Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. Olaf Steinbach
Dipl.–Ing. Mario Gobrial

SS 2024
Blatt 1
14.3.2024

Numerische Mathematik 3

1. Betrachtet wird das Robin–Randwertproblem

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \qquad \frac{\partial}{\partial n_x} u(x) + u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

Man stelle eine Variationsformulierung zur Bestimmung von $u \in H^1(\Omega)$ auf und untersuche diese auf ihre eindeutige Lösbarkeit.

2. Betrachtet wird das Dirichlet–Problem

$$-u''(x) - \kappa^2 u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Für welche $\kappa \in \mathbb{R}_+$ existiert keine eindeutige Lösung? Unter welchen Voraussetzungen existiert in diesem Fall überhaupt eine Lösung, wie kann diese bestimmt werden?

3. Gegeben sei eine gleichmässige Unterteilung von $\Omega = (0,1)$ in n finite Elemente $\tau_\ell = (x_{\ell-1}, x_\ell)$, $\ell = 1, \ldots, n$. Sei $X_h = \operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^{n-1} \subset H_0^1(0,1)$ der Raum der stückweise linearen stetigen Basisfunktionen $\varphi_k(x)$. Man bestimme die Steifigkeitsmatrix K_h mit den Einträgen

$$K_h[\ell, k] = \int_0^1 \varphi_k'(x) \varphi_\ell'(x)\, dx \quad \text{für } k, \ell = 1, \ldots, n-1.$$

4. Für die in Aufgabe 3. bestimmte Steifgkeitsmatrix K_h bestimme man alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren.

5. Man bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$