 1 + \alpha \underline{b}^\top A^{-1}\underline{a}) A^{-1}\underline{a}\,\underline{b}^\top \stackrel{!}{=} I \end{aligned}$$

falls

$$\alpha + 1 + \alpha \underline{b}^\top A^{-1}\underline{a} = 0, \qquad \alpha = -\frac{1}{1 + \underline{b}^\top A^{-1}\underline{a}}, \quad \underline{b}^\top A^{-1}\underline{a} \neq -1$$

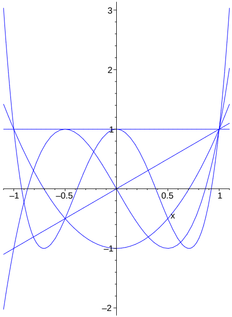
Sherman Morrison Formel

$$M^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \underline{b}^\top A^{-1}\underline{a}} A^{-1}\underline{a}\,\underline{b}^\top A^{-1}$$

Rang p Störung einer regulären Matrix: Sherman Morrison Woodbury Formel

Tschebyscheff Polynome

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$



Alternative Darstellungen

$$T_k(x) = \cos[k \arccos x] \quad \text{für } x \in [-1, 1]$$

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-k}\right]$$

Skalierung für $0 < a < b$:

$$x = \frac{b + a - 2t}{b - a} \in [-1, +1] \quad \text{für } t \in [a, b]$$

Skaliertes Tschebyscheff Polynom

$$\widetilde{T}_k(t) = \frac{T_k(\frac{b+a-2t}{b-a})}{T_k(\frac{b+a}{b-a})}, \qquad \widetilde{T}_k(0) = 1$$

MinMax Eigenschaft

$$\min_{p_k(t), p_k(0)=1} \max_{t \in [a,b]} |p_k(t)| = \max_{t \in [a,b]} |\widetilde{T}_k(t)| = \frac{1}{T_k(\frac{b+a}{b-a})}$$

Auswertung von

$$T_k(x) \;=\; \frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^k + (x+\sqrt{x^2-1})^{-k}], \quad x = \frac{b+a}{b-a}$$

Es ist

$$\begin{aligned} q &= x+\sqrt{x^2-1} = \frac{b+a}{b-1} + \sqrt{\left(\frac{b+a}{b-a}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{b-a}\left[(b+a)+\sqrt{(b+a)^2-(b-a)^2}\right] \\ &= \frac{1}{b-a}\left[b+a+2\sqrt{ab}\right] \;=\; \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} \end{aligned}$$

und somit

$$T_k(\frac{b+a}{b-a}) = \frac{1}{2}[q^k + q^{-k}] = \frac{q^{2k}+1}{2q^k}$$