# Schiefsymmetrisch gekoppelte Systeme

## Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{pmatrix}$$

mit Matrizen

$$A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad B \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, \quad D \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$$

## Auflösen der ersten Gleichung

$$\underline{x}_1 = A^{-1} B \underline{x}_2 + A^{-1} \underline{f}_1$$

## Schur Komplement System

$$S \underline{x}_2 = \left[ D + B^\top A^{-1} B \right] \underline{x}_2 = \underline{f}_2 - B^\top A^{-1} \underline{f}_1$$

## Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1^S \, (C_S \underline{x}_2, \underline{x}_2) \le (S \underline{x}_2, \underline{x}_2) \le c_2^S \, (C_S \underline{x}_2, \underline{x}_2) \quad \text{für alle } \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$$

und

$$c_1^A \, (C_A \underline{x}_1, \underline{x}_1) \le (A \underline{x}_1, \underline{x}_1) \le c_2^A \, (C_A \underline{x}_1, \underline{x}_1) \quad \text{für alle } \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$$

Für $c_1^A > 1$ gilt

$$((A - C_A)\underline{x}_1, \underline{x}_1) \;\geq\; (c_1^A - 1)\,(C_A\underline{x}_1, \underline{x}_1) \quad \text{für alle } \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$$

und somit ist

$$AC_A^{-1} - I \;=\; (A - C_A)C_A^{-1}$$

invertierbar.

transformiertes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} AC_A^{-1} - I & 0 \\ -B^\top C_A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B^\top & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_A^{-1} - I & 0 \\ -B^\top C_A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{pmatrix}$$

## transformierte Systemmatrix

$$M = \begin{pmatrix} AC_A^{-1} - I & 0 \\ -B^\top C_A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B^\top & D \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AC_A^{-1}A - A & (I - AC_A^{-1})B \\ B^\top(I - C_A^{-1}A) & D + B^\top C_A^{-1} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix}$$

## Faktorisierung

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_{12}^\top M_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} - M_{12}^\top M_{11}^{-1} M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & M_{11}^{-1} M_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^\top A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AC_A^{-1}A - A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

## Spektraläqzuvalenzungleichungen

$$c_1^A((A - C_A)\underline{x}_1, \underline{x}_1) \le ((AC_A^{-1}A - A)\underline{x}_1, \underline{x}_1) \le c_2^A((A - C_A)\underline{x}_1, \underline{x}_1)$$

für alle $\underline{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$

## transformierte Systemmatrix

- symmetrisch
- positiv definit
- CG Verfahren
- Vorkonditionierung

## Vorkonditionierung

$$C_M = \begin{pmatrix} A - C_A & 0 \\ 0 & C_S \end{pmatrix}$$

## Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1^M (C_M \underline{x}, \underline{x}) \leq (M \underline{x}, \underline{x}) \leq c_2^M (C_M \underline{x}, \underline{x}) \quad \text{für alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit

$$\begin{aligned} c_1^M &= \frac{1}{2} c_2^A [1 + c_1^S] - \sqrt{\frac{1}{4} [c_2^A (1 + c_1^S)]^2 - c_1^S c_2^A} \\ c_2^M &= \frac{1}{2} c_2^A [1 + c_2^S] + \sqrt{\frac{1}{4} [c_2^A (1 + c_2^S)]^2 - c_2^S c_2^A} \end{aligned}$$

## Vorkonditionierung

$$\widetilde{C}_M = \begin{pmatrix} A - C_A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

## Spektraläquivalenzungleichungen

$$\widetilde{c}_1^M \, (\widetilde{C}_M \underline{x}, \underline{x}) \le (M\underline{x}, \underline{x}) \le \widetilde{c}_2^M \, (\widetilde{C}_M \underline{x}, \underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\widetilde{c}_1^M = c_2^A - \sqrt{c_2^A(c_2^A - 1)}, \quad \widetilde{c}_2^M = c_2^A + \sqrt{c_2^A(c_2^A - 1)}.$$

## Vorkonditionierung

$$\underline{v}^{k+1} = C_M^{-1} \underline{r}^{k+1}$$

## Auswertung

$$\underline{v}_1^{k+1} = (A - C_A)^{-1} \underline{r}_1^{k+1}$$

## Rekursionsvorschrift des Residuums

$$\underline{r}^{k+1} = \underline{r}^k - \alpha_k M \underline{p}^k$$

## Insbesondere ist

$$\underline{r}_1^{k+1} = \underline{r}_1^k - \alpha_k (A C_A^{-1} - I)(A \underline{p}_1^k - B \underline{p}_2^k)$$

## vorkonditioniertes Residuum

$$\underline{v}_1^{k+1} = \underline{v}_1^k - \alpha_k C_A^{-1} (A \underline{p}_1^k - B \underline{p}_2^k)$$

## Initialisierung für $k = 0$:

$$\underline{v}_1^0 := C_A^{-1} \left[ A \underline{x}_1^0 - B \underline{x}_2^0 - \underline{f}_1 \right]$$

# CG Verfahren mit Bramble/Pasciak Transformation

Sei $\underline{u}^0 \in \mathbb{R}^{M_1+M_2}$ eine beliebig gegebene Startnäherung.

Berechne das Anfangsresiduum

$$\underline{\bar{r}}_1^0 := A\underline{u}_1^0 - B\underline{u}_2^0 - \underline{f}_1,\ \underline{\bar{r}}_2^0 := B^\top \underline{u}_1^0 + D\underline{u}_2^0 - \underline{f}_2.$$

Berechne das transformierte Anfangsresiduum

$$\underline{w}_1^0 := C_A^{-1}\underline{\bar{r}}_1^0,\ \underline{r}_1^0 := A\underline{w}_1^0 - \underline{\bar{r}}_1^0,\ \underline{r}_2^0 := \underline{\bar{r}}_2^0 - B^\top \underline{w}_1^0.$$

Initialisierung des CG Verfahrens:

$$\underline{v}_1^0 := \underline{w}_1^0,\ \underline{v}_2^0 := C_S^{-1}\underline{r}_2^0,\ \underline{p}^0 := \underline{v}^0,\ \varrho_0 := (\underline{v}^0, \underline{r}^0).$$

Für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

Realisiere die ursprüngliche Matrix–Vektor–Multiplikation

$$\underline{\widetilde{s}}_1^k := A\underline{p}_1^k - B\underline{p}_2^k,\ \underline{\widetilde{s}}_2^k := B^\top \underline{p}_1^k + D\underline{p}_2^k.$$

Berechne die Transformation

$$\underline{w}_1^k := C_A^{-1}\underline{\widetilde{s}}_1^k,\ \underline{s}_1^k := A\underline{w}_1^k - \underline{\widetilde{s}}_1^k,\ \underline{s}_2^k := \underline{\widetilde{s}}_2^k - B^\top \underline{w}_1^k.$$

Berechne die neuen Iterierten

$$\sigma_k := (\underline{s}^k, \underline{p}^k),\ \alpha_k := \varrho_k/\sigma_k;$$
$$\underline{u}^{k+1} := \underline{u}^k - \alpha_k \underline{p}^k,\ \underline{r}^{k+1} := \underline{r}^k - \alpha_k \underline{s}^k;$$
$$\underline{v}_1^{k+1} := \underline{v}_1^k - \alpha_k \underline{w}_1^{k+1},\ \underline{v}_2^{k+1} := C_S^{-1}\underline{r}_2^{k+1},\ \varrho_{k+1} := (\underline{v}^{k+1}, \underline{r}^{k+1})\ .$$

Stoppe, falls $\varrho_{k+1} \le \varepsilon \varrho_0$ mit einem vorgegebenen $\varepsilon$ erfüllt ist.
Andernfalls, bestimme die neue Suchrichtung:

$$\beta_k := \varrho_{k+1}/\varrho_k,\ \underline{p}^{k+1} := \underline{v}^{k+1} + \beta_k \underline{p}^k\ .$$