Höhere Funktionalanalysis

Jonathan Rohleder

TU Graz, Sommersemester 2015

Version vom 18. März 2016

Dieser Text ist kein ausgefeiltes Skriptum und schon gar kein Lehrbuch. Es handelt sich um Notizen zu einer erstmals im Sommer 2014 von mir gehaltenen Vorlesung, deren Inhalt unter anderem auf früheren Vorlesungen von Univ.-Prof. Dr. Jussi Behrndt und auf den Lehrbüchern [K, Wei, Wer] basiert. Fehler sind sehr wahrscheinlich, werden auf Hinweis aber gerne behoben. Ein empfehlenswertes, sehr aktuelles Buch zu den Inhalten dieser Vorlesung und auch weiterführend (in englischer Sprache) ist die Monographie [S].

Kapitel 1

Abgeschlossene Operatoren

Die in der Einführung in die Funktionalanalysis behandelten Operatoren sind in der Regel beschränkt – ganz im Gegenteil zu vielen in den Anwendungen auftretenden Objekten wie z.B. Differentialoperatoren. Daher beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit einer allgemeineren Klasse, der Klasse der *abgeschlossenen Operatoren*.

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Für einen linearen Operator T von X nach Y bezeichne $\operatorname{dom} T \subset X$ den Definitionsbereich von T. Ist $\operatorname{dom} T = X$, so schreiben wir $T : X \to Y$, anderenfalls

$$T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y.$$

Wir sagen gelegentlich, T sei ein *Operator in* X, und meinen damit $X = Y$ und $\operatorname{dom} T \subset X$. Außerdem setzen wir

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{T : X \to Y \text{ linear und stetig}\}$$

und schreiben $\mathcal{L}(X)$ statt $\mathcal{L}(X, X)$. Wir setzen außerdem

$$\operatorname{ran} T := \{Tx : x \in \operatorname{dom} T\} \subset Y$$

(*Bild* von T) und

$$\ker T := \{x \in \operatorname{dom} T : Tx = 0\} \subset X$$

(*Kern* von T).

Sind $S : X \supset \operatorname{dom} S \to Y$ und $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ lineare Operatoren, so definieren wir

$$(S + T)x := Sx + Tx, \quad \operatorname{dom}(S + T) := \operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T.$$

Wir schreiben $S \subset T$, falls $\operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom} T$ und $Sx = Tx$ für alle $x \in \operatorname{dom} S$ gilt. Ist Z ein weiterer normierter Raum und $R : Y \supset \operatorname{dom} R \to Z$ ein linearer Operator, so setzen wir

$$(RS)x := R(Sx), \quad \operatorname{dom}(RS) := \{x \in \operatorname{dom} S : Sx \in \operatorname{dom} R\}.$$

Erinnerung: Ein linearer Operator T ist genau dann stetig, wenn er *beschränkt* ist, d.h. es existiert $C > 0$ mit

$$\|Tx\|_Y \le C\|x\|_X \quad \forall x \in \operatorname{dom} T. \tag{1.1}$$

Auf $\mathcal{L}(X,Y)$ ist eine Norm gegeben durch

$$\|T\| := \inf\{C > 0 : (1.1) \text{ ist erfüllt}\} = \sup_{\substack{x \in \operatorname{dom} T \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

$(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum, falls Y ein Banachraum ist. Es gilt der

Satz (von der Neumannschen Reihe)**.** *Ist $T \in \mathcal{L}(X)$ und konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty T^n$ in $\mathcal{L}(X)$, so ist $I - T$ injektiv und es gilt*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty T^n \in \mathcal{L}(X).$$

Falls $\|T\| < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^\infty T^n$ stets in $\mathcal{L}(X)$.

(Hinweis: $T^0 := I$, Identitätsoperator)

Wir schreiben Elemente aus $X \times Y$ als $\{x, y\}$ (wobei $x \in X$ und $y \in Y$) und verwenden die Standard-Norm

$$\|\{x,y\}\| := \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad \{x,y\} \in X \times Y,$$

auf $X \times Y$.

Definition 1.1. Ein linearer Operator $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ heißt *abgeschlossen*, falls der Graph von T

$$\mathcal{G}(T) := \{\{x, Tx\} : x \in \operatorname{dom} T\} \subset X \times Y$$

ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$ ist. Wir setzen

$$\mathcal{C}(X,Y) := \{T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y \text{ abgeschlossen}\}$$

und $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X,X)$.

Merke:

- Begriff *abgeschlossener Operator* passt nicht zu *offene Abbildung* (bildet i.A. nicht abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab)
- $\mathcal{C}(X, Y)$ **kein** Vektorraum, z.B. Summe von abgeschlossenen Operatoren i.A. nicht abgeschlossen.

Lemma 1.2. *Für einen linearen Operator $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ sind äquivalent:*

(i) *T ist abgeschlossen;*

(ii)

$$\left.\begin{array}{c}(x_n)_n \subset \operatorname{dom} T \\ x_n \to x \text{ in } X \text{ und} \\ Tx_n \to y \text{ in } Y\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \operatorname{dom} T \text{ und} \\ Tx = y.\end{array}\right.$$

Sind X und Y Banachräume, so sind (i) und (ii) äquivalent zu

(iii) $(\operatorname{dom} T, \|\cdot\|_T)$ *mit der* Graphennorm

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \quad x \in \operatorname{dom} T,$$

ist vollständig.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei T abgeschlossen und $(x_n)_n \subset \operatorname{dom} T$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$. Dann gilt $\{x_n, Tx_n\} \to \{x, y\}$ in $X \times Y$, und da $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen in $X \times Y$ ist, folgt $\{x, y\} \in \mathcal{G}(T)$, also $x \in \operatorname{dom} T$ und $Tx = y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Gelte (ii) und sei $(\{x_n, Tx_n\})_n$ eine Folge in $\mathcal{G}(T)$ mit

$$\{x_n, Tx_n\} \to \{x, y\} \in X \times Y.$$

Dann $x \in \operatorname{dom} T$ und $Tx = y$, also $\{x, y\} \in \mathcal{G}(T)$. Somit T abgeschlossen.

Seien nun X, Y Banachräume. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $(x_n)_n \subset \operatorname{dom} T$ Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_T$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y < \varepsilon \quad \forall m, n > N.$$

Daher sind $(x_n)_n$ und $(Tx_n)_n$ Cauchyfolgen in X bzw. Y und haben Grenzwerte x bzw. y: $x_n \to x$ in X und $Tx_n \to y$ in Y. Wegen (ii) ist dann $x \in \operatorname{dom} T$ und $Tx = y$, also

$$\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - Tx\|_Y \to 0, \quad n \to \infty.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Übung. $\square$

Korollar 1.3. *Es gilt* $\mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{C}(X,Y)$.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $(x_n)_n \subset \operatorname{dom} T = X$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$. Dann ist (trivialerweise) $x \in \operatorname{dom} T$ und $Tx = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. □

Beispiel 1.4 ("$\mathcal{C}(X,Y) \not\subset \mathcal{L}(X,Y)$")**.** $X = Y = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$,

$$Tf = f', \quad \operatorname{dom} T = C^1([0,1]).$$

(Details: Übung.)

Satz 1.5 (vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Es seien X und Y Banachräume und $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ ein abgeschlossener Operator. Falls* $\operatorname{dom} T$ *abgeschlossen in X ist, ist T stetig. Insbesondere*

$$\operatorname{dom} T = X \Longrightarrow T \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Beweis. Sei $\operatorname{dom} T \subset X$ abgeschlossen, d.h. $(\operatorname{dom} T, \|\cdot\|_X)$ ist ein Banachraum. Da T abgeschlossen ist, ist auch $(\mathcal{G}(T), \|\cdot\|_{X\times Y})$ ein Banachraum. Definiere

$$P : \mathcal{G}(T) \to \operatorname{dom} T, \quad \{x, Tx\} \mapsto x$$

und

$$Q : \mathcal{G}(T) \to Y, \quad \{x, Tx\} \mapsto Tx.$$

P und Q sind linear und beschränkt, P ist injektiv. P auch surjektiv: Für $z \in \operatorname{dom} T$ ist $\{z, Tz\} \in \mathcal{G}(T)$ und $P\{z, Tz\} = z$. Also ist P ein bijektiver, stetiger linearer Operator zwischen Banachräumen. Daher (Konsequenz aus dem Satz von der offenen Abbildung) $P^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{dom} T, \mathcal{G}(T))$. Also

$$T = Q \circ P^{-1} : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$$

stetig. □

Es gilt sogar folgender Satz:

Satz 1.6. *Sind X, Y Banachräume und ist $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ ein linearer Operator, so folgt aus je zwei der folgenden Aussagen die dritte.*

(i) *T ist abgeschlossen;*

(ii) $\operatorname{dom} T$ *ist abgeschlossen;*

(iii) T *ist beschränkt.*

Beweis. Übung. $\square$

Beispiel 1.7. $X = Y = L^2(-1,1)$, $Tf = f'$,

$$\operatorname{dom} T = \left\{ f \in L^2(-1,1) : f \text{ absolut stetig auf } [-1,1], f' \in L^2(-1,1) \right\}.$$

Dann ist T ein abgeschlossener Operator. (Beweis unten)

Erinnerung:

- $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *absolut stetig* auf $[a,b]$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes disjunkte System von Intervallen

$$(\alpha_1, \beta_1), \ldots (\alpha_n, \beta_n) \subset [a,b]$$

mit $\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta$.

- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:

  (i) f ist absolut stetig;

  (ii) Es existiert $h \in L^1([a,b])$ mit

$$f(x) - f(a) = \int_a^x h(t)dt, \quad x \in [a,b]. \tag{1.2}$$

  In diesem Fall ist f fast überall differenzierbar mit $f' = h$ f.ü.

Beweis zu Beispiel 1.7. Sei $(f_n)_n \subset \operatorname{dom} T$ mit $f_n \to f$ und $f_n' = Tf_n \to g$ in $L^2(-1,1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x) = f_n(-1) + \int_{-1}^{x} f_n'(t)dt, \quad x \in [-1,1]. \tag{1.3}$$

Idee: Zeige, dass $(f_n(-1))_n$ konvergiert und setze

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} f_n(-1) \quad \text{und} \quad k(x) := \alpha + \int_{-1}^{x} g(t)dt, \quad x \in [-1,1]; \tag{1.4}$$

zeige dann $k = f$.

Wir definieren $h_n(x) := \int_{-1}^{x} f_n'(t)dt$ und erhalten für alle $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned}\left|h_n(x) - \int_{-1}^{x} g(t)dt\right| &= \left|\int_{-1}^{x} f_n'(t)dt - \int_{-1}^{x} g(t)dt\right| \\ &\le \int_{-1}^{x} |f_n'(t) - g(t)|dt \le \int_{-1}^{1} |f_n'(t) - g(t)|dt \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_{-1}^{1} |f_n'(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} 1^2 dt\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\|f_n' - g\| \to 0, \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|$ die Norm in $L^2(-1,1)$ ist. Insbesondere

$$\left\|h_n - \int_{-1}^{\cdot} g(t)dt\right\|_\infty = \sup_{x\in(-1,1)} \left|h_n(x) - \int_{-1}^{x} g(t)dt\right| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.5}$$

Außerdem

$$f_n(-1) - f_m(-1) \overset{(1.3)}{=} f_n(x) - \int_{-1}^{x} f_n'(t)dt - f_m(x) + \int_{-1}^{x} f_m'(t)dt,$$

also

$$\begin{aligned}|f_n(-1) - f_m(-1)| &\overset{\text{“Trick”}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{-1}^{1} |f_n(-1) - f_m(-1)|^2 dt\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t) + h_m(t) - h_n(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_n - f_m + h_n - h_m\| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\|f_n - f_m\|}_{\to 0 \ (n,m\to\infty)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|h_m - h_n\|.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Aus (1.5) folgt zudem

$$\|h_m - h_n\| = \left(\int_{-1}^{1} |h_m(t) - h_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-1}^{1} \|h_m - h_n\|_\infty^2 dt \right)^{1/2} \to 0$$

für $n, m \to \infty$. Also folgt aus (1.6), dass $(f_n(-1))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist. Insbesondere ist α in (1.4) wohldefiniert. Da $g \in L^2(-1,1) \subset L^1(-1,1)$, ist auch k wohldefiniert und absolut stetig, $k \in L^2(-1,1)$, $k' = g \in L^2(-1,1)$. $\Rightarrow k \in \operatorname{dom} T, Tk = g$.

Zeige noch $k = f$:

$$\begin{aligned} \|f_n - k\| &= \left(\int_{-1}^{1} |f_n(t) - k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|f_n - k\|_\infty \\ &\overset{(1.3)}{=} \sqrt{2} \sup_{x \in (-1,1)} \left| f_n(-1) + h_n(x) - \alpha - \int_{-1}^{x} g(t) dt \right| \xrightarrow{(1.5)} 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f = k \in \operatorname{dom} T$, $Tf = g \Rightarrow T$ abgeschlossen. □

Lemma 1.8. *Ist $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ ein linearer Operator, so ist T stetig als Operator von $(\operatorname{dom} T, \|\cdot\|_T)$ nach Y.*

Beweis. $\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|x\|_T$ für alle $x \in \operatorname{dom} T$. □

Definition 1.9. Ein linearer Operator $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ heißt *abschließbar*, falls der Abschluss des Graphen $\mathcal{G}(T)$ in $X \times Y$ wieder Graph eines linearen Operators ist. Der zugehörige Operator $\overline{T}$ heißt *Abschluss* von T.

Bemerkungen:

- Der Graph eines linearen Operators ist stets ein Untervektorraum von $X \times Y$; ebenso der Abschluss des Graphen
- Ein Untervektorraum U von $X \times Y$ ist genau dann Graph eines linearen Operators, wenn $\{0, y\} \in U$ impliziert $y = 0$. "$\Rightarrow$": klar. "$\Leftarrow$": U nicht Graph eines linearen Operators $\Rightarrow \exists x \in X, y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, mit $\{x, y_1\} \in U$ und $\{x, y_2\} \in U$. Also $\{0, y_1 - y_2\} = \{x, y_1\} - \{x, y_2\} \in U$.

Lemma 1.10. *Es sei $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ ein abschließbarer linearer Operator. Dann gilt für $\{x, y\} \in X \times Y$*

$$x \in \operatorname{dom} \overline{T} \text{ und } \overline{T}x = y \iff \exists (x_n)_n \subset \operatorname{dom} T \text{ mit } x_n \to x, Tx_n \to y.$$

Beweis. Folgt direkt aus der Definition von $\overline{T}$. □

Lemma 1.11. *Ein linearer Operator $T : X \supset \operatorname{dom} T \to Y$ ist genau dann abschließbar, wenn*

$$\left.\begin{array}{c}(x_n)_n \subset \operatorname{dom} T \\ x_n \to 0 \text{ in } X \text{ und} \\ Tx_n \to y \text{ in } Y\end{array}\right\} \Longrightarrow y = 0.$$

Beweis. T nicht abschließbar $\Rightarrow \exists y \neq 0$ mit $\{0, y\} \in \overline{\mathcal{G}(T)} \Rightarrow \exists (x_n)_n \subset \operatorname{dom} T$ mit $\{x_n, Tx_n\} \to \{0, y\}$, also gilt die Folgenbedingung nicht.

Gilt die Folgenbedinungung nicht, so existiert $(x_n)_n \subset \operatorname{dom} T$ mit $x_n \to 0$ und $Tx_n \to y \neq 0$. Dann $\{0, y\} \in \overline{\mathcal{G}(T)}$, also T nicht abschließbar. □

Beispiel 1.12. Betrachte den linearen Operator $T : \ell^2 \supset \operatorname{dom} T \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$T(a^{(n)})_n := \sum_{n=1}^{\infty} n a^{(n)}, \quad \operatorname{dom} T = \left\{(a^{(n)})_n \in \ell^2 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } a^{(n)} = 0 \forall n \geq N\right\}.$$

Dann ist T nicht abschließbar: Betrachte die Folge der Folgen

$$x_1 = (1, 0, \dots), x_2 = (0, 1/2, 0, \dots), x_3 = (0, 0, 1/3, 0, \dots), \dots \in \operatorname{dom} T.$$

Dann gilt

$$\|x_k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^2 = \frac{1}{k^2} \to 0 \quad \text{und} \quad |Tx_k - 1| = 0 \to 0, \quad k \to \infty.$$

Daher $(x_k)_k \subset \operatorname{dom} T$, $x_k \to 0$ und $Tx_k \to 1 \neq 0$.

Kapitel 2

Spektrum und Resolventenmenge

Ein wesentlicher Bestandteil der Analysis beispielsweise der Differentialoperatoren in der Quantenmechanik besteht in der Untersuchung des sogenannten *Spektrums*, einer Menge von reellen oder komplexen Zahlen λ, für die sich der Operator $T-\lambda$ "irregulär" verhält.

In diesem Kapitel ist $(X, \|\cdot\|)$ stets ein Banachraum über $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.

Definition 2.1. Es sei $T \in \mathcal{C}(X)$. Dann bezeichnet

$$\rho(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} : (T-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\}$$

die *Resolventenmenge* von T. Das *Spektrum* von T ist definiert als

$$\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T).$$

Beispiel 2.2. (i) Ist λ Eigenwert von T, d.h. es existiert $x \in \operatorname{dom} T$, $x \neq 0$, mit $(T-\lambda)x = 0$, dann existiert $(T-\lambda)^{-1}$ nicht, also $\lambda \in \sigma(T)$.

(ii) Ist $X = \mathbb{C}^n$ und $T \in \mathcal{L}(X)$ (also T darstellbar als $n \times n$-Matrix), dann $(T-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ genau dann, wenn λ kein Eigenwert von T ist.

Satz 2.3. *Es sei $T \in \mathcal{C}(X)$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) *$\rho(T)$ ist offen und $\sigma(T)$ ist abgeschlossen.*

(ii) *Die Abbildung*

$$R : \rho(T) \to \mathcal{L}(X), \quad R(\lambda) := (T-\lambda)^{-1},$$

ist analytisch, kann also lokal als Potenzreihe mit Koeffizienten in $\mathcal{L}(X)$ geschrieben werden.

Beweis. (i) Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dann gilt $(T-\lambda_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ und für $\lambda \in \mathbb{K}$ folgt

$$T-\lambda = (T-\lambda_0) + (\lambda_0 - \lambda) = (T-\lambda_0)\big(I - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big). \tag{2.1}$$

Wähle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|(T-\lambda_0)^{-1}\|^{-1}$. Dann $\|(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\| < 1$, also (Satz von der Neumannschen Reihe) $I - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}$ injektiv und

$$\big(I - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big((\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big)^n \in \mathcal{L}(X).$$

Daher folgt

$$(T-\lambda)^{-1} \overset{(2.1)}{=} \big(I - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big)^{-1}(T-\lambda_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

d.h. $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda-\lambda_0| < \|(T-\lambda_0)^{-1}\|^{-1}\} \subset \rho(T)$. $\Rightarrow \rho(T)$ offen $\Rightarrow \sigma(T) = \mathbb{K}\setminus\rho(T)$ abgeschlossen.

(ii) Aus dem Beweis von (i) folgt für $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|(T-\lambda_0)^{-1}\|^{-1}$

$$\begin{aligned} R(\lambda) = (T-\lambda)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big)^n (T-\lambda_0)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n \big((T-\lambda_0)^{-1}\big)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Satz 2.4. *Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gelten*

(i) $|\lambda| \le \|T\|$ *für alle* $\lambda \in \sigma(T)$. *Insbesondere ist* $\sigma(T)$ *kompakt.*

(ii) *Ist $X \neq \{0\}$ Banachraum über $\mathbb{C}$, so ist $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Beachte: (ii) falsch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, z.B. $X = \mathbb{R}^2, T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beweis. (i) Wir zeigen: $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ gilt nämlich

$$(T-\lambda) = \lambda\Big(\frac{1}{\lambda}T - I\Big) = -\lambda\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)$$

und wegen $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$ folgt (Neumannsche Reihe)

$$(T-\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

also $\lambda \in \rho(T)$. $\Rightarrow \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$. Satz 2.3 (i) $\Rightarrow \sigma(T)$ kompakt.

(ii) Für $T = 0$ ist $\sigma(T) = \{0\}$. Sei also $T \neq 0$. Angenommen $\sigma(T) = \emptyset$, also $\rho(T) = \mathbb{C}$. Dann ist $\lambda \mapsto R(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ (Satz 2.3 (ii)). Sei $F : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Dann ist $F \circ R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze (d.h. auf ganz $\mathbb{C}$ analytische) Funktion.

$F \circ R$ ist beschränkt: Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ gilt

$$|(F \circ R)(\lambda)| \leq \|F\| \|(T-\lambda)^{-1}\| = \|F\| \frac{1}{|\lambda|} \Big\| \Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1} \Big\|$$

und dann (wieder Neumannsche Reihe) $(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{\lambda}T)^n$, folglich

$$|(F \circ R)(\lambda)| \leq \|F\| \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \Big\| \frac{1}{\lambda}T \Big\|^n = \|F\| \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|}\|T\|} = \|F\| \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Insbesondere ist für λ mit $|\lambda| \geq 2\|T\|$ dann $|\lambda| - \|T\| \geq \|T\|$ und daher

$$|(F \circ R)(\lambda)| \leq \frac{\|F\|}{\|T\|},$$

so dass $F \circ R$ auf $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 2\|T\|\}$ beschränkt ist. Als stetige Funktion ist $F \circ R$ auch auf der kompakten Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\|T\|\}$ beschränkt. Also ist $F \circ R$ eine beschränkte, ganze Funktion und daher nach dem Satz von Liouville konstant. Daher folgt für $\lambda \neq 0$

$$F\big(T^{-1} - (T-\lambda)^{-1}\big) = 0$$

für jedes lineare, beschränkte Funktional $F : \mathcal{L}(X)) \to \mathbb{C}$. Es folgt (Konsequenz aus dem Satz von Hahn–Banach)

$$T^{-1} - (T-\lambda)^{-1} = 0.$$

Anwendung des beschränkten, auf ganz X definierten Operators $T(T-\lambda)$ auf diese Gleichung liefert $T - \lambda T^{-1} - T = 0$ und damit $I = 0$, ein Widerspruch, da $X \neq \{0\}$. $\square$

Definition 2.5. Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann heißt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$$

Spektralradius von T.

Per Definition gilt $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} \le \|T\|$ für jedes $T \in \mathcal{L}(X)$, im Allgemeinen aber keine Gleichheit (siehe Übung).

Lemma 2.6. *Für $T \in \mathcal{L}(X)$ gilt*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Beweis. Für $T = 0$ klar. Sei $T \neq 0$. Setze $a_n := \|T^n\|$. Dann $0 \le a_{n+m} \le a_n a_m$. Wir müssen zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} := a. \tag{2.2}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[N]{a_N} < a + \varepsilon$. Weiter sei $b := \max\{a_1, \dots, a_N\} > 0$. Schreibe $n \in \mathbb{N}$ als $n = kN + r$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le r \le N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \le (a_{kN} a_r)^{1/n} \le (a_N^k a_r)^{1/n} \le a_N^{k/n} b^{1/n} = (a_N)^{1/N \frac{Nk}{n}} b^{1/n} \\ &< (a+\varepsilon)^{\frac{Nk}{n}} b^{1/n} = (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{\frac{Nk}{n}-1} b^{1/n} \\ &= (a+\varepsilon) \underbrace{(a+\varepsilon)^{-r/n} b^{1/n}}_{\approx 1 \text{ für } n \text{ groß}} < a + 2\varepsilon\end{aligned}$$

für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. (Beachte, dass r zwar von n abhängt, aber beschränkt ist.) Daraus folgt

$$|\sqrt[n]{a_n} - a| = \sqrt[n]{a_n} - a < 2\varepsilon$$

für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Es folgt (2.2) und damit die Aussage des Lemmas. □

Verschärfung von Satz 2.4:

Satz 2.7. *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gelten*

(i) $|\lambda| \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$ *für alle $\lambda \in \sigma(T)$.*

(ii) *Ist $X \neq \{0\}$ Banachraum über $\mathbb{C}$, so existiert $\lambda \in \sigma(T)$ mit*

$$|\lambda| = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

Beweis. (i) Sei $|\lambda| > \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$. Da

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \right\|^{1/n} = \frac{1}{|\lambda|} \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} < 1,$$

konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|(\frac{T}{\lambda})^n\|$ (Wurzelkriterium). Da im Banachraum jede absolut konvergente Reihe konvergiert, ist (Satz von der Neumannschen Reihe) $T - \lambda = -\lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ injektiv und

$$(T-\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \in \mathcal{L}(X).$$

$\Rightarrow \lambda \in \rho(T)$.

(ii) Setze $r_0 := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ (wohldefiniert wegen Satz 2.4 (ii)). Dann $r_0 \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$ nach (i). Sei $|\mu| > r_0$ und $F : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Dann ist die Funktion

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r_0\} \ni \lambda \mapsto F\big((T-\lambda)^{-1}\big)$$

analytisch und für $|\lambda| > \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$ gilt (Beweis von (i))

$$F\big((T-\lambda)^{-1}\big) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} F(T^n).$$

Die Reihe konvergiert auf dem größten offenen Kreisring (da "inverse" Potenzreihe; bzw. substituiere $z = 1/\lambda$), auf dem die Funktion analytisch ist (vgl. VL Komplexe Analysis), also auf dem Äußeren der Kugel vom Radius r_0 um null, insbesondere für $\lambda = \mu$. Daher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu^{n+1}} F(T^n) = 0$. $\Rightarrow (\frac{1}{\mu^{n+1}} T^n)_n$ konvergiert schwach gegen null in $\mathcal{L}(X)$. $\Rightarrow$ es existiert $K > 0$ mit $\|\frac{T^n}{\mu^{n+1}}\| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\|T^n\|^{1/n} \leq K^{1/n} |\mu|^{\frac{n+1}{n}} \to |\mu|, \quad n \to \infty.$$

$\Rightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} \leq |\mu|$. Da $|\mu| > r_0$ beliebig, folgt $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} \leq r_0$. Also insgesamt $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} = r_0$. $\square$

Proposition 2.8. *Es sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X)$* normal*, d.h. $TT^* = T^*T$. Dann gilt*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|.$$

Beweis. Für $S \in \mathcal{L}(X)$ gilt auch $S^* \in \mathcal{L}(X)$ und $\|S^*\| = \|S\|$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\|S^*S\| \leq \|S^*\|\|S\| = \|S\|^2 &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Sx\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} (Sx, Sx) \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} (S^*Sx, x) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|S^*Sx\|\|x\| \leq \|S^*S\|,\end{aligned}$$

also $\|S\|^2 = \|S^*S\|$. Es folgt für normales $T \in \mathcal{L}(X)$

$$\begin{aligned}\|T^2\|^2 &\overset{S=T^2}{=} \|(T^2)^*T^2\| = \|T^*TT^*T\| = \|(T^*T)^*T^*T\| \\ &\overset{S=T^*T}{=} \|T^*T\|^2 \overset{S=T}{=} \left(\|T\|^2\right)^2,\end{aligned}$$

somit $\|T^2\| = \|T\|^2$. Durch Wiederholung dieser Prozedur folgt induktiv $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (Nutze, dass T^n für jedes n normal ist.) Also

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} \overset{\text{Lemma 2.6}}{=} \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{k \to \infty} \|T^{2^k}\|^{1/2^k} = \|T\|.$$

$\square$

Definition 2.9. Es sei $T \in \mathcal{C}(X)$. Dann heißt

- $\sigma_\mathrm{p}(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \ker(T - \lambda) \neq \{0\}\}$ *Punktspektrum* von T,
- $\sigma_\mathrm{c}(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \ker(T - \lambda) = \{0\}, \overline{\operatorname{ran}(T - \lambda)} = X, \operatorname{ran}(T - \lambda) \neq X\right\}$ *stetiges Spektrum* von T und
- $\sigma_\mathrm{r}(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \ker(T - \lambda) = \{0\}, \overline{\operatorname{ran}(T - \lambda)} \neq X\right\}$ *Restspektrum* von T.

Außerdem nennen wir $\lambda \in \mathbb{K}$ *Punkt regulären Typs* von T, wenn

$$\ker(T - \lambda) = \{0\} \quad \text{und} \quad (T - \lambda)^{-1} \text{ beschränkt ist.}$$

Die Menge der Punkte regulären Typs von T bezeichnen wir mit $r(T)$.

Das Punktspektrum ist genau die Menge der Eigenwerte von T.

Beispiel 2.10 (Spektralpunkte, die keine Eigenwerte sind)**.** $X = \ell^2$, $T(x_n)_n = (x_n/n)_n$, $\operatorname{dom} T = \ell^2$. Dann $1/n \in \sigma_p(T)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, da $Te_n = 1/n \cdot e_n$, wobei $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit 1 an der n-ten Position. Da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist, folgt $0 \in \sigma(T)$. Aber $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. (Man kann sich überlegen, dass $0 \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$.)

Proposition 2.11. *Für $T \in \mathcal{C}(X)$ gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow T - \lambda$ *bijektiv;*

(ii) $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \mathbin{\dot\cup} \sigma_{\mathrm{c}}(T) \mathbin{\dot\cup} \sigma_{\mathrm{r}}(T)$*;*

(iii) $\rho(T) \subset r(T)$*;*

(iv) *Für $\lambda \in r(T)$ ist* $\operatorname{ran}(T - \lambda)$ *abgeschlossen;*

(v) *Für $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$ ist $(T - \lambda)^{-1}$ unbeschränkt.*

Beweis. Bemerke zuerst, dass für $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\ker(T - \lambda) = \{0\}$ der Operator $(T - \lambda)^{-1}$ stets abgeschlossen ist, da T abgeschlossen ist.

(i) "$\Rightarrow$" folgt aus der Definition von $\rho(T)$. Ist umgekehrt $T - \lambda$ bijektiv, dann $\ker(T - \lambda) = \{0\}$ und daher existiert $(T - \lambda)^{-1}$, ist abgeschlossen und auf ganz X definiert. Nach Satz 1.5 vom abgeschlossenen Graphen folgt $(T - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Damit $\lambda \in \rho(T)$.

(ii) Es ist klar, dass die drei Mengen rechts disjunkt sind und dass die Inklusion "$\supset$" gilt. "$\subset$": Sei $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. Dann $\ker(T - \lambda) = \{0\}$ und $\operatorname{ran}(T - \lambda) = X$, also $T - \lambda$ bijektiv und nach (i) $\lambda \in \rho(T)$.

(iii) klar.

(iv) Für $\lambda \in r(T)$ ist $(T - \lambda)^{-1}$ abgeschlossen und beschränkt, also ist nach Satz 1.6 $\operatorname{ran}(T - \lambda) = \operatorname{dom}(T - \lambda)^{-1}$ abgeschlossen.

(v) Sei $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$. Wäre $(T - \lambda)^{-1}$ beschränkt, so wäre $\lambda \in r(T)$ und nach (iv) $\operatorname{ran}(T - \lambda)$ abgeschlossen, Widerspruch! □

Beispiel 2.12 ($\sigma(T) = \emptyset$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)**.** In $X = L^2(0,1)$ setze $Tf := if'$ mit

$$\operatorname{dom} T = \left\{ f \in L^2(0,1) : f \text{ absolut stetig}, f' \in L^2(0,1), f(0) = 0 \right\}.$$

Dann ist T abgeschlossen (vgl. Beispiel 1.7). Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\big((T - \lambda)^{-1} f\big)(t) = -i \int_0^t e^{i\lambda(t-s)} f(s) ds, \quad f \in L^2(0,1),$$

somit $(T - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow \rho(T) = \mathbb{C}$.

Proposition 2.13. *Es sei X ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ normal. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \emptyset$;

(ii) $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow$ *es existiert* $(x_n)_n \subset X$ *mit* $\|x_n\| = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0$, $n \to \infty$.

Beweis. (i) Da $T - \lambda$ normal ist mit $(T-\lambda)^* = T^* - \overline{\lambda}$, gilt für alle $x \in X$

$$\|(T-\lambda)x\|^2 = ((T^* - \overline{\lambda})(T-\lambda)x, x) = ((T-\lambda)(T^* - \overline{\lambda})x, x) = \|(T^* - \overline{\lambda})x\|^2,$$

woraus $\ker(T-\lambda) = \ker(T^* - \overline{\lambda})$ folgt. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig und $y \in (\operatorname{ran}(T-\lambda))^\perp$. Dann gilt für alle $x \in X$

$$0 = (y, (T-\lambda)x) = ((T^* - \overline{\lambda})y, x),$$

also $y \in \ker(T^* - \overline{\lambda}) = \ker(T-\lambda)$. Falls $\operatorname{ran}(T-\lambda)$ nicht dicht ist, ist damit $\ker(T-\lambda) \neq \{0\}$ und dann $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, also niemals im Restspektrum.

(ii) "$\Rightarrow$": Ist $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, wähle $x_n = x$ als normierten Eigenvektor zu λ. Ist $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$, so ist nach Proposition 2.11 (v) $(T-\lambda)^{-1}$ unbeschränkt. Also existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in \operatorname{dom}(T-\lambda)^{-1}$ mit $\|(T-\lambda)^{-1}z_n\| > n\|z_n\|$. Setze

$$x_n := \frac{(T-\lambda)^{-1}z_n}{\|(T-\lambda)^{-1}z_n\|}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\|(T-\lambda)x_n\| = \frac{\|z_n\|}{\|(T-\lambda)^{-1}z_n\|} < \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

"$\Leftarrow$": Es existiere eine Folge wie in der Aussage. Falls $T - \lambda$ injektiv ist, impliziert das Unbeschränktheit von $(T-\lambda)^{-1}$ und dann $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$; anderenfalls $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. □

Kapitel 3

Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

Selbstadjungierte Operatoren haben besonders günstige Spektraleigenschaften und spielen eine wichtige Rolle in der Physik. In diesem Kapitel lernen wir ihre grundlegenden Eigenschaften – und dass man sie von "nur symmetrischen" Operatoren unterscheiden muss.

Von diesem Kapitel an ist für den Rest der Vorlesung stets $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und zugehöriger Norm $\| \cdot \|$.

Definition 3.1. Es sei S ein dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$, d.h. $\overline{\operatorname{dom} S} = \mathcal{H}$. Dann ist der *zu S adjungierte Operator* S^* definiert durch

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} S^* &:= \{g \in \mathcal{H} : \exists g' \in \mathcal{H} \text{ mit } (Sf, g) = (f, g') \ \forall f \in \operatorname{dom} S\}, \\ S^* g &:= g'. \end{aligned}$$

Bemerkungen. (i) S^* ist wohldefiniert: Ist $g \in \operatorname{dom} S^*$ und sind $g', g'' \in \mathcal{H}$ mit

$$(Sf, g) = (f, g') \quad \text{und} \quad (Sf, g) = (f, g'') \quad \forall f \in \operatorname{dom} S,$$

dann $(f, g' - g'') = 0$ für alle $f \in \operatorname{dom} S$. $\Rightarrow g' - g'' \in (\operatorname{dom} S)^\perp = \{0\}$, da $\operatorname{dom} S$ dicht in $\mathcal{H}$. Außerdem ist S^* linear (leicht).

(ii) Für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist $\operatorname{dom} S^* = \mathcal{H}$, denn für jedes $g \in \mathcal{H}$ ist das Funktional $\mathcal{H} \ni f \mapsto (Sf, g)$ stetig und nach dem Satz von Fréchet–Riesz existiert ein $g' \in \mathcal{H}$ mit

$$(Sf, g) = (f, g') \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

(Dann automatisch $S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, da S^* abgeschlossen; vgl. Proposition 3.3.)

(iii) $\operatorname{dom} S^* = \{g \in \mathcal{H} : f \mapsto (Sf, g) \text{ stetiges Funktional auf } \operatorname{dom} S\}$ (Übung)

Im folgenden Lemma ist $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit dem Standard-Skalarprodukt

$$(\{f, f'\}, \{g, g'\}) := (f, g) + (f', g'), \quad \{f, f'\}, \{g, g'\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H},$$

ausgestattet und $()^\perp$ bezeichnet das Orthgonalkomplement in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Lemma 3.2. *Es sei $\mathcal{U} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,*

$$\mathcal{U}\{h, h'\} := \{h', -h\}, \quad \{h, h'\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}.$$

Dann gilt $\mathcal{G}(S^*) = (\mathcal{U}\mathcal{G}(S))^\perp = \mathcal{U}(\mathcal{G}(S))^\perp$ für jeden dicht definierten linearen Operator S in $\mathcal{H}$.

Beweis. Erste Gleichheit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(S^*) &= \{\{g, g'\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : (Sf, g) = (f, g') \ \forall f \in \operatorname{dom} S\} \\
&= \{\{g, g'\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : (\{Sf, -f\}, \{g, g'\}) = 0 \ \forall f \in \operatorname{dom} S\} \\
&= \{\{g, g'\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : (\mathcal{U}\{f, Sf\}, \{g, g'\}) = 0 \ \forall f \in \operatorname{dom} S\} \\
&= (\mathcal{U}\mathcal{G}(S))^\perp.
\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit beachte $\mathcal{U}^* = -\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$. Daher weiter

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(S^*) &= \{\{g, g'\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : (\{f, Sf\}, -\mathcal{U}\{g, g'\}) = 0 \ \forall f \in \operatorname{dom} S\} \\
&= \{\mathcal{U}\{h, h'\} : \{h, h'\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, (\{f, Sf\}, \{h, h'\}) = 0 \ \forall f \in \operatorname{dom} S\} \\
&= \mathcal{U}(\mathcal{G}(S))^\perp,
\end{aligned}$$

mit der Ersetzung $\{h, h'\} = -\mathcal{U}\{g, g'\}$ im vorletzten Schritt. □

Proposition 3.3. *Es sei S ein dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann gelten*

(i) $S^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

(ii) *S abschließbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{dom} S^*$ dicht in $\mathcal{H}$. In diesem Fall*

$$(\overline{S})^* = S^* \quad \textit{und} \quad \overline{S} = S^{**}.$$

(iii) *$S \subset T \Rightarrow T^* \subset S^*$ für jeden dicht definierten linearen Operator T in $\mathcal{H}$.*

Beweis. (i) Folgt aus Lemma 3.2, da Orthogonalkomplemente stets abgeschlossen sind.

(ii) $f \perp \operatorname{dom} S^* \Leftrightarrow$

$$0 = (\{f, 0\}, \{g, S^*g\}) = -(\mathcal{U}\{0, -f\}, \{g, S^*g\}) \quad \forall g \in \operatorname{dom} S^*$$

$\Leftrightarrow \mathcal{U}\{0, -f\} \in (\mathcal{G}(S^*))^\perp = (\mathcal{U}\mathcal{G}(S))^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{U}\mathcal{G}(S)} = \mathcal{U}\overline{\mathcal{G}(S)}$ mit Lemma 3.2 $\Leftrightarrow$ $\{0, -f\} \in \overline{\mathcal{G}(S)}$ ($\mathcal{U}$ ist isometrischer Isomorphismus). Daher ist S genau dann abschließbar, wenn S^* dicht definiert ist.

Weiter

$$\mathcal{G}(\overline{S}^*) = (\mathcal{U}\mathcal{G}(\overline{S}))^\perp = (\overline{\mathcal{U}\mathcal{G}(S)})^\perp = (\mathcal{U}\mathcal{G}(S))^\perp = \mathcal{G}(S^*)$$

und

$$\mathcal{G}(S^{**}) = (\mathcal{U}\mathcal{G}(S^*))^\perp = (\mathcal{U}\mathcal{U}(\mathcal{G}(S))^\perp)^\perp = -(\mathcal{G}(S)^{\perp\perp}) = \overline{\mathcal{G}(S)}.$$

(iii) $S \subset T$ ist äquivalent zu $\mathcal{G}(S) \subset \mathcal{G}(T)$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ und impliziert daher $\mathcal{G}(T)^\perp \subset \mathcal{G}(S)^\perp$. Somit

$$\mathcal{G}(T^*) = \mathcal{U}(\mathcal{G}(T)^\perp) \subset \mathcal{U}(\mathcal{G}(S)^\perp) = \mathcal{G}(S^*).$$

□

Lemma 3.4. *Sei S ein dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann gelten für alle $\lambda \in \mathbb{K}$*

(i) $(\operatorname{ran}(S - \lambda))^\perp = \ker(S^* - \overline{\lambda})$ *und*

(ii) $\overline{\operatorname{ran}(S - \lambda)} = (\ker(S^* - \overline{\lambda}))^\perp$.

Beweis. Aussage (ii) folgt aus (i) durch Orthogonalkomplementbildung.

(i) "$\subset$": $h \in (\operatorname{ran}(S - \lambda))^\perp \Rightarrow ((S - \lambda)f, h) = 0 \ \forall f \in \operatorname{dom}(S - \lambda) = \operatorname{dom} S \Rightarrow$ $(Sf, h) = (f, \overline{\lambda}h) \ \forall f \in \operatorname{dom} S \Rightarrow h \in \operatorname{dom} S^*$ und $S^*h = \overline{\lambda}h \Rightarrow h \in \ker(S^* - \overline{\lambda})$.

"$\supset$": $h \in \ker(S^* - \overline{\lambda}) \Rightarrow 0 = (f, (S^* - \overline{\lambda})h) = (f, S^*h) - (\lambda f, h) \ \forall f \in \operatorname{dom} S$ $\Rightarrow (Sf, h) = (f, S^*h) = (\lambda f, h) \ \forall f \in \operatorname{dom} S \Rightarrow ((S - \lambda)f, h) = 0 \ \forall f \in \operatorname{dom} S \Rightarrow$ $h \in (\operatorname{ran}(S - \lambda))^\perp$. □

Definition 3.5. Ein dicht definierter linear Operator S in $\mathcal{H}$ heißt

(i) *symmetrisch*, falls $S \subset S^*$;

(ii) *selbstadjungiert*, falls $S = S^*$;

(iii) *wesentlich selbstadjungiert*, falls $\overline{S}$ selbstadjungiert ist, d.h. $\overline{S} = S^*$.

Beachte: Ist $T = T^*$ und $S \subsetneq T$, dann S symmetrisch, aber nicht $S = S^*$. (Nämlich $S \subsetneq T \Rightarrow T = T^* \subset S^* \Rightarrow S \subsetneq T = T^* \subset S^*$.) Daher gibt es sehr viele Operatoren, die symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert sind. Umgekehrt: Sind S, T selbstadjungiert und $S \subset T$, so folgt $S = T$.

Lemma 3.6. *Es sei S ein dicht definierter linearer Operator in $\mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *S ist symmetrisch;*

(ii) *$(Sf, g) = (f, Sg)$ für alle $f, g \in \operatorname{dom} S$.*

Ist $\mathcal{H}$ Hilbertraum über $\mathbb{C}$, so sind (i) und (ii) äquivalent zu

(iii) *$(Sf, f) \in \mathbb{R}$ für alle $f \in \operatorname{dom} S$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Gelte $S \subset S^*$ und seien $f, g \in \operatorname{dom} S$. Dann $g \in \operatorname{dom} S^*$ und $S^* g = Sg$, also $(Sf, g) = (f, S^* g) = (f, Sg)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Gelte (ii) und sei $g \in \operatorname{dom} S$. Setze $g' := Sg$. Dann $(Sf, g) = (f, g')$ für alle $f \in \operatorname{dom} S$, also $g \in \operatorname{dom} S^*$ und $Sg = g' = S^* g$. Somit $S \subset S^*$.

Sei nun $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Gilt (ii), so folgt für $f \in \operatorname{dom} S$

$$\operatorname{Im}(Sf, f) = \frac{1}{2i}\Big((Sf, f) - \overline{(Sf, f)}\Big) = \frac{1}{2i}((Sf, f) - (f, Sf)) \overset{\text{(ii)}}{=} 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(Sh, h) \in \mathbb{R}$ für alle $h \in \operatorname{dom} S$. Seien $f, g \in \operatorname{dom} S$. Dann gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{R} \ni (S(f + \lambda g), f + \lambda g) = (Sf, f) + |\lambda|^2 (Sg, g) + \overline{\lambda}(Sf, g) + \lambda(Sg, f),$$

somit $\overline{\lambda}(Sf, g) + \lambda(Sg, f) \in \mathbb{R}$ oder, äquivalent,

$$\overline{\lambda}(Sf, g) + \lambda(Sg, f) = \lambda(g, Sf) + \overline{\lambda}(f, Sg). \tag{3.1}$$

Einsetzen spezieller λ in (3.1): $\lambda = 1$:

$$(Sf, g) + (Sg, f) = (g, Sf) + (f, Sg);$$

$\lambda = i$:

$$-(Sf, g) + (Sg, f) = (g, Sf) - (f, Sg).$$

Addition beider Gleichungen liefert $(Sg, f) = (g, Sf)$. $\square$

Lemma 3.7. (i) *Jeder symmetrische Operator S ist abschließbar und $\overline{S}$ ist wieder symmetrisch.*

(ii) *Jeder selbstadjungierte Operator ist abgeschlossen.*

(Beachte: S symmetrisch $\Rightarrow$ $\operatorname{dom} S$ dicht in $\mathcal{H}$ per Definition!)

Beweis. (i) $S \subset S^* \Rightarrow \operatorname{dom} S^* \supset \operatorname{dom} S$ dicht $\Rightarrow$ S abschließbar nach Proposition 3.3 (ii) und $S \subset S^* = (\overline{S})^*$, also $\overline{S} \subset (\overline{S})^*$.

(ii) $S = S^*$ und S^* abgeschlossen nach Proposition 3.3 (i). □

Proposition 3.8. *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $S \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ mit $S \subset S^*$. Dann gelten*

(i) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset r(S)$ *und* $\operatorname{ran}(S - \lambda)$ *ist abgeschlossen für alle* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*;*

(ii) $(\sigma_{\mathrm{p}}(S) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(S)) \subset \mathbb{R}$*;*

(iii) $\|(S - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Beweis. Es seien $f \in \operatorname{dom} S$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned}
\|(S - \lambda)f\|^2 &= (Sf, Sf) - (Sf, \lambda f) - (\lambda f, Sf) + |\lambda|^2 (f, f) \\
&= (Sf, Sf) - \underbrace{(\lambda + \overline{\lambda})}_{=2 \operatorname{Re} \lambda}(Sf, f) + \big((\operatorname{Re} \lambda)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2\big)(f, f) \\
&= (Sf, Sf) - (Sf, (\operatorname{Re} \lambda) f) - ((\operatorname{Re} \lambda) f, Sf) + (\operatorname{Re} \lambda)^2 (f, f) \\
&\quad + (\operatorname{Im} \lambda)^2 (f, f) \\
&= \|(S - \operatorname{Re} \lambda) f\|^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2 \|f\|^2 \geq (\operatorname{Im} \lambda)^2 \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Es folgt $\|(S - \lambda)f\| \geq |\operatorname{Im} \lambda| \|f\|$ und damit

$$\ker(S - \lambda) = \{0\} \quad \text{und} \quad \|(S - \lambda)^{-1} g\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|} \|g\| \ \forall g \in \operatorname{ran}(S - \lambda).$$

Konsequenzen:

- $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(S)$;
- $\lambda \in r(S)$ und $\|(S - \lambda)^{-1}\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$; insbesondere $\operatorname{ran}(S - \lambda)$ abgeschlossen nach Satz 1.6.
- $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{c}}(S)$ wegen Proposition 2.11 (v).

□

Lemma 3.9. *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und S ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$. Ist* $\operatorname{ran}(S-\lambda)=\mathcal{H}$ *für ein $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, so ist $S\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$.*

Beweis. $\operatorname{ran}(S-\lambda)=\mathcal{H}\Rightarrow\operatorname{ran}(\overline{S}-\lambda)=\mathcal{H}\Rightarrow(\overline{S}-\lambda)^{-1}$ beschränkt (Satz vom abgeschlossenen Graphen) $\Rightarrow(S-\lambda)^{-1}$ beschränkt $\Rightarrow(S-\lambda)^{-1}\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ (Satz 1.6) $\Rightarrow S\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$. □

Satz 3.10. *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, S ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$ und $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $S=S^*$;

(ii) $S\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ *und* $\ker(S^*-\lambda)=\{0\}=\ker(S^*-\overline{\lambda})$;

(iii) $\operatorname{ran}(S-\lambda)=\mathcal{H}=\operatorname{ran}(S-\overline{\lambda})$;

(iv) $S\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ *und* $\lambda,\overline{\lambda}\in\rho(S)$.

Beweis. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): folgt aus der Identität

$$\ker(S^*-\lambda)=\big(\operatorname{ran}(S-\overline{\lambda})\big)^{\perp}\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

(Lemma 3.4 (i)) mit Hilfe von Proposition 3.8 (i) und Lemma 3.9.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): verwende ebenfalls Lemma 3.9 und die Tatsache, dass $\ker(S-\lambda)=\ker(S-\overline{\lambda})=\{0\}$ (Proposition 3.8 (ii)); beachte dabei, dass $\lambda\in\rho(S)\Leftrightarrow S-\lambda$ bijektiv (Proposition 2.11 (i)).

(i) $\Rightarrow$ (ii): $S=S^*\Rightarrow S\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ und $\ker(S^*-\lambda)=\ker(S-\lambda)=\{0\}$ nach Proposition 3.8 (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen $\operatorname{dom}S^*\subset\operatorname{dom}S$, dann folgt die Aussage. Sei $f\in\operatorname{dom}S^*$. Dann existiert $g\in\operatorname{dom}S$ mit $(S^*-\lambda)f=(S-\lambda)g$ und somit $(S^*-\lambda)(f-g)=0$, d.h.

$$f-g\in\ker(S^*-\lambda)=(\operatorname{ran}(S-\overline{\lambda}))^{\perp}=\mathcal{H}^{\perp}=\{0\}.$$

Also $f=g\in\operatorname{dom}S$. (Beide Identitäten aus (iii) wurden genutzt!) □

Beachte: Gilt für ein $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ eine der Aussagen (ii), (iii) oder (iv), so gilt sie (via Äquivalenz mit (i)) bereits für jedes $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Proposition 3.11. *Es sei $S = S^*$ in $\mathcal{H}$. Dann gelten*

(i) $\sigma(S) \subset \mathbb{R}$ *und* $\sigma_{\mathrm{r}}(S) = \emptyset$*;*

(ii) $\lambda \in \sigma(S) \Leftrightarrow$ *es existiert* $(x_n)_n \subset \operatorname{dom} S$ *mit* $\|x_n\| = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\|(S-\lambda)x_n\| \to 0$, $n \to \infty$.

Beweis. Die Aussage $\sigma(S) \subset \mathbb{R}$ folgt aus Satz 3.10. Die Beweise der restlichen Aussagen sind analog zum Beweis von Proposition 2.13. □

Beispiel 3.12. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $T : L^2(\mathbb{R}) \supset \operatorname{dom} T \to L^2(\mathbb{R})$,

$$(Tg)(x) = (fg)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{dom} T = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) : fg \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Dann gelten:

(i) $T = T^*$.

(ii) $\sigma(T) = \overline{\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}}$ und T ist genau dann beschränkt, wenn f beschränkt ist.

(iii) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\mu \in \mathbb{R} : |f^{-1}(\{\mu\})| > 0\}$.

Beweis. $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \operatorname{dom} T \Rightarrow \operatorname{dom} T$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$. Für $g \in \operatorname{dom} T$ gilt

$$(Tg, g) = \int_{\mathbb{R}} (fg)(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)|g(x)|^2 dx \in \mathbb{R},$$

also $T \subset T^*$ nach Lemma 3.6. Sei $\lambda \notin \overline{\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}}$. $T - \lambda$ bijektiv:
Injektivität: $0 = (T-\lambda)g = fg - \lambda g \Rightarrow (f-\lambda)g = 0 \Rightarrow g = 0$.
Surjektivität: Sei $k \in L^2(\mathbb{R})$. Setze

$$g(x) := \frac{k(x)}{f(x) - \lambda}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann $g \in L^2(\mathbb{R})$, da $|f(x) - \lambda| \geq \operatorname{dist}(\lambda, \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx < \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \{f(x) : x \in \mathbb{R}\})^2} \int_{\mathbb{R}} |k(x)|^2 dx < \infty.$$

Weiter ist $fg = (f-\lambda)g + \lambda g = k + \lambda g \in L^2(\mathbb{R})$ und damit $g \in \operatorname{dom} T$ und $(T-\lambda)g = (f-\lambda)g = k$. Also $T - \lambda$ surjektiv. Insbesondere $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(T)$. $\Rightarrow$ $T = T^*$ (Satz 3.10) und "$\subset$" in (ii).

"$\supset$" in (ii): Sei $\lambda \notin \sigma(T)$, also $(T-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Setze $\alpha := \|(T-\lambda)^{-1}\|$. Angenommen, $\lambda \in \overline{\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}}$. Falls $f = \lambda$ identisch, so ist $\mathbb{1}_{(0,1)} \in \ker(T-\lambda)$, also $\lambda \in \sigma(T)$, Widerspruch. Anderenfalls existiert ein beschränktes Intervall Δ mit $0 < |f(x) - \lambda| < \frac{1}{\alpha}$ für alle $x \in \Delta$. Es gilt dann $\mathbb{1}_\Delta \in L^2(\mathbb{R})$ und

$$\alpha^2 \|\mathbb{1}_\Delta\|^2 \geq \left\|(T-\lambda)^{-1}\mathbb{1}_\Delta\right\|^2 = \int_\Delta \frac{1}{|f(x)-\lambda|^2} dx > \alpha^2 \|\mathbb{1}_\Delta\|^2,$$

Widerspruch. Daher $\sigma(T) = \overline{\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}}$. Ist f beschränkt, so folgt $\operatorname{dom} T = L^2(\mathbb{R})$, also ist T beschränkt. Ist f unbeschränkt, so ist $\sigma(T)$ unbeschänkt und T kann nicht beschränkt sein (Satz 2.4).

(iii) Selbst. $\square$

Kapitel 4

Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Selbstadjungierte Operatoren erlauben eine Art "Normalform", fast so schön und einfach wie das Diagonalisieren für symmetrische (hermitesche) Matrizen. Das lernen wir in diesem Kapitel und bekommen dazu als Bonus eine Methode um Funktionen auf selbstadjungierte Operatoren anzuwenden, also z.B. $\sin(A)$ zu berechnen, wenn A ein selbstadjungierter Operator ist.

Von nun an ist $\mathcal{H}$ immer ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Wir beweisen in diesem Kapitel den Spektralsatz für beschränkte (im Allgemeinen nicht kompakte) selbstadjungierte Operatoren und diskutieren im Anschluss die Fassung für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren.

4.1 Motivation und Vorbereitungen

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}$$

mit Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Die zugehörigen Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume sind gegeben durch

$$E(\{\lambda_1\}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, E(\{\lambda_n\}) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\{\lambda_k\}) = \int_{\mathbb{R}} \mu dE(\mu).$$

(Zur exakten Definition des Integrals später.) Man stelle sich E als Maß vor, das nur aus Punktmassen an den Punkten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ besteht. Insbesondere gilt für ein offenes Intervall $\Delta \subset \mathbb{R}$

$$E(\Delta) = \sum_{\lambda_k \in \Delta} E(\{\lambda_k\}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_\Delta(A).$$

<u>Ziel</u>: Wir zeigen, dass zu jedem $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein *Spektralmaß* E (das Maß einer Borelmenge ist keine Zahl sondern eine Orthogonalprojektion) existiert, so dass

$$A = \int_{\mathbb{R}} \mu dE(\mu) = \int_{\sigma(A)} \mu dE(\mu).$$

<u>Idee</u>: Setze $E(\Delta) := \mathbb{1}_\Delta(A)$ (Δ Intervall). Aber was ist $\mathbb{1}_\Delta(A)$? Erstmal ist (nur) $p(A)$ für Polynome p klar.

Definition 4.1. Es sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ ein Polynom auf $\mathbb{R}$ mit komplexen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Dann ist $p(A)$ definiert als

$$p(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

(wobei $A^0 := I$, der Identitätsoperator).

Beachte: $(p(A))^* = \overline{p}(A)$, wobei $\overline{p}(t) = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} t^k$; insbesondere

$$p(A) \text{ selbstadjungiert} \iff a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \ldots, n.$$

Lemma 4.2. *Es sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Dann gilt*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Beweis. "$\supset$": Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Das Polynom $t \mapsto p(t) - p(\lambda)$ hat eine Nullstelle bei λ und daher existiert ein Polynom $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $p(t) - p(\lambda) = (t - \lambda)q(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $p(A) - p(\lambda) = (A - \lambda)q(A)$. Angenommen, $p(\lambda) \in \rho(p(A))$. Dann

$$\begin{aligned} I &= (p(A) - p(\lambda))(p(A) - p(\lambda))^{-1} = (A - \lambda)q(A)((p(A) - p(\lambda))^{-1} \\ &= (p(A) - p(\lambda))^{-1} q(A)(A - \lambda), \end{aligned}$$

also ist $A - \lambda$ bijektiv, d.h. $\lambda \in \rho(A)$, Widerspruch.

"$\subset$": Sei $\mu \in \sigma(p(A))$. Es existieren $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit

$$p(t) - \mu = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \ldots (t - \lambda_n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Daher

$$p(A) - \mu = a(A - \lambda_1)(A - \lambda_2) \ldots (A - \lambda_n).$$

Dann existiert mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_k \in \sigma(A)$, denn sonst wäre $\mu \in \rho(p(A))$, und es gilt $p(\lambda_k) = \mu$, also $\mu \in p(\sigma(A))$. □

4.2 Der stetige Funktionalkalkül

In diesem und den folgenden Abschnitten ist stets $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wir zeigen, dass $f(A)$ sinnvoll erklärt werden kann für jede stetige Funktion f. Mit $C(\sigma(A))$ bezeichnen wir den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ auf der kompakten Menge $\sigma(A)$, ausgestattet mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \sigma(A)} |f(x)|, \quad f \in C(\sigma(A)).$$

und mit $P(\sigma(A)) := \{\sigma(A) \ni t \mapsto \sum_{k=0}^n a_k t^k, a_k \in \mathbb{C}\}$ den Vektorraum der Polynome auf $\sigma(A)$. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gilt dann:

$$P(\sigma(A)) \text{ ist dicht in } C(\sigma(A)).$$

(Für einen Beweis in der hier benötigten Form siehe [Wer, Satz VIII.4.7].)

Satz 4.3. *Es sei* $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*. Dann ist die Abbildung*

$$P(\sigma(A)) \ni p \mapsto p(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

linear und isometrisch, d.h. $\|p(A)\| = \|p\|_\infty$ *für alle* $p \in P(\sigma(A))$*, und hat eine eindeutige isometrische (insbesondere stetige) lineare Fortsetzung* $\Phi : C(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$*. Diese hat folgende Eigenschaften:*

(a) Φ *ist mulitiplikativ, d.h.* $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ *für alle* $f, g \in C(\sigma(A))$*.*

(b) Φ *ist involutiv, d.h.* $\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*$ *für alle* $f \in C(\sigma(A))$*.*

Φ hängt natürlich vom Operator A ab. Wir schreiben

$$f(A) := \Phi(f), \quad f \in C(\sigma(A)).$$

Nach dem Satz ist $\|f(A)\| = \|f\|_\infty$ für alle $f \in C(\sigma(A))$. Die Abbildung Φ heißt *stetiger Funktionalkalkül* von A. (Stetigkeit bezieht sich auf die Anwendbarkeit auf stetige f und nicht auf die Stetigkeit der Abbildung Φ.)

Beweis. Für $p \in P(\sigma(A))$ definieren wir $\Phi_0(p) := p(A)$. Dann gilt (vgl. Beweis von Proposition 2.8)

$$\|\Phi_0(p)\|^2 = \|p(A)\|^2 = \|(p(A))^* p(A)\| = \|\overline{p}(A)p(A)\|,$$

und weil $\overline{p}(A)p(A)$ ein selbstadjungierter (insbesondere normaler) Operator ist, folgt mit Proposition 2.8

$$\begin{aligned}\|\Phi_0(p)\|^2 &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\| \big((\overline{p}p)(A)\big)^n \right\|^{1/n} \overset{\text{Satz 2.7}}{=} \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma((\overline{p}p)(A))\} \\ &\overset{\text{Lemma 4.2}}{=} \sup\{|\lambda| : \lambda \in (\overline{p}p)(\sigma(A))\} = \sup\left\{|p(\mu)|^2 : \mu \in \sigma(A)\right\} = \|p\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Damit ist Φ_0 isometrisch, insbesondere stetig. Da $P(\sigma(A))$ dicht in $C(\sigma(A))$ liegt, existiert eine eindeutige lineare, isometrische Fortzsetzung $\Phi : C(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, definiert durch

$$\Phi(f) := \lim_{n\to\infty} \Phi_0(p_n), \quad \text{wenn } p_n \in P(\sigma(A)) \text{ und } \|f - p_n\|_\infty \to 0.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Eigenschaften (a) und (b) auf $P(\sigma(A))$ gelten; zum Beispiel

$$\Phi(\overline{p}) = \overline{p}(A) = (p(A))^* = (\Phi(p))^* \quad \forall p \in P(\sigma(A)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Eigenschaften (a) und (b) auch auf $C(\sigma(A))$ erhalten bleiben. Wir zeigen das wieder für die Involutivität: Sei $f \in C(\sigma(A))$ und $(p_n)_n \subset P(\sigma(A))$ mit $\|f - p_n\|_\infty \to 0$. Dann gilt

$$\Phi(\overline{f}) = \Phi(\lim_{n\to\infty} \overline{p_n}) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\overline{p_n}) = \lim_{n\to\infty} (\Phi(p_n))^* = (\Phi(\lim_{n\to\infty} p_n))^* = (\Phi(f))^*.$$

Multiplikativität genauso. □

Beispiel 4.4. Sei $A = A^* \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dann kann A diagonalisiert werden: Es existieren $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ invertierbar und

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

mit $A = T^{-1}DT$ und $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Für jedes Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ gilt

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_{k=0}^m a_k A^k = \sum_{k=0}^m a_k (T^{-1}DT)^k = \sum_{k=0}^m a_k T^{-1} D^k T \\ &= T^{-1} \sum_{k=0}^m a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} T = T^{-1} \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} T. \end{aligned}$$

Ist $f \in C(\sigma(A))$ und sind $p_j \in P(\sigma(A))$ mit $\|f - p_j\|_\infty \to 0$, $j \to \infty$, dann

$$f(A) = \lim_{j\to\infty} T^{-1} \begin{pmatrix} p_j(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p_j(\lambda_n) \end{pmatrix} T = T^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T.$$

Das taucht zum Beispiel beim Lösen von Systemen gewöhnlicher, linearer DGL auf, wo e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ berechnet werden muss (also $f(A)$ für $f(x) = e^{tx}$). Das Beispiel suggeriert auch, wieso f nur auf $\sigma(A)$ definiert bzw. stetig sein muss.

Proposition 4.5. *Es sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann gelten folgende Aussagen für alle $f, g \in C(\sigma(A))$.*

(i) *$f(A)g(A) = g(A)f(A)$.*

(ii) *Ist* $f(t) \geq 0\ \forall t \in \sigma(A)$*, so ist* $f(A) \geq 0$*, d.h.* $(f(A)x, x) \geq 0\ \forall x \in \mathcal{H}$.

(iii) $f(A)$ *ist ein normaler Operator und* $f(A) = (f(A))^*$ *genau dann, wenn* f *reellwertig ist.*

(iv) *Aus* $Ax = \lambda x$ *folgt* $f(A)x = f(\lambda)x$.

Beweis. Übung. □

Satz 4.6 (Spektralabbildungssatz)**.** *Ist* $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*, so gilt für jedes* $f \in C(\sigma(A))$

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

Beweis. "$\subset$": Sei $\mu \notin f(\sigma(A))$. Setze $g(t) := (f(t) - \mu)^{-1}$, $t \in \sigma(A)$. Dann gilt $g \in C(\sigma(A))$ und $(f - \mu)g = \mathbb{1}_{\sigma(A)}$, also

$$I = \Phi(\mathbb{1}) = \Phi((f - \mu)g) = \Phi(f - \mu)\Phi(g) = (f(A) - \mu)g(A) = g(A)(f(A) - \mu).$$

Also $\mu \in \rho(f(A))$.

"$\supset$": Sei $\mu = f(\lambda)$ mit $\lambda \in \sigma(A)$. Wähle $(p_n)_n \subset P(\sigma(A))$ mit $\|f - p_n\|_\infty \leq 1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten $|f(\lambda) - p_n(\lambda)| \leq 1/n$ und $\|f(A) - p_n(A)\| \leq 1/n$. Wegen Lemma 4.2 gilt $\sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $p_n(\lambda) \in \sigma(p_n(A))$, $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 2.13 (ii) existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathcal{H}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(p_n(A) - p_n(\lambda))x_n\| \leq \frac{1}{n}$. Somit

$$\begin{aligned} \|(f(A) - \mu)x_n\| &\leq \|(f(A) - p_n(A))x_n\| + \|(p_n(A) - p_n(\lambda))x_n\| \\ &\quad + \|(p_n(\lambda) - f(\lambda))x_n\| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Proposition 2.13 (ii) impliziert $\mu \in \sigma(f(A))$. □

4.3 Der messbare Funktionalkalkül

Nächstes Ziel: Erweitere den Funktionalkalkül auf beschränkte, messbare Funktionen $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$. Ein wichtiges Hilfsmittel dazu ist das folgende Lemma, siehe z.B. [Wer, Lemma VII.1.5]. Hier ist für kompaktes $K \subset \mathbb{C}$

$$B(K) := \{f : K \to \mathbb{C} \text{ messbar und beschränkt}\},$$

der mit $\|\cdot\|_\infty$ zum Banachraum wird.

Lemma 4.7. *Es sei $V \subset B(K)$ derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind.*

(i) $C(K) \subset V$.

(ii) *Ist $(f_n)_n \subset V$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ so, dass $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ für alle $t \in K$ existiert, so gilt $f \in V$.*

Dann ist $V = B(K)$.

In Worten: $B(K)$ ist die kleinste Funktionenmenge, die die stetigen Funktionen enthält und gegenüber punktweisen Grenzwerten gleichmäßig beschränkter Funktionenfolgen abgeschlossen ist.

Wir werden außerdem die folgende Eigenschaft nutzen.

Lemma 4.8. *Seien $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $x, y \in \mathcal{H}$. Dann existiert ein komplexes Borelmaß $\mu_{x,y}$ mit*

$$(f(A)x, y) = \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y} \quad \forall f \in C(\sigma(A)).$$

Für jedes beliebige $f \in B(\sigma(A))$ gilt dann

$$\left| \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y} \right| \leq \|f\|_\infty \|x\| \|y\|.$$

Erinnerung: Ein komplexes Borelmaß ist eine Abbildung $\mu : \Sigma(\sigma(A)) \to \mathbb{C}$, die σ-additiv ist, wobei $\Sigma(\sigma(A))$ die Borel-σ-Algebra auf $\sigma(A)$ ist. (Insbesondere ist $\mu(\emptyset) = 0$ für jedes komplexe Borelmaß.)

Beweis von Lemma 4.8. Für $x, y \in \mathcal{H}$ definiere eine Abbildung $\ell_{x,y} : C(\sigma(A)) \to \mathbb{C}$ durch

$$\ell_{x,y}(f) := (f(A)x, y), \quad f \in C(\sigma(A)).$$

Dann ist $\ell_{x,y}$ linear (folgt aus Linearität des stetigen Funktionalkalküls). Außerdem

$$|\ell_{x,y}(f)| = |(f(A)x, y)| \leq \|f(A)x\| \|y\| \leq \|f(A)\| \|x\| \|y\| = \|x\| \|y\| \|f\|_\infty$$

für alle $f \in C(\sigma(A))$, also $\ell_{x,y} \in (C(\sigma(A)))'$ und $\|\ell_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|$. Nutze jetzt:

Rieszscher Darstellungssatz: Es sei K ein kompakter metrischer Raum und $M(K)$ der Raum der komplexen Borelmaße auf K mit der Norm

$$\|\mu\| := |\mu|(K) = \sup \sum_{E \in Z} |\mu(E)|, \quad \mu \in M(K),$$

wobei das Supremum über alle endlichen Zerlegungen Z von K in disjunkte Mengen gebildet wird. Dann ist die Abbildung

$$T : M(K) \to (C(K))', \quad (T\mu)(f) := \int_K f d\mu,$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Wir wenden den Satz auf $K = \sigma(A)$ an und finden ein eindeutiges komplexes Borelmaß $\mu_{x,y}$ mit

$$(f(A)x, y) = \ell_{x,y}(f) = (T\mu_{x,y})(f) = \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y} \quad \forall f \in C(\sigma(A)).$$

Es gilt $\|\mu_{x,y}\| = \|\ell_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$ und daher

$$\left| \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y} \right| \leq \|f\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \leq \|f\|_\infty \|x\|\|y\| \quad \forall f \in B(\sigma(A)).$$

□

Satz 4.9. *Für $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert genau eine lineare, stetige Abbildung $\hat{\Phi} : B(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften.*

(a) *$\hat{\Phi}(f) = f(A)$ für alle $f \in C(\sigma(A))$.*

(b) *$\hat{\Phi}$ ist multiplikativ und involutiv.*

(c) *Ist $f_n \in B(\sigma(A))$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ und gilt $f_n(t) \to f(t)$ für alle $t \in \sigma(A)$, so folgt*

$$(\hat{\Phi}(f_n)x, y) \to (\hat{\Phi}(f)x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Wie beim stetigen Funktionalkalkül setzen wir

$$f(A) := \hat{\Phi}(f).$$

Die Abbildung $\hat{\Phi}$ heißt *messbarer Funktionalkalkül* von A.

Beweis. **Schritt 1.** Für $f \in B(\sigma(A))$ betrachte die Abbildung

$$\{x, y\} \mapsto \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y},$$

wobei $\mu_{x,y}$ das zu x und y gehörige komplexe Maß aus Lemma 4.8 ist. In diesem Schritt zeigen wir, dass dies eine stetige Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$ ist.

Additivität im ersten Argument: Seien $x, z \in \mathcal{H}$. Setze

$$V := \left\{ h \in B(\sigma(A)) : \int_{\sigma(A)} h d\mu_{x+z,y} = \int_{\sigma(A)} h d\mu_{x,y} + \int_{\sigma(A)} h d\mu_{z,y} \; \forall y \in \mathcal{H} \right\}.$$

Wir zeigen $V = B(\sigma(A))$. Klar: $C(\sigma(A)) \subset V$, denn für $h \in C(\sigma(A))$ gilt nach Lemma 4.8

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(A)} h d\mu_{x+z,y} &= (h(A)(x+z), y) = (h(A)x, y) + (h(A)z, y) \\ &= \int_{\sigma(A)} h d\mu_{x,y} + \int_{\sigma(A)} h d\mu_{z,y}.\end{aligned}$$

Sei weiter $(h_n)_n \subset V$ mit $\sup_n \|h_n\|_\infty < \infty$ und $h_n(t) \to h(t)$, $n \to \infty$, für alle $t \in \sigma(A)$. Dann gilt $h \in B(\sigma(A))$ und (mit Satz von Lebesgue für das zugehörige Variationsmaß)

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(A)} h d\mu_{x+z,y} &= \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(A)} h_n d\mu_{x+z,y} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\sigma(A)} h_n d\mu_{x,y} + \int_{\sigma(A)} h_n d\mu_{z,y} \right) \\ &= \int_{\sigma(A)} h d\mu_{x,y} + \int_{\sigma(A)} h d\mu_{z,y}.\end{aligned}$$

Also $h \in V$ und somit $V = B(\sigma(A))$ (Lemma 4.7). Das liefert Additivität im ersten Argument. Analog Homogenität sowie die Antilinearität im zweiten Argument.

Stetigkeit: Lemma 4.8.

Schritt 2. Konstruktion von $\hat{\Phi}(f)$: Sei $f \in B(\sigma(A))$. Nach dem Satz von Lax–Milgram (Übung!) existiert ein eindeutiger stetiger linearer Operator $\hat{\Phi}(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$(\hat{\Phi}(f)x, y) = \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y} \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Insbesondere $\|\hat{\Phi}(f)\| \leq \|f\|_\infty$ (wieder Lemma 4.8) $\Rightarrow \hat{\Phi} : B(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ stetig. Konstruktion liefert auch $\Phi(f) = \hat{\Phi}(f)$ für alle $f \in C(\sigma(A)) \Rightarrow$ (a).

Schritt 3. Nachweis der übrigen Eigenschaften: (c): Mit Satz von Lebesgue

$$\big(\hat{\Phi}(f)x, y\big) = \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(A)} f_n d\mu_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \big(\hat{\Phi}(f_n)x, y\big).$$

Linearität: folgt aus Linearität des Integrals.
Multiplikativität: In zwei Schritten. Sei zuerst $g \in C(\sigma(A))$ fest. Setze

$$V := \Big\{ f \in B(\sigma(A)) : \hat{\Phi}(fg) = \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(g) \Big\}.$$

Klar: $C(\sigma(A)) \subset V$. Um Lemma 4.7 anzuwenden seien $f_n \in V$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n(t) \to f(t)$ für alle $t \in \sigma(A)$. Nach (c) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \big(\hat{\Phi}(f_n)\hat{\Phi}(g)x, y\big) = \big(\hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(g)x, y\big),$$

außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \big(\hat{\Phi}(f_n)\hat{\Phi}(g)x, y\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\hat{\Phi}(f_n g)x, y\big) = \big(\hat{\Phi}(fg)x, y\big)$$

(letzte Gleichheit wieder wegen (c)). Insgesamt folgt $f \in V$. Also $V = B(\sigma(A))$. Sei nun $f \in B(\sigma(A))$ und

$$\widetilde{V} := \Big\{ g \in B(\sigma(A)) : \hat{\Phi}(fg) = \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(g) \Big\}.$$

Nach dem eben Gezeigten ist $C(\sigma(A)) \subset \widetilde{V}$ und mit Lemma 4.7 zeigt man wieder $\widetilde{V} = B(\sigma(A))$.
Involutivität: ähnlich; Übung.
Schritt 4. Eindeutigkeit von $\hat{\Phi}$: Seien $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2 : B(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ zwei Abbildungen wie im Satz. Setze

$$V := \Big\{ f \in B(\sigma(A)) : \hat{\Phi}_1(f) = \hat{\Phi}_2(f) \Big\}.$$

Dann ist wegen (a) $C(\sigma(A)) \subset V$. Mit (c) und Lemma 4.7 folgt $V = B(\sigma(A))$, somit $\hat{\Phi}_1 = \hat{\Phi}_2$. □

Aus der Multiplikativität des messbaren Funktionalkalküls folgt

Korollar 4.10. *Für $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $f \in B(\sigma(A))$ ist $f(A)$ normal; $f(A)$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn f reellwertig ist.*

Bemerkung 4.11. Eigenschaft (c) im vorigen Satz kann verbessert werden zu:

(c') Ist $(f_n)_n \subset B(\sigma(A))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und gilt $f_n(t) \to f(t)$ für alle $t \in \sigma(A)$, so ist
$$\lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(f_n)x = \hat{\Phi}(f)x \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Beweis. Für $(f_n)_n$ wie in der Bemerkung gilt
$$\begin{aligned}\big\|\hat{\Phi}(f_n)x\big\|^2 &= \big(\hat{\Phi}(f_n)x, \hat{\Phi}(f_n)x\big) = \big(\hat{\Phi}(f_n)^*\hat{\Phi}(f_n)x, x\big)\\ &= \big(\hat{\Phi}(\overline{f_n})\hat{\Phi}(f_n)x, x\big) = \big(\hat{\Phi}(\overline{f_n}f_n)x, x\big)\\ &\overset{\text{(c)}}{\to} \big(\hat{\Phi}(\overline{f}f)x, x\big) = \dots = \big\|\hat{\Phi}(f)x\big\|^2\end{aligned}$$
und daher
$$\begin{aligned}\big\|\hat{\Phi}(f_n)x - \hat{\Phi}(f)x\big\|^2 &= \big\|\hat{\Phi}(f_n)x\big\|^2 - \big(\hat{\Phi}(f_n)x, \hat{\Phi}(f)x\big)\\ &\quad - \big(\hat{\Phi}(f)x, \hat{\Phi}(f_n)x\big) + \big\|\hat{\Phi}(f)x\big\|^2\\ &\overset{\text{(c)}}{\to} \big\|\hat{\Phi}(f)x\big\|^2 - \big\|\hat{\Phi}(f)x\big\|^2 - \big\|\hat{\Phi}(f)x\big\|^2 + \big\|\hat{\Phi}(f)x\big\|^2 = 0.\end{aligned}$$
□

4.4 Spektralmaße und Integration

Im Folgenden ist Σ die Borel-σ-Algebra in $\mathbb{R}$.

Erinnerung: $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *Orthogonalprojektion*, falls $P^2 = P^* = P$. Das ist äquivalent dazu, dass $\operatorname{ran} P$ abgeschlossen und P die Orthogonalprojektion in $\mathcal{H}$ auf $\operatorname{ran} P$ im Sinne des Projektionssatzes ist.

Definition 4.12. Eine Abbildung $E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), B \mapsto E_B$, heißt *Spektralmaß*, falls E_B für jedes $B \in \Sigma$ eine Orthogonalprojektion ist und

(i) $E_\emptyset = 0$, $E_\mathbb{R} = I$;

(ii) für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \ldots \in \Sigma$ und alle $x \in \mathcal{H}$ gilt
$$\sum_{i=1}^{\infty} E_{B_i}x = E_{\bigcup_{i=1}^\infty B_i}x$$
(σ-Additivität).

Ein Spektralmaß E hat *kompakten Träger*, falls eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ existiert mit $E_K = I$.

Eigenschaften von Spektralmaßen:

- Endliche Additivität: $E_{B_1} + E_{B_2} = E_{B_1 \cup B_2}$ für B_1, B_2 disjunkt;
- $E_{B_1} E_{B_2} = E_{B_1 \cap B_2}$ für alle Borelmengen B_1, B_2. (Übung)

Proposition 4.13. *Es seien $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\hat{\Phi}$ der messbare Funktionalkalkül von A. Dann ist*

$$E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad B \mapsto E_B := \mathbb{1}_{B \cap \sigma(A)}(A) = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{B \cap \sigma(A)}),$$

ein Spektralmaß mit kompaktem Träger. Dieses Spektralmaß heißt das Spektralmaß von A.

Beweis. Im Beweis betrachten wir nur Borelmengen, die in $\sigma(A)$ enthalten sind. E_B ist stets Orthogonalprojektion:

$$E_B^2 = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_B)\hat{\Phi}(\mathbb{1}_B) = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_B) = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_B) = E_B = \hat{\Phi}(\overline{\mathbb{1}_B}) = (\hat{\Phi}(\mathbb{1}_B))^* = E_B^*.$$

Weiter $E_\emptyset = \hat{\Phi}(0) = 0$ und $E_\mathbb{R} = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{\sigma(A)}) = I$ nach Satz 4.9 (a).

σ-Additivität: Zunächst gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n E_{B_i} x = \sum_{i=1}^n \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{B_i}) x = \hat{\Phi}\Big(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i}\Big) x = \hat{\Phi}\big(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n B_i}\big) x = E_{\bigcup_{i=1}^n B_i} x.$$

Setze $f_n := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i} = \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n B_i}$ und $f := \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty B_i}$. Dann $f_n \in B(\sigma(A))$, $\sup_n \|f_n\|_\infty = 1 < \infty$ und $f_n(t) \to f(t)$ für alle $t \in \sigma(A)$. Aus Eigenschaft (c') in Bemerkung 4.11 folgt

$$\sum_{i=1}^\infty E_{B_i} x = \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(f_n) x = \hat{\Phi}(f) x = E_{\bigcup_{i=1}^\infty B_i} x.$$

Für den kompakten Träger wähle $K = \sigma(A)$; vergleiche Satz 2.4. □

Beispiel 4.14. Es sei $A = A^* \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine Matrix, diagonalisiert als $A = T^{-1} D T$ wie in Beispiel 4.4. Dann ist das Spektralmaß von A gegeben durch

$$E_B = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{B \cap \sigma(A)}) = T^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} T \quad \text{mit} \quad \mu_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda_j \in B \\ 0 & \text{falls } \lambda_j \notin B. \end{cases}$$

Integration bzgl. eines Spektralmaßes E:

Schritt 1: Treppenfunktionen. Ist $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und disjunkten $B_i \in \Sigma$, so setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}} f dE := \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{B_i}.$$

(Definition unabhängig von der Darstellung von f.)

Schritt 2: Beschränkte, messbare Funktionen.

Lemma 4.15. *Sei E ein Spektralmaß. Dann ist die Abbildung $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f dE$, definiert auf der Menge der Treppenfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ein stetiger, dicht definierter, linearer Operator von $B(\mathbb{R})$ nach $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; es gilt*

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} f dE \Big\| \leq \|f\|_\infty \quad \text{für jede Treppenfunktion } f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Konsequenz: Es existiert eine eindeutige Fortsetzung des Integrals bzgl. E zu einem stetigen, linearen Operator auf ganz $B(\mathbb{R})$, den wir auch für $f \in B(\mathbb{R})$ als $\int_{\mathbb{R}} f dE$ schreiben. (Manchmal $\int_{\mathbb{R}} f(t) dE(t)$ zur Betonung der Integrationsvariable.) Ist $f \in B(\mathbb{R})$, so existiert eine Folge $(f_n)_n$ von Treppenfunktionen mit $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$; für jede solche Folge ist

$$\int_{\mathbb{R}} f dE = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dE.$$

Beweis von Lemma 4.15. Linearität sieht man leicht; dass die Treppenfunktionen dicht in $(B(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ liegen, ist bekannt. Beschränktheit: Seien $x \in \mathcal{H}$ und $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$ mit B_i paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\Big\| \Big(\int_{\mathbb{R}} f dE \Big) x \Big\|^2 = \Big\| \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{B_i} x \Big\|^2$$

und wegen

$$\begin{aligned}\big(\alpha_i E_{B_i} x, \alpha_j E_{B_j} x\big) &= \big(\alpha_i \overline{\alpha_j} E_{B_j}^* E_{B_i} x, x\big) = \big(\alpha_i \overline{\alpha_j} E_{B_j} E_{B_i} x, x\big) \\ &= \big(\alpha_i \overline{\alpha_j} E_{B_i \cap B_j} x, x\big) = \big(\alpha_i \overline{\alpha_j} E_{\emptyset} x, x\big) = 0\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\int_{\mathbb{R}} f dE\Big)x\Big\|^2 &= \sum_{i=1}^n \big\|\alpha_i E_{B_i}x\big\|^2 \le \sup_i |\alpha_i|^2 \sum_{i=1}^n \big\|E_{B_i}x\big\|^2 \\ &= \|f\|_\infty^2 \Big\|\sum_{i=1}^n E_{B_i}x\Big\|^2 = \|f\|_\infty^2 \big\|E_{\bigcup_{i=1}^n B_i}x\big\|^2.\end{aligned}$$

Da $\|E_B x\| \le \|E_{B'}x\|$, wenn $B \subset B'$, (folgt direkt aus σ-Additivität) ergibt sich

$$\Big\|\Big(\int_{\mathbb{R}} f dE\Big)x\Big\|^2 \le \|f\|_\infty^2 \big\|E_{\mathbb{R}}x\big\|^2 = \|f\|_\infty^2 \|x\|^2.$$

Die Behauptung folgt durch Supremumsbildung über alle $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| \le 1$. □

Ist $f \in B(\sigma(A))$, so identifizieren wir f mit der durch null auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion und schreiben in diesem Sinn $\int_{\mathbb{R}} f dE$.

4.5 Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Satz 4.16 (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Es sei* $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\hat{\Phi}$ *der messbare Funktionalkalkül von* A *und* $E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *das Spektralmaß von* A*. Dann gilt*

$$\hat{\Phi}(f) = \int_{\mathbb{R}} f dE \quad \forall f \in B(\sigma(A)).$$

Insbesondere

$$A = \int_{\mathbb{R}} t dE(t).$$

Beweis. Seien $f \in B(\sigma(A))$ und $(f_n)_n$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, schreibe $f_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^{(n)} \mathbb{1}_{B_i^{(n)}}$. Dann

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f dE &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dE = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^{(n)} E_{B_i^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}\Big(\sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^{(n)} \mathbb{1}_{B_i^{(n)}}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(f_n) = \hat{\Phi}(f).\end{aligned}$$

□

Satz 4.17 (Umkehrung zum Spektralsatz)**.** *Es sei $E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Spektralmaß mit kompaktem Träger. Dann definiert*

$$A := \int_{\mathbb{R}} t dE(t)$$

einen selbstadjungierten Operator in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und der messbare Funktionalkalkül $\hat{\Phi}$ von A erfüllt

$$\hat{\Phi}(f) = \int_{\mathbb{R}} f dE \quad \forall f \in B(\sigma(A)).$$

(Ohne Beweis.)

Satz 4.18. *Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ das Spektralmaß von A. Dann gelten für alle $\lambda \in \mathbb{R}$*

(i) $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \exists$ *offene Umgebung $B \subset \mathbb{R}$ von λ mit $E_B = 0$;*

(ii) $\operatorname{ran} E_{\{\lambda\}} = \ker(A - \lambda)$*; insbesondere $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \Leftrightarrow E_{\{\lambda\}} \neq 0$;*

(iii) *ist λ isolierter Punkt in $\sigma(A)$ (d.h. es gibt eine offene Umgebung $B \subset \mathbb{R}$ von λ mit $B \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$), so ist λ ein Eigenwert.*

(Punkt (iii) erklärt ein wenig den Begriff "stetiges Spektrum".)

Beweis. (i) "$\Rightarrow$": Wähle offene Umgebung $B \subset \rho(A)$ von λ. Dann gilt $E_B = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{B\cap\sigma(A)}) = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_\emptyset) = 0$. "$\Leftarrow$": Sei $B \subset \mathbb{R}$ offen mit $\lambda \in B$ und $E_B = 0$. Setze

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{t-\lambda}, & t \in \sigma(A) \setminus B, \\ 0, & t \in \sigma(A) \cap B \end{cases}$$

und $g(t) = t - \lambda$ für $t \in \sigma(A)$. Dann $f, g \in B(\sigma(A))$ und

$$\begin{aligned} f(A)(A-\lambda) &= f(A)g(A) = \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(g) = \hat{\Phi}(fg) = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{\sigma(A)\setminus B}) \\ &= \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{\sigma(A)}) - \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{B\cap\sigma(A)}) = I - E_B = I = \cdots = (A-\lambda)f(A), \end{aligned}$$

d.h. $(A-\lambda)^{-1} = f(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. $\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

(ii) Sei $x \in \operatorname{ran} E_{\{\lambda\}}$. Dann $E_{\{\lambda\}}x = E_{\{\lambda\}}E_{\{\lambda\}}y = E_{\{\lambda\}}y = x$ für ein geeignetes $y \in \mathcal{H}$ und daher

$$(A-\lambda)x = (A-\lambda)E_{\{\lambda\}}x = \hat{\Phi}(g\mathbb{1}_{\{\lambda\}\cap\sigma(A)}) = 0,$$

wobei $g(t) = t - \lambda$ für $t \in \sigma(A)$. Sei umgekehrt $Ax = \lambda x$. Dann gilt $f(A)x = f(\lambda)x$ für alle $f \in B(\sigma(A))$; für $f \in C(\sigma(A))$ siehe Proposition 4.5 (iv), für $f \in B(\sigma(A))$ verwende wie üblich Lemma 4.7 und Eigenschaft (c') des messbaren Funktionalkalküls. Insbesondere folgt $E_{\{\lambda\}}x = \mathbb{1}_{\{\lambda\}\cap\sigma(A)}(A)x = \mathbb{1}_{\{\lambda\}\cap\sigma(A)}(\lambda)x = x$, somit $x \in \operatorname{ran} E_{\{\lambda\}}$.

(iii) Sei $B \subset \mathbb{R}$ offen mit $B \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$. Dann $E_{B\setminus\{\lambda\}} = \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{(B\setminus\{\lambda\})\cap\sigma(A)}) = 0$. Wäre auch $E_{\{\lambda\}} = 0$, dann $E_B = E_{B\setminus\{\lambda\}} + E_{\{\lambda\}} = 0$ und mit (i) $B \subset \rho(A)$, Widerspruch. Mit (ii) folgt die Behauptung. □

Satz 4.19. *Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und E das Spektralmaß von A. Weiter sei $B \in \Sigma$ und $\mathcal{H}_B := \operatorname{ran} E_B$. Dann gelten*

(i) $A\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_B^\perp = \operatorname{ran} E_{\mathbb{R}\setminus B}$ *und* $A\mathcal{H}_B^\perp \subset \mathcal{H}_B^\perp$;

(ii) $A_B := A \upharpoonright \mathcal{H}_B$ *ist selbstadjungiert und beschränkt in* $\mathcal{H}_B$;

(iii) $(\sigma(A) \cap \mathring{B}) \subset \sigma(A_B) \subset (\sigma(A) \cap \overline{B})$.

Insbesondere ist $A = A_B \oplus A_{\mathbb{R}\setminus B}$.

Beweis. Übung. □

4.6 Der Spektralsatz für (unbeschränkte) selbstadjungierte Operatoren

Wir diskutieren zuerst, wie $f(A)$ gebildet werden kann, wenn $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar, aber i.A. unbeschränkt ist.

Lemma 4.20. *Sei $E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Spektralmaß und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar. Definiere*

$$f_n(\lambda) := f(\lambda)\mathbb{1}_{\{|f|\le n\}}(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda), & |f(\lambda)| \le n, \\ 0, & |f(\lambda)| > n. \end{cases}$$

Dann sind f_n messbar und beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dEx$ existiert genau dann, wenn $\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x, x) < \infty$. In diesem Fall definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}} f dEx := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dEx.$$

Beweis. Klarerweise sind die f_n messbar und beschränkt. Für $x \in \mathcal{H}$ mit gilt für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \big(f_n(\lambda) - f_m(\lambda)\big) dEx \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_n(\lambda) - f_m(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x, x), \tag{4.1}$$

siehe Übungen. Ist $\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x, x) < \infty$, so konvergiert die rechte Seite gegen null nach Satz von Lebesgue ($4|f|^2$ ist integrierbare Majorante), daher existiert $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dEx$. Existiert umgekehrt $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dEx$, so folgt aus (4.1), dass $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, (Ex, x))$ ist; deren Grenzwert in $L^2(\mathbb{R}, (Ex, x))$ stimmt dann mit dem punktweisen Grenzwert f überein, insbesondere $\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x, x) < \infty$. □

Proposition 4.21. *Seien $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, E das Spektralmaß von A und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist*

$$f(A)x := \int_{\mathbb{R}} f dEx, \quad \operatorname{dom} f(A) := \left\{ x \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x, x) < \infty \right\},$$

ein selbstadjungierter (i.A. unbeschränkter) linearer Operator.

Beweis. Nach Lemma 4.20 ist $f(A)$ wohldefiniert, und Linearität prüft man leicht nach.

Dichtheit von $\operatorname{dom} f(A)$: Für $x \in \mathcal{H}$ und $m \in \mathbb{N}$ setze $x_m := \mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)x$. Dann gilt $x_m \in \operatorname{dom} f(A)$, denn $f_n(A)\mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)x = (f\mathbb{1}_{\{|f| \le n\}}\mathbb{1}_{\{|f| \le m\}})(A)x = f_m(A)x$ für alle $n \ge m$, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(A)\mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)x = f_m(A)x$ existiert. Mit Eigenschaft (c') des messbaren Funktionalkalküls ist $\lim_{m\to\infty} x_m = x$.

Symmetrie von $f(A)$: Für $x, y \in \operatorname{dom} f(A)$ gilt

$$(f(A)x, y) = \lim_{n\to\infty} (f_n(A)x, y) = \lim_{n\to\infty} (x, f_n(A)y) = (x, f(A)y).$$

Selbstadjungiertheit: Sei $y \in \operatorname{dom} f(A)^*$. Wir zeigen, dass $\lim_{m\to\infty} f_m(A)y$ existiert. Wie gerade gezeigt gilt $\mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)x \in \operatorname{dom} f(A)$ für alle $x \in \mathcal{H}$, $m \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)f(A)^*y, x\big) &= \big(f(A)^*y, \mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)x\big) = \big(y, f(A)\mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)x\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(y, f_n(A)\mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)x\big) = (f_m(A)y, x).\end{aligned}$$

Es folgt

$$f(A)^*y \overset{\text{(c')}}{=} \lim_{m\to\infty} \mathbb{1}_{\{|f| \le m\}}(A)f(A)^*y = \lim_{m\to\infty} f_m(A)y,$$

insbesondere existiert der Limes. $\Rightarrow y \in \operatorname{dom} f(A)$. □

Für i.A. unbeschränkte $A = A^*$ in $\mathcal{H}$ gilt folgender Satz.

Satz 4.22 (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren). *Sei $A : \mathcal{H} \supset \operatorname{dom} A \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann existiert ein Spektralmaß E mit*

$$Ax = \int_{\mathbb{R}} t dE(t)x \quad \forall x \in \operatorname{dom} A$$

und

$$\operatorname{dom} A = \left\{ x \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} t^2 d(E(t)x, x) < \infty \right\}.$$

Ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, so definiert

$$h(A)x := \int_{\mathbb{R}} h dEx, \quad \operatorname{dom} h(A) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |h|^2 d(Ex, x) < \infty \right\},$$

einen selbstadjungierten Operator in $\mathcal{H}$.

Die Integral sind wieder als Grenzwerte zu verstehen wie in Lemma 4.20.

Beweis. Wir zeigen den Satz unter der Zusatzbedingung, dass ein $\mu \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$ existiert. (Sonst wähle geeignete Alternative für die Funktion f in der nächsten Formelzeile.) In diesem Fall ist $\widetilde{A} := (A-\mu)^{-1}$ ein beschränkter, selbstadjungierter Operator und es man zeigt leicht

$$\sigma(\widetilde{A}) = \left\{ \frac{1}{t-\mu} : t \in \sigma(A) \right\}.$$

Setze

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} + \mu, & t \neq 0, \\ \text{beliebig}, & t = 0. \end{cases}$$

Definiere weiter

$$E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad B \mapsto E_B := \mathbb{1}_{\widetilde{B}}(\widetilde{A}),$$

wobei

$$\widetilde{B} = \left\{ \frac{1}{t-\mu} : t \in B \cap \sigma(A) \right\}.$$

Es gilt also $E_B = E^{\widetilde{A}}_{\widetilde{B}}$, wenn $E^{\widetilde{A}}$ das Spektralmaß von $\widetilde{A}$ ist. Insbesondere ist $E_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ Orthogonalprojektion für jedes $B \in \Sigma$. Weitere Eigenschaften eines Spektralmaßes:

- $E_\emptyset = E^{\widetilde{A}}_\emptyset = 0$ und $E_\mathbb{R} = \mathbb{1}_{\sigma(\widetilde{A})}(\widetilde{A}) = I$.
- Sind $B_1, B_2, \dots \in \Sigma$ disjunkt, so sind die zugehörigen $\widetilde{B}_i$ disjunkt und daher folgt σ-Additivität aus der σ-Additivität von $E^{\widetilde{A}}$.

Sei nun $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und $h(A)$ definiert wie im Satz. Wir zeigen, dass $h(A) = (h \circ f)(\widetilde{A})$ gilt. Beachte dazu zunächst, dass für jedes messbare $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität

$$\int_\mathbb{R} g dE = \int_\mathbb{R} g \circ f dE^{\widetilde{A}} \tag{4.2}$$

gilt. Ist nämlich $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$ eine Treppenfunktion, so haben wir

$$\int_\mathbb{R} g dE = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{B_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i E^{\widetilde{A}}_{\widetilde{B}_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i E^{\widetilde{A}}_{f^{-1}(B_i)} = \int_\mathbb{R} g \circ f dE^{\widetilde{A}};$$

die Identität (4.2) folgt für beschränkte messbare g durch gleichmäßige Approximation und für messbare g durch Grenzwertbildung wie in Lemma 4.20 (falls der Grenzwert existiert). Genauso sieht man

$$\int_\mathbb{R} |g|^2 d(Ex, x) = \int_\mathbb{R} |g \circ f|^2 d(E^{\widetilde{A}}x, x) \tag{4.3}$$

für jedes messbare $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei der linke Grenzwert genau dann endlich ist, wenn der rechte endlich ist. Aus (4.2) und (4.3) mit $g = h$ folgt $\operatorname{dom} h(A) = \operatorname{dom} (h \circ f)(\widetilde{A})$ und $h(A)x = (h \circ f)(\widetilde{A})x$ für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich. Nach Proposition 4.21 ist dann $h(A)$ selbstadjungiert. Außerdem folgt für die spezielle Wahl $h(t) = \mathrm{id}(t) := t$ die Identität $\mathrm{id}(A) = f(\widetilde{A})$. Bleibt zu zeigen $f(\widetilde{A}) = A$. Für $x \in \operatorname{dom} f(\widetilde{A})$ existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(\widetilde{A})x$ und es gilt für den messbaren Funktionalkalkül $\hat{\Phi}$ von $\widetilde{A}$

$$\begin{aligned}(A - \mu)^{-1}(f(\widetilde{A}) - \mu)x &= \widetilde{A} \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{\{|f-\mu|\le n\}}(f - \mu))x \\ &= \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\mathrm{id}\mathbb{1}_{\{|f-\mu|\le n\}}(f - \mu))x \overset{\text{(c')}}{=} \hat{\Phi}(\mathbb{1})x = x.\end{aligned}$$

(Wir haben genutzt, dass $\mathrm{id}(f - \mu) = \mathbb{1}_{\sigma(A)\setminus\{0\}}$ und dass der Punkt null hier keine Rolle spielt, weil der Funktionalkalkül über das Spektralintegral ausgedrückt werden kann und $E^{\widetilde{A}}(\{0\}) = 0$, da $\widetilde{A}^{-1} = A - \mu$ existiert.) Daher folgt $x \in \operatorname{ran} (A - \mu)^{-1} = \operatorname{dom} A$ und $(A - \mu)x = (f(\widetilde{A}) - \mu)x$, somit $Ax = f(\widetilde{A})x$. $\Rightarrow$ $f(\widetilde{A}) \subset A$. Da beide Operatoren selbstadjungiert sind, folgt $f(\widetilde{A}) = A$. □

Es gelten entsprechende Varianten von Satz 4.18 und Satz 4.19 für unbeschränkte $A = A^*$.

Kapitel 5

Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren

Wieder $\mathcal{H}$ Hilbertraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$.

5.1 Relativ beschränkte Störungen

Problemstellung: Wir gehen der Frage nach, unter welchen Voraussetzungen eine additive Störung $A+V$ eines selbstadjungierten Operators A in $\mathcal{H}$ wieder selbstadjungiert ist. Zur Erinnerung: Selbstadjungiertheit von V ist hierfür nicht hinreichend. Anwendungen sind z.B. Schrödingeroperatoren $-\Delta+V$ mit Potential V. Im Eindimensionalen diskutieren wir das in Kapitel 6.

Definition 5.1. Seien A und V lineare Operatoren in $\mathcal{H}$. Dann heißt V *A-beschränkt* (oder *relativ beschränkt bzgl. A*), wenn $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} V$ gilt und $a, b \geq 0$ existieren mit

$$\|Vx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \quad \forall x \in \operatorname{dom} A.$$

Das Infimum über alle b, für die ein entsprechendes a existiert, heißt *A-Schranke von V*.

- Ist $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und A beliebig, so ist V A-beschränkt mit A-Schranke null.
- Ist V A-beschränkt mit A-Schranke b, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a_\varepsilon \geq 0$ mit

$$\|Vx\| \leq a_\varepsilon\|x\| + (b+\varepsilon)\|Ax\| \quad \forall x \in \operatorname{dom} A.$$

(Für $\varepsilon = 0$ gilt das i.A. nicht!)

- V ist genau dann A-beschränkt, wenn $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} V$ gilt und $\alpha, \beta \geq 0$ existieren mit

$$\|Vx\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + \beta\|Ax\|^2 \quad \forall x \in \operatorname{dom} A.$$

Das Infimum über alle $\sqrt{\beta}$, für die ein solches α existiert, stimmt mit der A-Schranke von V überein. (Beweis: Übung.)

Proposition 5.2. *Sei $A = A^*$ in $\mathcal{H}$ und V ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit* $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} V$. *Setze*

$$c_{\pm} := \limsup_{\eta \to \pm\infty} \left\| V(A - i\eta)^{-1} \right\|$$

(hier $\|V(A - i\eta)^{-1}\| = \infty$, falls $V(A - i\eta)^{-1}$ unbeschränkt ist). Dann

$$V \text{ } A\text{-beschränkt} \iff c_+ < \infty \iff c_- < \infty.$$

In diesem Fall $c_+ = c_-$, diese Zahl stimmt mit der A-Schranke von V überein und der lim sup *ist sogar ein* lim.

Beweis. **Schritt 1.** Sei V A-beschränkt, d.h. es existieren $a, b > 0$ mit $\|Vx\|^2 \leq a^2\|x\|^2 + b^2\|Ax\|^2$ $\forall x \in \operatorname{dom} A$. Dann ist für $\alpha > 0$ und $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
\left\|V(A \pm i\alpha)^{-1}x\right\|^2 &\leq a^2 \left\|(A \pm i\alpha)^{-1}x\right\|^2 + b^2 \left\|A(A \pm i\alpha)^{-1}x\right\|^2 \\
&= b^2\Big(\frac{a^2}{b^2} \left\|(A \pm i\alpha)^{-1}x\right\|^2 + \left\|A(A \pm i\alpha)^{-1}x\right\|^2\Big) \\
&= b^2 \left\|\left(A \pm i\frac{a}{b}\right)(A \pm i\alpha)^{-1} x\right\|^2
\end{aligned}$$

(letzte Gleichheit: am besten letzten Term im Skalarprodukt ausschreiben und $A = A^*$ verwenden). Mit $\alpha = \frac{a}{b}$ folgt $V(A \pm i\frac{a}{b})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und

$$\left\|V\left(A \pm i\frac{a}{b}\right)^{-1}\right\| \leq b,$$

und da a hier beliebig groß gewählt werden kann, $c_{\pm} \leq b$. Da dies für alle $b \geq$ der A-Schranke von V gilt, ist $c_{\pm} \leq$ der A-Schranke, insbesondere $< \infty$.

Schritt 2. Bemerke zuerst: Ist $b > 0$ und $\alpha > 0$ mit $\|V(A \pm i\alpha)^{-1}\| \leq b$, dann gilt

$$\|Vx\| = \|V(A - i\alpha)^{-1}(A - i\alpha)x\| \leq b\|(A - i\alpha)x\| \leq b\alpha\|x\| + b\|Ax\| \tag{5.1}$$

für alle $x \in \operatorname{dom} A$.

Sei nun eine der Zahlen $c_\pm$ endlich, o.B.d.A. $c_+ < \infty$. Für jedes $b > c_+$ ist dann $\|V(A - i\alpha)^{-1}\| \leq b$ für alle hinreichend großen α und daher V A-beschränkt mit A-Schranke $\leq c_+$, siehe (5.1). Aus Schritt 1 folgt dann $c_+ \leq$ der A-Schranke von V, also stimmt c_+ mit der A-Schranke überein.

Ist $b > \liminf_{\eta \to +\infty} \|V(A - i\eta)^{-1}\|$, so existiert $\alpha > 0$ mit $\|V(A - i\alpha)^{-1}\| \leq b$ und (5.1) impliziert, dass die A-Schranke von $V \leq \liminf_{\eta \to +\infty} \|V(A - i\eta)^{-1}\|$ ist. Aus $\limsup \leq \liminf$ folgt Existenz des Limes, der dann mit c_+ übereinstimmt. Analog für c_-. □

Lemma 5.3. *Seien $A = A^*$ in $\mathcal{H}$ und V ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit* $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} V$. *Gilt $\|V(A - \lambda)^{-1}\| < 1$ für ein $\lambda \in \rho(A)$, so ist $A + V$ abgeschlossen und $\lambda \in \rho(A + V)$.*

Beweis. Aufgrund der Voraussetzungen ist $V(A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\|V(A - \lambda)^{-1}\| < 1$. Nach dem Satz von der Neumannschen Reihe ist $I + V(A - \lambda)^{-1}$ invertierbar und $(I + V(A - \lambda)^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, somit

$$A + V - \lambda = (I + V(A - \lambda)^{-1})(A - \lambda)$$

invertierbar und

$$(A + V - \lambda)^{-1} = (A - \lambda)^{-1}\big(I + V(A - \lambda)^{-1}\big)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Daher ist $A + V$ abgeschlossen und $\lambda \in \rho(A + V)$. □

Satz 5.4 (Rellich 1939, Kato 1951)**.** *Sei A ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ und V symmetrisch und A-beschränkt mit A-Schranke < 1.*

(i) *Ist $A = A^*$, so ist $(A + V) = (A + V)^*$.*

(ii) *Ist $\overline{A} = A^*$, so ist $\overline{(A + V)} = (A + V)^*$.*

Beweis. (i) Klarerweise ist $A + V$ symmetrisch. Selbstadjungiertheit: Nach Proposition 5.2 kann $\eta < 0$ so gewählt werden, dass $\|V(A \pm i\eta)^{-1}\| < 1$. Mit Lemma 5.3 ist $A + V$ abgeschlossen und $\mp i\eta \in \rho(A + V)$ für jedes solche η und daher $A + V$ selbstadjungiert nach Satz 3.10.

(ii) V ist symmetrisch, also abschließbar. Wir zeigen, dass $\overline{V}$ $\overline{A}$-beschränkt ist mit derselben Schranke: Sei $x \in \operatorname{dom}\overline{A}$ und $(x_n)_n \subset \operatorname{dom} A$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to \overline{A}x$. Wegen der A-Beschränktheit von V ist dann $(Vx_n)_n$ Cauchyfolge und konvergiert. Also $x \in \operatorname{dom}\overline{V}$ und $Vx_n \to \overline{V}x$. Daher

$$\|\overline{V}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Vx_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \big(a\|x_n\| + b\|Ax_n\|\big) = a\|x\| + b\|\overline{A}x\|$$

für gewisse $a > 0$, $b \in (0,1)$ (und $\operatorname{dom}\overline{A} \subset \operatorname{dom}\overline{V}$). Das zeigt die Relativbeschränktheit mit derselben Schranke. Aus (i) folgt nun $\overline{A}+\overline{V} = (\overline{A}+\overline{V})^*$. Bleibt zu zeigen $\overline{A}+\overline{V} = \overline{A+V}$. Da $\overline{A}+\overline{V}$ abgeschlossen ist und $A+V$ enthält, ist "$\supset$" klar. Für die Umkehrung sei $x \in \operatorname{dom}\overline{A} = \operatorname{dom}(\overline{A}+\overline{V})$ und $(x_n)_n \subset \operatorname{dom} A$ mit $x_n \to x$ und $(A+V)x_n \to (\overline{A}+\overline{V})x$ wie oben. Dann $x \in \operatorname{dom}\overline{A+V}$ und $(\overline{A+V})x = \overline{A}x + \overline{V}x$. □

Es gilt folgende Verschärfung von (ii) (hier ohne Beweis, siehe z.B. [Wei, Satz 9.5]):

Satz 5.5 (Wüst 1971)**.** *Sei $\overline{A} = A^*$ in $\mathcal{H}$ und V symmetrisch mit $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} V$. Existiert ein $a \geq 0$ mit $\|Vx\| \leq a\|x\| + \|Ax\|$ für alle $x \in \operatorname{dom} A$, so ist $\overline{A+V} = (A+V)^*$.*

Achtung: Die Bedingung in Satz 5.5 ist **nicht** äquivalent zu

"V ist A-beschränkt mit A-Schranke ≤ 1".

Letzteres reicht i.A. nicht aus; vgl. auch die Übungen.

Definition 5.6. $A = A^*$ in $\mathcal{H}$ heißt *halbbeschränkt nach unten*, falls ein $\gamma \in \mathbb{R}$ (nicht notwendig ≥ 0) existiert mit

$$(Ax, x) \geq \gamma\|x\|^2 \quad \forall x \in \operatorname{dom} A.$$

Jedes solche γ heißt *untere Schranke* für A und wir schreiben $A \geq \gamma$.

Lemma 5.7. *Sei $A = A^*$ in $\mathcal{H}$. Dann gilt*

$$A \geq \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma(A) \subset [\gamma, +\infty).$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Übungen (leicht).

"$\Leftarrow$": Für alle $x \in \operatorname{dom} A$ gilt

$$((A-\gamma)x, x) = \int_{\mathbb{R}} (t-\gamma)\, d(E(t)x, x) \overset{\text{Satz 4.18 (i)}}{=} \int_{\gamma}^{\infty} (t-\gamma)\, d(E(t)x, x) \geq 0,$$

da Integrand ≥ 0. □

Satz 5.8. *Sei $A = A^*$ in $\mathcal{H}$ halbbeschränkt nach unten, $A \geq \gamma_A$. Sei V symmetrisch und A-beschränkt mit A-Schranke < 1, d.h. es existieren $a > 0$ und $b \in (0,1)$ mit*

$$\|Vx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \quad \forall x \in \operatorname{dom} A.$$

Dann ist $A+V$ halbbeschränkt nach unten und

$$\gamma := \gamma_A - \max\left\{\frac{a}{1-b}, a + b|\gamma_A|\right\}$$

ist eine untere Schranke für $A+V$.

Beweis. Nach Lemma 5.7 ist zu zeigen $(-\infty, \gamma) \subset \rho(A+V)$. Wir zeigen zunächst $\|V(A-\lambda)^{-1}\| < 1$ für alle $\lambda < \gamma (\leq \gamma_A)$. In der Tat,

$$\left\|V(A-\lambda)^{-1}x\right\| \leq a\left\|(A-\lambda)^{-1}x\right\| + b\left\|A(A-\lambda)^{-1}x\right\|$$

und daher

$$\begin{aligned}
\left\|V(A-\lambda)^{-1}\right\| &\leq a\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| + b\left\|A(A-\lambda)^{-1}\right\| \\
&= a\left\|\int_{\gamma_A}^{\infty} \frac{1}{t-\lambda} dE(t)\right\| + b\left\|\int_{\gamma_A}^{\infty} \frac{t}{t-\lambda} dE(t)\right\| \\
&\leq a \sup\left\{\frac{1}{t-\lambda} : t \geq \gamma_A\right\} + b \sup\left\{\frac{|t|}{t-\lambda} : t \geq \gamma_A\right\} \\
&= a\frac{1}{\gamma_A - \lambda} + b\max\left\{\frac{|\gamma_A|}{\gamma_A-\lambda}, 1\right\}
\end{aligned}$$

(Kurvendiskussion). Somit

$$\left\|V(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq \max\left\{\frac{a}{\gamma_A-\lambda} + b, \frac{a}{\gamma_A-\lambda} + b\frac{|\gamma_A|}{\gamma_A-\lambda}\right\}.$$

Da $\lambda < \gamma = \gamma_A - \max\{\frac{a}{1-b}, a + b|\gamma_A|\}$, ist $\lambda < \gamma_A - \frac{a}{1-b}$, also $\frac{a}{\gamma_A-\lambda} + b < 1$. Andererseits auch $\lambda < \gamma_A - (a + b|\gamma_A|)$, also $\frac{a+b|\gamma_A|}{\gamma_A-\lambda} < 1$. Insgesamt folgt $\|V(A-\lambda)^{-1}\| < 1$. Mit Lemma 5.3 folgt daraus $\lambda \in \rho(A+V)$. □

5.2 Kompakte und endlichdimensionale Störungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, inwiefern Störungen das Spektrum verändern bzw. welche Teile des Spektrums sie unverändert lassen.

Definition 5.9. Sei $A = A^*$ in $\mathcal{H}$. Das *diskrete Spektrum* von A ist definiert als

$$\sigma_{\mathrm{d}}(A) := \big\{\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) : \dim\ker(A-\lambda) < \infty \text{ und } \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}\big\}.$$

Das *wesentliche Spektrum* (auch: *essentielle Spektrum*) von A ist

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_{\mathrm{d}}(A).$$

Also besteht $\sigma_{\mathrm{d}}(A)$ aus den isolierten Eigenwerten mit endlichen Vielfachheiten und $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ aus den Eigenwerten unendlicher Vielfachheit und den Häufungspunkten des Spektrums. Insbesondere $\sigma_{\mathrm{c}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.

Erinnerung I: Eine Folge $(x_n)_n \subset \mathcal{H}$ heißt *schwach konvergent* gegen $x \in \mathcal{H}$ ($x_n \rightharpoonup x$), wenn $(x_n, y) \to (x, y)$ für alle $y \in \mathcal{H}$. (Beispiel: Mit der Besselschen Ungleichung zeigt man, dass jedes abzählbare ONS schwach gegen null konvergiert, wenn $\dim\mathcal{H} = \infty$.)

Erinnerung II: Ein Operator $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *kompakt* (Symbol: $K \in \mathfrak{S}_\infty$), falls er beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet. Äquivalent: Für jede beschränkte Folge $(x_n)_n \subset \mathcal{H}$ hat die Folge $(Kx_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Auch äquivalent: $x_n \rightharpoonup x$ impliziert $Kx_n \to Kx$. Nicht äquivalent, jedoch auch wichtig: Ist $\dim\operatorname{ran} K < \infty$, so ist K kompakt. Und noch etwas: Ist $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und K kompakt, so sind BK und KB kompakt.

Proposition 5.10. *Es sei $A = A^*$ in $\mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent*

(i) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$*;*

(ii) $\exists (x_n)_n \subset \operatorname{dom} A$ *mit* $\|x_n\| = 1$, $x_n \rightharpoonup 0$ *und* $(A-\lambda)x_n \to 0$ *(*singuläre Folge*);*

(iii) $\dim\operatorname{ran} E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} = \infty$ *für alle* $\varepsilon > 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Falls $\dim\ker(A-\lambda) = \infty$, wähle $(x_n)_n$ als orthonormale Folge in $\ker(A-\lambda)$. Ist λ Häufungspunkt von $\sigma(A)$, so wähle $(\lambda_n)_n \subset \sigma(A)$ mit $\lambda_n \to \lambda$ und $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$. Wähle ε_n so, dass

$$(\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n) \cap (\lambda_m - \varepsilon_m, \lambda_m + \varepsilon_m) = \emptyset, \quad m \neq n.$$

Dann ist $E_{(\lambda_n-\varepsilon_n,\lambda_n+\varepsilon_n)} \neq 0$ und daher gibt es $x_n \in \operatorname{ran} E_{(\lambda_n-\varepsilon_n,\lambda_n+\varepsilon_n)}$ mit $\|x_n\| = 1$. Dann ist $x_n \perp x_m$ für $n \neq m$, (insbesondere $x_n \rightharpoonup 0$) und außerdem $x_n \in \operatorname{dom} A$, da

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^2 d(E(t)x_n, x_n) = \int_{\lambda_n-\varepsilon_n}^{\lambda_n+\varepsilon_n} |t|^2 d(E(t)x_n, x_n) < \infty$$

(wegen $x_n \perp \operatorname{ran} E_{\mathbb{R}\setminus(\lambda_n-\varepsilon_n,\lambda_n+\varepsilon_n)}$); siehe Satz 4.22. Weiter

$$\begin{aligned}
\|(A-\lambda)x_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |t-\lambda|^2 d(E(t)x_n, x_n) = \int_{\lambda_n-\varepsilon_n}^{\lambda_n+\varepsilon_n} |t-\lambda|^2 d(E(t)x_n, x_n) \\
&\leq \int_{\lambda_n-\varepsilon_n}^{\lambda_n+\varepsilon_n} \big(\underbrace{|t-\lambda_n|}_{<\varepsilon_n} + |\lambda_n-\lambda|\big)^2 d(E(t)x_n, x_n) \\
&< (\varepsilon_n + |\lambda_n-\lambda|)^2 \|x_n\|^2 \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen, $\dim \operatorname{ran} E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist $E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}$ kompakt, d.h. $x_n \rightharpoonup 0$ impliziert $E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}x_n \to 0$. Daher

$$\begin{aligned}
\|(A-\lambda)x_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |t-\lambda|^2 d(E(t)x_n, x_n) \geq \int_{\mathbb{R}\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} |t-\lambda|^2 d(E(t)x_n, x_n) \\
&\geq \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(t) d(E(t)x_n, x_n) \\
&= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \big(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t) - \mathbb{1}_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(t)\big) d(E(t)x_n, x_n) \\
&= \varepsilon^2 \big(\|x_n\|^2 - \|E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}x_n\|^2\big) \to \varepsilon^2 \neq 0,
\end{aligned}$$

Widerspruch.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Übung (leicht). □

Lemma 5.11. *Sei $A = A^*$ in $\mathcal{H}$ und $\mu \in \rho(A)$. Dann gilt für $\lambda \neq \mu$: $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ genau dann, wenn eine Folgen $(x_n)_n \subset \mathcal{H}$ existiert mit $x_n \rightharpoonup 0$, $\|x_n\| = 1$ und*

$$\big((A-\mu)^{-1} - (\lambda-\mu)^{-1}\big)x_n \to 0.$$

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Wie im Beweis von Proposition 5.10 existiert eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in \operatorname{ran} E_{(\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n})}$, $\|x_n\| = 1$, so dass $x_n \perp x_m$ für $n \neq m$ und somit $x_n \rightharpoonup 0$. Setze

$$c := \inf\{|t-\mu||\lambda-\mu| : t \in \sigma(A)\}.$$

Dann $c > 0$, da $\mu \in \rho(A)$, und

$$\begin{aligned}\left\|\left((A-\mu)^{-1} - \frac{1}{\lambda-\mu}\right) x_n\right\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{t-\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu}\right|^2 d(E(t)x_n, x_n) \\ &= \int_{(\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n})} \left|\frac{\lambda-t}{(t-\mu)(\lambda-\mu)}\right|^2 d(E(t)x_n, x_n) \\ &\le \frac{1}{c^2 n^2}\|x_n\|^2 \to 0.\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(A)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $\dim \operatorname{ran} E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} < \infty$, insbesondere $E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}$ kompakt. Ist $(x_n)_n \subset \mathcal{H}$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup 0$ und $\|x_n\| = 1$, so gilt

$$\|x_n\|^2 - \left\|E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} x_n\right\|^2 \to 1$$

und daher

$$\begin{aligned}&\left\|\left((A-\mu)^{-1} - \frac{1}{\lambda-\mu}\right) x_n\right\|^2 \\ &\quad\ge \int_{\mathbb{R}\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} \left|\frac{1}{t-\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu}\right|^2 d(E(t)x_n, x_n) \\ &\quad\ge \inf_{t\in\sigma(A)\cap(\mathbb{R}\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))} \left|\frac{\lambda-t}{(t-\mu)(\lambda-\mu)}\right|^2 \left(\|x_n\|^2 - \left\|E_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} x_n\right\|^2\right) \\ &\quad\to \inf_{t\in\sigma(A)\cap(\mathbb{R}\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))} \left|\frac{\lambda-t}{(t-\mu)(\lambda-\mu)}\right|^2 > 0.\end{aligned}$$

□

Satz 5.12 (Stabilität des essentiellen Spektrums unter kompakter Störung)**.** *Seien $A = A^*$ und $B = B^*$ in $\mathcal{H}$. Es gelte*

$$(A-\mu)^{-1} - (B-\mu)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$$

für ein, und dann für alle, $\mu \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Dann ist $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B)$.

Interpretation: B spielt die Rolle des gestörten Operators (vorher $A + V$). Die Frage, ob $V := B - A$ kompakt (bzw. Einschränkung eines kompakten Operators) ist, ist für unbeschränkte A, B nicht zu beantworten, da $\operatorname{dom}(B - A) = \operatorname{dom} B \cap \operatorname{dom} A$ beliebig klein sein kann. Daher stattdessen Untersuchung der *Resolventendifferenz* $(A-\mu)^{-1} - (B-\mu)^{-1}$.

Beweis von Satz 5.12. Genügt zu zeigen $\sigma_{\text{ess}}(A) \subset \sigma_{\text{ess}}(B)$. Sei μ wie in der Voraussetzung. Zu $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ existiert nach Lemma 5.11 eine Folge $(x_n)_n \subset \mathcal{H}$ mit $x_n \rightharpoonup 0$, $\|x_n\| = 1$ und

$$\left((A-\mu)^{-1} - \frac{1}{\lambda-\mu}\right) x_n \to 0.$$

Da $(A-\mu)^{-1} - (B-\mu)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, folgt

$$\begin{aligned}\left((B-\mu)^{-1} - \frac{1}{\lambda-\mu}\right) x_n &= \left((B-\mu)^{-1} - (A-\mu)^{-1}\right) x_n \\ &\quad + \left((A-\mu)^{-1} - \frac{1}{\lambda-\mu}\right) x_n \to 0.\end{aligned}$$

Also $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(B)$ nach Lemma 5.11.

Gelte die Voraussetzung des Satzes für $\mu = \mu_1$ und sei $\mu_2 \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Dann

$$\begin{aligned}(B-\mu_2)^{-1} - (A-\mu_2)^{-1} &= \left(1 + (\mu_2-\mu_1)(A-\mu_2)^{-1}\right)\left((B-\mu_1)^{-1} - (A-\mu_1)^{-1}\right) \\ &\quad \cdot \left(1 + (\mu_2-\mu_1)(B-\mu_2)^{-1}\right) \in \mathfrak{S}_\infty\end{aligned}$$

(Beweis der Resolventenformel: selbst). □

Korollar 5.13. *Seien $A = A^*, B = B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $B - A \in \mathfrak{S}_\infty$. Dann ist*

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B).$$

Beweis. Übung/selbst. □

Korollar 5.14 (Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty$.*

(i) *Falls* $\dim \mathcal{H} < \infty$, *gilt* $\sigma_{\text{ess}}(A) = \emptyset$.

(ii) *Falls* $\dim \mathcal{H} = \infty$, *gilt* $\sigma_{\text{ess}}(A) = \{0\}$.

In jedem Fall gilt

$$Ax = \sum_{j\in J} \lambda_j (x, x_j) x_j, \quad x \in \mathcal{H},$$

wobei λ_j, $j \in J$, eine Abzählung von $\sigma_{\text{p}}(A)$ ist (die Eigenwerte werden mit Vielfachheiten gezählt) und $x_j \in \ker(A - \lambda_j)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ bilden.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen aus Korollar 5.13 mit $B = 0$. Aus dem Spektralsatz 4.16 und dem Zusammenhang zwischen Spektralmaß und Spektrum von A (Satz 4.18) erhalten wir

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathrm{d}}(A)} \lambda E(\{\lambda\}),$$

wobei $E(\{\lambda\})$ die Orthogonalprojektion auf $\ker(A - \lambda)$ ist. Bilden x_j, $j \in J$, eine ONB von $\mathcal{H}$ mit $x_j \in \ker(A - \lambda_j)$, $j \in J$, (so eine existiert, weil $\sum_{\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)} E(\{\lambda\}) = I$), so gilt

$$E(\{\lambda\})x = \sum_{x_j \in \ker(A-\lambda)} (x, x_j)x_j, \quad x \in \mathcal{H},$$

für jedes $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, woraus die Darstellung für A folgt. □

Das Spektrum eines kompakten, selbstadjungierten Operators besteht also aus isolierten Eigenwerten und null als einzigem möglichen Häufungspunkt. Null kann ein Eigenwert sein oder zum stetigen Spektrum gehören. (Wie sehen Beispiele aus?)

Satz 5.15. *Seien $A = A^*$ und $B = B^*$ in $\mathcal{H}$ mit zugehörigen Spektralmaßen E^A bzw. E^B und gelte*

$$\dim \operatorname{ran} \big((A - \mu)^{-1} - (B - \mu)^{-1}\big) = n < \infty$$

für ein, und dann für alle, $\mu \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Es sei (α, β) ein Intervall, so dass $\dim \operatorname{ran} E^A_{(\alpha,\beta)} < \infty$. *Dann ist*

$$\big|\dim \operatorname{ran} E^A_{(\alpha,\beta)} - \dim \operatorname{ran} E^B_{(\alpha,\beta)}\big| \le n.$$

Ist $(\alpha, \beta) \subset \rho(A)$, dann besteht $\sigma(B) \cap (\alpha, \beta)$ aus höchstens n Eigenwerten (gezählt mit Vielfachheiten).

(Hier ohne Beweis.)

Kapitel 6

Schrödinger-Operatoren in 1D

Wir wenden die Theorie der vorigen Kapitel auf Schrödinger-Operatoren $-\frac{d^2}{dx^2}+V$ in $L^2(\mathbb{R})$ an.

Wir setzen

$$H^2(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f, f' \text{ absolut stetig}, f'' \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

$H^2(\mathbb{R})$ heißt *Sobolevraum der Ordnung 2*. Dabei heißt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolut stetig*, falls $f|_{[a,b]}$ absolut stetig ist für jedes kompakte Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. (Alternative Definition von $H^2(\mathbb{R})$ über schwache Ableitungen ist möglich.)

Erinnerung: Für absolut stetige Funktionen siehe Beispiel 1.7; jede absolut stetige Funktion f ist fast überall differenzierbar (in diesem Sinn sind oben die Ableitungen gemeint); f erfüllt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Ebenso gilt die Regel der partiellen Integration,

$$\int_\alpha^\beta g(x) f'(x) dx = g(\beta) f(\beta) - g(\alpha) f(\alpha) - \int_\alpha^\beta g'(x) f(x) dx, \tag{6.1}$$

für jedes beschränkte Intervall $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Notiz: Jedes $f \in H^2(\mathbb{R})$ ist stetig differenzierbar, da $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und f' stetig ist.

Lemma 6.1. *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon > 0$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |f''(t)|^2 dt + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \quad \forall f \in H^2(\mathbb{R}).$$

Insbesondere ist $f' \in L^2(\mathbb{R})$ für alle $f \in H^2(\mathbb{R})$.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ beliebig, $L := L(\varepsilon) := \sqrt{\varepsilon/2} > 0$ und $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Länge L. Schreibe $(\alpha, \beta) = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ mit

$$J_1 := \Big(\alpha, \alpha + \frac{L}{3}\Big), \quad J_2 := \Big[\alpha + \frac{L}{3}, \beta - \frac{L}{3}\Big] \quad \text{und} \quad J_3 := \Big(\beta - \frac{L}{3}, \beta\Big)$$

(Drittelung). Sei $f \in H^2(\mathbb{R})$. Zu jedem Paar von Zahlen $s \in J_1$ und $t \in J_3$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $x_0 = x_0(s,t)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

woraus (wegen $t - s \geq L/3$) folgt

$$|f'(x_0)| \leq \frac{3}{L}\big(|f(s)| + |f(t)|\big).$$

Daher gilt für alle $x \in (\alpha, \beta)$ und alle $s \in J_1$, $t \in J_3$

$$|f'(x)| = \Big|f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(y)dy\Big| \leq \frac{3}{L}\big(|f(s)| + |f(t)|\big) + \int_\alpha^\beta |f''(y)|dy.$$

Integration bzgl. s über J_1 und bzgl. t über J_3 liefert

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{9}|f'(x)| &\leq \int_{J_1} |f(s)|ds + \int_{J_3} |f(t)|dt + \frac{L^2}{9}\int_\alpha^\beta |f''(y)|dy \\ &\leq \int_\alpha^\beta |f(y)|dy + \frac{L^2}{9}\int_\alpha^\beta |f''(y)|dy \qquad \forall x \in (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} |f'(x)|^2 &\leq \left(\frac{9}{L^2}\int_\alpha^\beta |f(y)|dy + \int_\alpha^\beta |f''(y)|dy\right)^2 \\ &\leq 2\frac{81}{L^4}\left(\int_\alpha^\beta |f(y)|dy\right)^2 + 2\left(\int_\alpha^\beta |f''(y)|dy\right)^2 \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} 2L\left(\frac{81}{L^4}\int_\alpha^\beta |f(y)|^2dy + \int_\alpha^\beta |f''(y)|^2dy\right) \quad \forall x \in (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Integration bzgl. x über (α, β):

$$\int_\alpha^\beta |f'(x)|^2dx \leq \frac{162}{L^2}\int_\alpha^\beta |f(y)|^2dy + 2L^2\int_\alpha^\beta |f''(y)|^2dy.$$

Zerlege nun $\mathbb{R}$ disjunkt in $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$. Dann nach Wahl von L

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |f'(x)|^2 dx \leq \frac{324}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |f''(y)|^2 dy.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung mit $C_\varepsilon := \frac{324}{\varepsilon}$. □

Lemma 6.2. *Für jedes $f \in H^2(\mathbb{R})$ gelten*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f'(x).$$

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x < c$

$$\int_x^c f(s)f'(s)ds = \frac{1}{2}\left(f(c)^2 - f(x)^2\right)$$

(Partielle Integration wie in (6.1) mit $g = f$). Für $x \to -\infty$ hat die linke Seite einen endlichen Grenzwert, da $f, f' \in L^2(\mathbb{R})$. Also existiert $\lim_{x\to-\infty} f(x)^2$. Aber wegen $f \in L^2(\mathbb{R})$ muss dieser Grenzwert dann null sein. Analog für $+\infty$ und für f' (vgl. Lemma 6.1 für $f' \in L^2(\mathbb{R})$). □

Betrachte jetzt $-\frac{d^2}{dx^2}$ als Differentialoperator in $L^2(\mathbb{R})$:

Definition 6.3. Der Operator

$$T_0 f = -f'', \quad \operatorname{dom} T_0 = C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

in $L^2(\mathbb{R})$ heißt *minimaler von $-\frac{d^2}{dx^2}$ erzeugter Differentialoperator*. Der Operator

$$Tf = -f'', \quad \operatorname{dom} T = H^2(\mathbb{R}),$$

in $L^2(\mathbb{R})$ heißt *maximaler von $-\frac{d^2}{dx^2}$ erzeugter Differentialoperator.*

Erstes Ziel: T_0 ist wesentlich selbstadjungiert und $\overline{T_0} = T$ ist selbstadjungiert.

Proposition 6.4. *Der Operator T_0 is symmetrisch und es gilt*

$$\operatorname{ran} T_0 = \left\{ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} xg(x)dx = 0 \right\}.$$

Beweis. Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$(T_0 f, f) = \int_{\mathbb{R}} (-f'')\overline{f}dx \overset{\text{part. Int.}}{=} \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 dx \in \mathbb{R},$$

somit T_0 symmetrisch.

Ist $g = T_0 f$ für ein $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, dann $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} x^j g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^j(-f''(x))dx = -\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{d^2}{dx^2}(x^j)}_{=0} f(x)dx = 0, \quad j = 0, 1.$$

Ist umgekehrt $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so dass beide Integrale verschwinden, wähle $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} g \subset (\alpha, \beta)$. Definiere

$$f(x) := -\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{t} g(s)dsdt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $-f'' = g$. Für $x \in (-\infty, \alpha]$ ist $f(x) = 0$ klar. Für $x \in [\beta, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_{-\infty}^{x} \int_{s}^{x} g(s)dtds = -\int_{-\infty}^{x} g(s) \int_{s}^{x} dtds = -\int_{\mathbb{R}} g(s)(x-s)ds \\ &= -x\int_{\mathbb{R}} g(s)ds + \int_{\mathbb{R}} sg(s)ds = 0 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung. $\Rightarrow f \in \operatorname{dom} T_0$ und $T_0 f = g$. □

Folgende Hilfsaussage geht in den Beweis von Satz 6.6 ein.

Lemma 6.5. *Seien X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $F, F_0, F_1 : X \to \mathbb{C}$ lineare (antilineare) Funktionale mit* $\ker F_0 \cap \ker F_1 \subset \ker F$. *Dann existieren $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ mit*

$$Fx = c_0 F_0 x + c_1 F_1 x \quad \forall x \in X.$$

Beweis. Setze

$$\widetilde{F} : X \to \mathbb{C}^2, \quad x \mapsto (F_0 x, F_1 x).$$

Auf $\operatorname{ran} \widetilde{F} \subset \mathbb{C}^2$ definiere $g_0(\widetilde{F}x) := Fx$. Wohldefiniert:

$$(F_0 x, F_1 x) = (F_0 x', F_1 x') \Rightarrow x - x' \in \ker F_0 \cap \ker F_1 \subset \ker F \Rightarrow Fx = Fx'.$$

g_0 auch linear (leicht). Dann hat g_0 eine lineare Fortsetzung $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ (Satz von Hahn–Banach), und damit existieren $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ mit

$$g(y_0, y_1) = c_0 y_0 + c_1 y_1 \quad \forall (y_0, y_1) \in \mathbb{C}^2,$$

also $Fx = g(\widetilde{F}x) = c_0 F_0 x + c_1 F_1 x \ \forall x \in X$. □

Satz 6.6. $\overline{T_0} = T = T^*$ *und* T *ist halbbeschränkt nach unten durch null.*

Beweis. Wir zeigen zuerst $T_0^* = T$, woraus folgt $\overline{T_0} = T^*$. Ist $g \in \operatorname{dom} T$, so gilt für alle $f \in \operatorname{dom} T_0$

$$(T_0 f, g) = \int_{\mathbb{R}} (-f'')\overline{g} dx \overset{\text{part. Int.}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\overline{(-g'')} dx = (f, Tg),$$

somit $g \in \operatorname{dom} T_0^*$ und $T_0^* g = Tg$. $\Rightarrow T \subset T_0^*$. Sei nun $g \in \operatorname{dom} T_0^*$ und

$$h(x) := -\int_c^x \int_c^t (T_0^* g)(s) ds dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann sind h, h' absolut stetig und $-h'' = T_0^* g$. Für alle $f \in \operatorname{dom} T_0$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}} g\overline{T_0 f} dx = (g, T_0 f) = (T_0^* g, f) = \int_{\mathbb{R}} (-h'')\overline{f} dx = \int_{\mathbb{R}} h\overline{(-f'')} dx = \int_{\mathbb{R}} h\overline{T_0 f} dx,$$

somit

$$\int_{\mathbb{R}} (g - h)\overline{k} dx = 0 \quad \forall k \in \operatorname{ran} T_0.$$

$\Rightarrow \operatorname{ran} T_0 \subset \ker F$ für das antilineare Funktional

$$F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \quad k \mapsto \int_{\mathbb{R}} (g - h)\overline{k} dx.$$

Andererseits ist nach Proposition 6.4 $\operatorname{ran} T_0 = \ker F_0 \cap \ker F_1$ ($g \in \operatorname{ran} T_0 \Leftrightarrow \overline{g} \in \operatorname{ran} T_0$), wobei

$$F_j : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \quad k \mapsto \int_{\mathbb{R}} x^j \overline{k(x)} dx, \quad j = 0, 1.$$

Nach Lemma 6.5 existieren $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ mit

$$Fk = c_0F_0k + c_1F_1k = \int_{\mathbb{R}} \left(c_0\overline{k(x)} + c_1x\overline{k(x)}\right)dx \quad \forall k \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Daher

$$\int_{\mathbb{R}} \left(g(x) - h(x) - c_0 - c_1x\right)\overline{k(x)}dx = 0 \quad \forall k \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Da $x \mapsto g(x)-h(x)-c_0-c_1x$ lokal integrierbar ist, folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung $g(x) = h(x)+c_0+c_1x$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere sind g und g' absolut stetig, $g \in L^2(\mathbb{R})$ nach Wahl und $-g'' = -h'' = T_0^*g \in L^2(\mathbb{R})$, daher $g \in \operatorname{dom} T$. $\Rightarrow T_0^* = T$.

Es genügt noch zu zeigen, dass T symmetrisch ist; dann folgt $T^* = \overline{T_0} \subset T_0^* = T \subset T^*$, also $T = T^*$. In der Tat gilt für $f \in \operatorname{dom} T$ mit partieller Integration

$$(Tf, f) = \int_{\mathbb{R}} (-f'')\overline{f}dx = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2dx \in \mathbb{R},$$

da die Randterme nach Lemma 6.2 verschwinden. Da die rechte Seite nichtnegativ ist, folgt auch $T \geq 0$. □

Wir addieren jetzt eine reellwertige Funktion (ein *Potential*) $V \in L^2(\mathbb{R})$ dazu und betrachten den *Differentialausdruck* $-\frac{d^2}{dx^2} + V$.

Zweites Ziel: Zeige, dass $-\frac{d^2}{dx^2}+V$ mit $H^2(\mathbb{R})$ als Definitionsbereich einen selbstadjungierten Operator in $L^2(\mathbb{R})$ bildet.

Definition 6.7. Es sei $V \in L^2(\mathbb{R})$ reellwertig. Der Operator

$$T_{0,V}f = -f'' + Vf, \quad \operatorname{dom} T_{0,V} = C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

in $L^2(\mathbb{R})$ heißt *minimaler Schrödinger-Operator mit Potential V*. Der Operator

$$T_Vf = -f'' + Vf, \quad \operatorname{dom} T_V = H^2(\mathbb{R}),$$

in $L^2(\mathbb{R})$ heißt *maximaler Schrödinger-Operator mit Potential V*.

Satz 6.8. $\overline{T_{0,V}} = T_V = T_V^*$ *und* T_V *ist halbbeschränkt nach unten.*

Beweis. Wir verwenden den Satz 5.5 von Kato–Rellich. Betrachte dazu den Multiplikationsoperator

$$M_V f = V f, \quad \operatorname{dom} M_V = \big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : V f \in L^2(\mathbb{R}) \big\}$$

in $L^2(\mathbb{R})$. M_V ist selbstadjungiert (vgl. Übungen) und für $f \in H^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |Vf|^2 dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|V\|^2 \|f\|_\infty^2 \tag{6.2}$$

($\|\cdot\|$ wieder Norm in $L^2(\mathbb{R})$). Weiter existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)} &\overset{\text{Lemma 6.2}}{=} \int_{-\infty}^{x} \big(f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)}\big) dt \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)||f'(t)| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \\ &\overset{\text{Lemma 6.1}}{\leq} (1 + C_\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |f''(t)|^2 dt \qquad \forall f \in H^2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

wobei wir $2ab \leq a^2 + b^2$ für $a, b \geq 0$ benutzt haben. Zusammen mit (6.2) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} |Vf|^2 dx \leq \|V\|^2 (1 + C_\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt + \varepsilon \|V\|^2 \int_{\mathbb{R}} |f''(t)|^2 dt \qquad \forall f \in H^2(\mathbb{R}).$$

Konsequenzen: $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} M_V$ und zu jedem $b > 0$ existiert $a > 0$ mit

$$\|M_V f\| \leq a\|f\| + b\|Tf\| \quad \forall f \in \operatorname{dom} T.$$

(Natürlich erst recht, wenn man T durch T_0 und $\operatorname{dom} T$ durch $\operatorname{dom} T_0$ ersetzt.) Also ist M_V T-beschränkt (und T_0-beschränkt) mit Schranke null. Mit Kato–Rellich ist $T_{0,V} = T_0 + M_V$ wesentlich selbstadjungiert und $T_V = T + M_V$ selbstadjungiert. Da $T_{0,V} \subset T_V$, folgt auch $\overline{T_{0,V}} = T_V$. Nach Satz 5.5 ist T_V halbbeschränkt nach unten. $\square$

Drittes Ziel: Sammle Informationen über das Spektrum von T und T_V.

Satz 6.9. *$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{c}}(T) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T) = [0, \infty)$; T hat keine Eigenwerte.*

Beweis. Da $T \geq 0$ nach Satz 6.6 liefert Lemma 5.7 $\sigma(T) \subset [0, \infty)$. Wähle eine Hilfsfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ setze weiter $\varphi_m(x) := \varphi(|x| - m)$, $x \in \mathbb{R}$ (C^∞-Buckelfunktionen mit Buckel – und Träger – in $(-m-1, m+1)$). Ist $\lambda \geq 0$, definiere

$$f_m(x) := \frac{1}{\sqrt{2m}} \varphi_m(x) e^{i\sqrt{\lambda}x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann $f_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \operatorname{dom} T$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_m(x)|^2 dx &= \frac{1}{2m} \left(\int_{-\infty}^0 |\varphi(-x-m)|^2 dx + \int_0^\infty |\varphi(x-m)|^2 dx \right) \\ &\overset{\text{Substitution}}{=} \frac{1}{m} \int_{-m}^\infty |\varphi(t)|^2 dt = 1 + \frac{1}{m} \int_0^1 |\varphi(t)|^2 dt \to 1, \quad m \to \infty. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$-f_m''(x) - \lambda f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \big(-\varphi''(|x| - m) - 2i\sqrt{\lambda} \operatorname{sgn}(x) \varphi'(|x| - m) \big) e^{i\sqrt{\lambda}x},$$

und da $\operatorname{supp} \varphi', \operatorname{supp} \varphi'' \subset [0, 1]$, folgt mit $I_m := (-m-1, -m) \cup (m, m+1)$

$$\begin{aligned} \|Tf_m - \lambda f_m\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \big| - f_m''(x) - \lambda f_m(x) \big|^2 dx \\ &= \frac{1}{2m} \int_{I_m} \big| \varphi''(|x| - m) + 2i\sqrt{\lambda} \operatorname{sgn}(x) \varphi'(|x| - m) \big|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{m} \Big(\|\varphi''\|_\infty + 2\sqrt{\lambda} \|\varphi'\|_\infty \Big)^2 \to 0, \quad m \to \infty. \end{aligned}$$

Daher ist $(T - \lambda)^{-1}$ unbeschränkt (falls es existiert), also $\lambda \in \sigma(T)$; vgl. Proposition 3.11 (ii). $\Rightarrow \sigma(T) = [0, \infty)$.

Wir zeigen noch, dass T keine Eigenwerte hat. Angenommen, $-f'' = \lambda f$ für ein $\lambda \geq 0$ und ein $f \in H^2(\mathbb{R})$. Dann ist $f(x) = a \sin(\sqrt{\lambda}x) + b \cos(\sqrt{\lambda}x)$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, und das liegt nur in $L^2(\mathbb{R})$, wenn $a = b = 0$ (Periodizität). $\square$

Satz 6.10. *Für* $V \in L^2(\mathbb{R})$ *gilt* $\sigma_{\text{ess}}(T_V) = [0, \infty)$.

Beweis. Wir nutzen die Tatsache, dass die Resolvente von T explizit angegeben werden kann, und zwar (für $\lambda < 0$) via

$$\big((T-\lambda)^{-1}g\big)(x) = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{-\lambda}|x-y|} g(y)dy, \quad g \in L^2(\mathbb{R}),$$

(Übung). Daher ist

$$V(x)\big((T-\lambda)^{-1}g\big)(x) = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \int_{\mathbb{R}} V(x) e^{-\sqrt{-\lambda}|x-y|} g(y)dy, \quad g \in L^2(\mathbb{R}),$$

also $M_V(T-\lambda)^{-1}$ Integraloperator mit Integralkern $k(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} V(x) e^{-\sqrt{-\lambda}|x-y|}$. Wegen $V \in L^2(\mathbb{R})$ ist $k \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und daher $M_V(T-\lambda)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. Ist $\lambda < 0$ hinreichend klein, so ist nach Satz 6.8 $\lambda \in \rho(T_V)$ und es gilt

$$\begin{aligned}(T_V - \lambda)^{-1} M_V (T-\lambda)^{-1} &= (T + M_V - \lambda)^{-1}\big(T + M_V - \lambda - (T-\lambda)\big)(T-\lambda)^{-1} \\ &= (T-\lambda)^{-1} - (T_V - \lambda)^{-1}.\end{aligned}$$

Da die linke Seite kompakt ist, folgt dasselbe für die rechte und Satz 5.12 impliziert $\sigma_{\text{ess}}(T_V) = \sigma_{\text{ess}}(T) = [0, \infty)$ mit Satz 6.9. □

Achtung! In diesem Beispiel betrachten wir $T + M_V$ als additive Störung von T. Diese Störung, also der Operator M_V selbst, ist nicht kompakt, trotzdem folgt Kompaktheit der Resolventendifferenz. Das zeigt die sehr allgemeine Anwendbarkeit von Satz 5.12.

Kapitel 7

Halbbeschränkte Sesquilinearformen und selbstadjungierte Operatoren

In der Praxis ist es oft schwierig die Identität $A = A^*$ direkt nachzurechnen. Die Darstellungstheorie für halbbeschränkte, abgeschlossene Sesquilinearformen ist dazu ein wichtiges Hilfsmittel. Die Standardreferenz hierzu ist [K, Chapter VI].

Wieder $\mathcal{H}$ Hilbertraum über $\mathbb{C}$ mit Norm $\|\cdot\|$ und Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$.

Definition 7.1. Eine Abbildung $\mathfrak{t} : \operatorname{dom}\mathfrak{t} \times \operatorname{dom}\mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ heißt *Sesquilinearform* (kurz: *Form*), falls $\operatorname{dom}\mathfrak{t}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist, $u \mapsto \mathfrak{t}[u,v]$ für jedes $v \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}$ linear ist und $v \mapsto \mathfrak{t}[u,v]$ für jedes $u \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}$ antilinear ist. Die Abbildung $\operatorname{dom}\mathfrak{t} \ni u \mapsto \mathfrak{t}[u] := \mathfrak{t}[u,u]$ heißt zugehörige *quadratische Form*. Eine Form $\mathfrak{t}$ heißt

- *dicht definiert*, falls $\operatorname{dom}\mathfrak{t}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist;
- *symmetrisch*, falls $\mathfrak{t}[u,v] = \overline{\mathfrak{t}[v,u]}$ $\forall u,v \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}$;
- *halbbeschränkt nach unten*, falls $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert mit

  $$\mathfrak{t}[u] \geq \gamma\|u\|^2 \quad \forall u \in \operatorname{dom}\mathfrak{t};$$

  wir schreiben $\mathfrak{t} \geq \gamma$;
- *nichtnegativ*, falls $\mathfrak{t} \geq 0$.

Ist $\mathfrak{t}$ eine Form und $\alpha \in \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$(\mathfrak{t}+\alpha)[u,v] := \mathfrak{t}[u,v] + \alpha(u,v), \quad \operatorname{dom}(\mathfrak{t}+\alpha) := \operatorname{dom}\mathfrak{t}.$$

Wir schreiben $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}'$, falls

$$\operatorname{dom}\mathfrak{t} \subset \operatorname{dom}\mathfrak{t}' \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{t}[u,v] = \mathfrak{t}'[u,v] \quad \forall u,v \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}$$

und $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$, falls $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}'$ und $\mathfrak{t}' \subset \mathfrak{t}$.

Wir halten eine triviale, aber wichtige Aussage fest:

Lemma 7.2. *Ist* $\mathfrak{t}$ *eine symmetrische, nach unten halbbeschränkte Form in* $\mathcal{H}$ *mit* $\mathfrak{t} \geq \gamma$*, dann ist* $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{t}} := \mathfrak{t} - \gamma + 1$ *ein Skalarprodukt auf* $\operatorname{dom}\mathfrak{t}$ *und damit*

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{t}} := (\operatorname{dom}\mathfrak{t}, (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{t}})$$

ein Prä-Hilbertraum (= Vektorraum mit Skalarprodukt).

Aufpassen: Natürlich ist γ durch die Eigenschaft $\mathfrak{t} \geq \gamma$ nicht eindeutig bestimmt; hat man ein solches γ, so tut es auch jede kleinere reelle Zahl. Die Definition von $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{t}}$ hängt damit auch von γ ab, aber man kann sich leicht überzeugen, dass jedes γ' mit $\mathfrak{t} \geq \gamma'$ ein Skalarprodukt produziert, dessen zugehörige Norm äquivalent zur oben definierten ist. Deshalb legen wir keinen Wert auf die exakte Wahl von γ.

Die zu $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{t}}$ zugehörige Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{\mathfrak{t}}$, d.h.

$$\|u\|_{\mathfrak{t}}^2 = \|u\|^2 + (\mathfrak{t} - \gamma)[u] \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}.$$

Insbesondere $\|u\| \leq \|u\|_{\mathfrak{t}}$ $\forall u \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$.

Definition 7.3. Eine symmetrische, nach unten halbbeschränkte Form $\mathfrak{t}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ ein Hilbertraum ist.

Definition 7.4. Es sei $\mathfrak{t}$ eine symmetrische, nach unten halbbeschränkte, abgeschlossene Form in $\mathcal{H}$. Ein Untervektorraum $D \subset \operatorname{dom}\mathfrak{t}$ heißt *determinierender Bereich* (englisch: *core*) für $\mathfrak{t}$, falls D dicht in $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ ist.

Lemma 7.5. *Seien* $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'$ *symmetrische, nach unten halbbeschränkte, abgeschlossene Formen in* $\mathcal{H}$ *und sei* D *ein determinierender Bereich sowohl für* $\mathfrak{t}$ *als auch für* $\mathfrak{t}'$ *mit*

$$\mathfrak{t}[u,v] = \mathfrak{t}'[u,v] \quad \forall u,v \in D.$$

Dann gilt $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$.

(Beweis: leicht; Übung.)

Satz 7.6 (1. Darstellungssatz)**.** *Es sei* $\mathfrak{t}$ *eine dicht definierte, symmetrische, nach unten halbbeschränkte, abgeschlossene Form in* $\mathcal{H}$*. Dann existiert ein eindeutiger selbstadjungierter Operator* T *in* $\mathcal{H}$ *mit* $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} \mathfrak{t}$ *und*

$$\mathfrak{t}[u,v] = (Tu, v) \quad \forall u \in \operatorname{dom} T, v \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}.$$

Außerdem:

(i) *Für jedes* $\gamma \in \mathbb{R}$*:* $\mathfrak{t} \geq \gamma \Longleftrightarrow T \geq \gamma$*;*

(ii) $\operatorname{dom} T$ *ist ein determinierender Bereich für* $\mathfrak{t}$*;*

(iii) *Ist* D *ein determinierender Bereich von* $\mathfrak{t}$ *und sind* $u \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}$ *und* $w \in \mathcal{H}$ *mit*

$$\mathfrak{t}[u,v] = (w,v) \quad \forall v \in D,$$

so ist $u \in \operatorname{dom} T$ *und* $Tu = w$*.*

T heißt *darstellender Operator* der Form $\mathfrak{t}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{t} \geq \gamma_{\mathfrak{t}}$. Für jedes feste $u \in \mathcal{H}$ setze

$$\ell_u[v] := (u,v), \quad v \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}.$$

Dann

$$|\ell_u[v]| \leq \|u\| \|v\| \leq \|u\| \|v\|_{\mathfrak{t}} \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$$

$\Rightarrow$ $\ell_u \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}'$ mit $\|\ell_u\| \leq \|u\|$. Nach dem Satz von Fréchet–Riesz existiert ein eindeutiges $u' \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ mit

$$(u,v) = \ell_u[v] = (u', v)_{\mathfrak{t}} \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}} \qquad \text{und} \qquad \|u'\|_{\mathfrak{t}} = \|\ell_u\| \leq \|u\|.$$

Wir definieren

$$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}, \quad Au := u', \quad u \in \mathcal{H}.$$

Dann

$$\|Au\| = \|u'\| \leq \|u'\|_{\mathfrak{t}} \leq \|u\| \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

und natürlich auch $\|Au\|_{\mathfrak{t}} = \|u'\|_{\mathfrak{t}} \le \|u\| \ \forall u \in \mathcal{H}$. Also ist A beschränkt als Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$, aber auch als Operator in $\mathcal{H}$. Weiter

$$(u, v) = (u', v)_{\mathfrak{t}} = (Au, v)_{\mathfrak{t}} = (\mathfrak{t} - \gamma_{\mathfrak{t}} + 1)[Au, v] \quad \forall u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}. \tag{7.1}$$

Daher

$$\mathfrak{t}[Au, v] = \big(u - (1 - \gamma_{\mathfrak{t}})Au, v\big) \quad \forall u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}. \tag{7.2}$$

A ist injektiv, denn $Au = 0$ impliziert mit (7.1) $(u, v) = 0 \ \forall v \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$; da $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt $u = 0$. $\Rightarrow$ $A^{-1} : \mathcal{H}_{\mathfrak{t}} \supset \operatorname{ran} A \to \mathcal{H}$ existiert. Für $u \in \mathcal{H}$ setze $w := Au$, d.h. $u = A^{-1}w$. Dann liefert (7.2)

$$\mathfrak{t}[w, v] = \big((A^{-1} + \gamma_{\mathfrak{t}} - 1)w, v\big) = (Tw, v) \quad \forall v \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}, w \in \operatorname{ran} A, \tag{7.3}$$

wobei wir den Operator $T : \mathcal{H} \supset \operatorname{dom} T \to \mathcal{H}$ definieren als

$$Tw := (A^{-1} + \gamma_{\mathfrak{t}} - 1)w, \quad \operatorname{dom} T := \operatorname{ran} A.$$

$T = T^*$: T ist symmetrisch wegen (7.3) und der Symmetrie von $\mathfrak{t}$. Außerdem ist $(T - \gamma_{\mathfrak{t}} + 1)^{-1} = A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, also T abgeschlossen und $\gamma_{\mathfrak{t}} - 1 \in \rho(T)$. Da $\rho(T)$ offen ist, existiert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\lambda, \overline{\lambda} \in \rho(T)$; nach Satz 3.10 ist also $T = T^*$.

(ii) Es ist zu zeigen, dass $\operatorname{dom} T = \operatorname{ran} A$ dicht in $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ ist. In der Tat, jedes $v \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ mit $v \perp \operatorname{ran} A$ in $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ erfüllt

$$0 = (Au, v)_{\mathfrak{t}} = (u, v) \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

somit $v = 0$.

(i) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\mathfrak{t} \ge \gamma$. Dann gilt

$$(Tu, u) = \mathfrak{t}[u] \ge \gamma \|u\|^2 \quad \forall u \in \operatorname{dom} T,$$

also ist $T \ge \gamma$. Ist umgekehrt $T \ge \gamma$, dann

$$\mathfrak{t}[u] = (Tu, u) \ge \gamma \|u\|^2 \quad \forall u \in \operatorname{dom} T.$$

Da $\operatorname{dom} T$ nach (ii) dicht in $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ ist, folgt durch Approximation $\mathfrak{t}[u] \ge \gamma \|u\|^2 \ \forall u \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}$ (Details: Übung).

(iii) Seien D determinierender Bereich von $\mathfrak{t}$, $u \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}$ und $w \in \mathcal{H}$ mit

$$\mathfrak{t}[u, v] = (w, v) \quad \forall v \in D,$$

woraus folgt

$$(u, v)_{\mathfrak{t}} = (w, v) + (1 - \gamma_{\mathfrak{t}})(u, v) \quad \forall v \in D. \tag{7.4}$$

Da D determinierender Bereich von $\mathfrak{t}$ ist, ist D dicht in $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$; außerdem impliziert Konvergenz in $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$ Konvergenz in $\mathcal{H}$, da $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathfrak{t}}$ auf $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}}$. Deshalb folgt durch Approximation die Gültigkeit von (7.4) für alle $v \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}} = \operatorname{dom} \mathfrak{t}$ und somit

$$\mathfrak{t}[u, v] = (w, v) \quad \forall v \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}. \tag{7.5}$$

Für $v \in \operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} \mathfrak{t}$ folgt

$$(w, v) = \mathfrak{t}[u, v] = \overline{\mathfrak{t}[v, u]} = \overline{(Tv, u)} = (u, Tv).$$

Damit $u \in \operatorname{dom} T^* = \operatorname{dom} T$ und $Tu = T^*u = w$.

Eindeutigkeit von T: Sei T' ein weiterer selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ mit

$$\mathfrak{t}[u, v] = (T'u, v) \quad \forall u \in \operatorname{dom} T', v \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}.$$

Dann $T' \subset T$, denn für jedes $u \in \operatorname{dom} T'$ und $w := T'u$ liefert (iii) $u \in \operatorname{dom} T$ und $Tu = w = T'u$. Es folgt

$$T' \subset T = T^* \subset (T')^* = T',$$

somit $T = T'$. □

Bemerkung. Nach dem vorigen Satz erzeugt jede abgeschlossene, dicht definierte, halbbeschränkte Form einen selbstadjungierten Operator. Die Umkehrung gilt aber auch: Ist $T = T^* \geq \gamma$ in $\mathcal{H}$ und setzt man

$$\mathfrak{t}_0[u, v] := (Tu, v), \quad \operatorname{dom} \mathfrak{t}_0 = \operatorname{dom} T,$$

so ist $\mathfrak{t}_0$ eine dicht definierte, halbbeschränkte Form, allerdings i.A. nicht abgeschlossen. Die Vervollständigung von $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}_0}$ führt aber zu einer abgeschlossenen, halbbeschränkten Form $\mathfrak{t}$ in $\mathcal{H}$, deren darstellender Operator mit T übereinstimmt. Es gibt also eine 1:1-Korrespondenz zwischen selbstadjungierten, halbbeschränkten Operatoren und abgeschlossenen, halbbeschränkten, dicht definierten Formen.

Ist $T = T^* \geq 0$, so kann man (z.B. über den Funktionalkalkül aus Kapitel 4) eine Quadratwurzel definieren,

$$T^{1/2}u = \int_0^\infty \sqrt{t} dE(t)u, \quad \operatorname{dom} T^{1/2} = \left\{ u \in \mathcal{H} : \int_0^\infty t d(E(t)u, u) < \infty \right\},$$

(Integral als Grenzwert in $\mathcal{H}$ definiert wie in Proposition 4.21). Dann ist $T^{1/2}$ selbstadjungiert und nichtnegativ mit $T^{1/2}T^{1/2} = T$ und $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} T^{1/2}$ (Übung). (Beachte zu den Definitionsbereichen:

$$\operatorname{dom} T = \operatorname{dom}(T^{1/2}T^{1/2}) = \left\{ u \in \operatorname{dom} T^{1/2} : T^{1/2}u \in \operatorname{dom} T^{1/2} \right\},$$

und das ist i.A. kleiner als $\operatorname{dom} T^{1/2}$.) Die Quadratwurzel von T steht ebenfalls in enger Beziehung zur mit T assoziierten abgeschlossenen Form:

Satz 7.7 (2. Darstellungssatz)**.** *Sei* $\mathfrak{t}$ *eine dicht definierte, symmetrische, nichtnegative, abgeschlossene Form in* $\mathcal{H}$ *mit darstellendem Operator* $T = T^* \geq 0$. *Dann gilt* $\operatorname{dom} T^{1/2} = \operatorname{dom} \mathfrak{t}$ *und*

$$\mathfrak{t}[u, v] = (T^{1/2}u, T^{1/2}v) \quad \forall u, v \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}.$$

Beweis. Wir definieren

$$\mathfrak{t}'[u, v] := (T^{1/2}u, T^{1/2}v), \quad \operatorname{dom} \mathfrak{t}' := \operatorname{dom} T^{1/2},$$

und zeigen $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$. Zunächst ist $\mathfrak{t}'$ symmetrisch, dicht definiert und nichtnegativ, und aus der Abgeschlossenheit von $T^{1/2}$ folgt, dass $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}'}$ vollständig ist, also $\mathfrak{t}'$ abgeschlossen; vgl. Lemma 1.2. Außerdem gilt

$$\mathfrak{t}'[u, v] = (Tu, v) = \mathfrak{t}[u, v] \quad \forall u, v \in \operatorname{dom} T, \tag{7.6}$$

und $\operatorname{dom} T$ ist nach Satz 7.6 (ii) ein determinierender Bereich für $\mathfrak{t}$. Wenn wir zeigen können, dass $\operatorname{dom} T$ auch ein determinierender Bereich für $\mathfrak{t}'$ ist, folgt aus (7.6) und Lemma 7.5 die Behauptung. Dazu zeigen wir, dass der darstellende Operator T' von $\mathfrak{t}'$ mit T übereinstimmt. Dann liefert Satz 7.6 (ii) das Gewünschte. Für $u \in \operatorname{dom} T'$ und $v \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}'$ gilt

$$(T'u, v) = \mathfrak{t}'[u, v] = (T^{1/2}u, T^{1/2}v),$$

insbesondere $T^{1/2}u \in \operatorname{dom}(T^{1/2})^* = \operatorname{dom} T^{1/2}$ und $T^{1/2}T^{1/2}u = (T^{1/2})^*T^{1/2}u = T'u$. $\Rightarrow$ $u \in \operatorname{dom} T^{1/2}T^{1/2} = \operatorname{dom} T$ und $Tu = T^{1/2}T^{1/2}u = T'u$. $\Rightarrow$ $T' \subset T \Rightarrow$ (beide Operatoren selbstadjungiert) $T' = T$. □

Kapitel 8

Sturm–Liouville-Operatoren auf der Halbachse

Als Anwendung des 1. Darstellungssatzes Satz 7.6 zeigen wir Selbstadjungiertheit von Sturm–Liouville-Operatoren mit der Wirkung $-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q$ auf der Halbachse $(0,\infty)$ im Hilbertraum $\mathcal{H} := L^2(0,\infty)$. Wie immer sind $\|\cdot\|$ und $(\cdot,\cdot)$ Norm bzw. Skalarprodukt in $\mathcal{H}$. Analog zu Kapitel 6 definieren wir

$$H^1(0,\infty) := \big\{f \in L^2(0,\infty) : f \text{ absolut stetig auf } (0,\infty), f' \in L^2(0,\infty)\big\}.$$

Dabei heißt wieder f absolut stetig auf $(0,\infty)$, wenn f auf jedem kompakten Intervall $[a,b] \subset (0,\infty)$ absolut stetig ist. Beachte: Ist $f \in H^1(0,\infty)$, dann ist f' integrierbar auf $[0,c]$ für jedes $c > 0$ und damit f absolut stetig auf $[0,c]$. Insbesondere existiert $f(0) := \lim_{x\searrow 0} f(x)$.

Analog zu Lemma 6.2 zeigt man

Lemma 8.1. *Für $f \in H^1(0,\infty)$ gilt* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Weitere Eigenschaften:

Proposition 8.2. *Der Raum $H^1(0,\infty)$ ist mit dem Skalarprodukt*

$$(f,g)_{H^1(0,\infty)} := (f,g) + (f',g'), \quad f,g \in H^1(0,\infty),$$

und der zugehörigen Norm

$$\|f\|_{H^1(0,\infty)} := \big(\|f\|^2 + \|f'\|^2\big)^{1/2}, \quad f \in H^1(0,\infty),$$

ein Hilbertraum. Der Untervektorraum

$$H_0^1(0,\infty) := \{f \in H^1(0,\infty) : f(0) = 0\}$$

ist abgeschlossen in $H^1(0,\infty)$ *und damit selbst ein Hilbertraum.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Wir betrachten jetzt den Sturm–Liouville-Differentialausdruck $-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx}+q$ mit Koeffizienten $p, q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Wir setzen voraus, dass

- p messbar ist und Konstanten $m, M > 0$ existieren mit $m \le p(x) \le M$ für alle $x \in (0,\infty)$;
- q messbar und beschränkt ist.

In $L^2(0,\infty)$ betrachte den *Dirichlet-Operator* (Name wegen Randbedingung)

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{D}} f &= -(pf')' + qf, \\ \operatorname{dom} T_{\mathrm{D}} &= \{f \in H^1(0,\infty) : pf' \text{ absolut stetig}, (pf')' \in L^2(0,\infty), f(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Satz 8.3. $T_{\mathrm{D}} = T_{\mathrm{D}}^* \ge \inf q$.

Beweis. Betrachte die Sesquilinearform

$$\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}[f,g] = \int_0^\infty pf'\overline{g'}dx + \int_0^\infty qf\overline{g}dx, \quad \operatorname{dom}\mathfrak{t}_{\mathrm{D}} = H_0^1(0,\infty),$$

in $L^2(0,\infty)$.

- $\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$ dicht definiert, da $C_0^\infty(0,\infty) \subset \operatorname{dom}\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$.
- $\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$ symmetrisch:

$$\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}[f,g] = \int_0^\infty pf'\overline{g'}dx + \int_0^\infty qf\overline{g}dx = \overline{\int_0^\infty pg'\overline{f'}dx + \int_0^\infty qg\overline{f}dx} = \overline{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}[g,f]}$$

  für alle $f, g \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$.

- $\mathfrak{t}_{\mathrm{D}} \ge \inf q$:

$$\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}[f] = \underbrace{\int_0^\infty p|f'(x)|^2dx}_{\ge 0} + \int_0^\infty q|f(x)|^2dx \ge (\inf q)\|f\|^2 \quad \forall f \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}.$$

- $\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$ abgeschlossen: Es ist $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}} = \operatorname{dom}\mathfrak{t}_{\mathrm{D}} = H_0^1(0,\infty)$. Die zugehörige Norm $\|\cdot\|_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}}$ erfüllt

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}}^2 &= (\mathfrak{t}_{\mathrm{D}} - \inf q + 1)[f] \geq \int_0^\infty p|f'(x)|^2dx + \|f\|^2 \\ &\geq m\|f'\|^2 + \|f\|^2 \geq \min\{m,1\}\|f\|_{H^1(0,\infty)}^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}}^2 &= (\mathfrak{t}_{\mathrm{D}} - \inf q + 1)[f] \\ &\leq M\|f'\|^2 + (\sup q - \inf q + 1)\|f\|^2 \\ &\leq \max\{M, \sup q - \inf q + 1\}\|f\|_{H^1(0,\infty)}^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}}.\end{aligned}$$

Also stimmen $\mathcal{H}_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}}$ und $H_0^1(0,\infty)$ algebraisch überein und die Norm $\|\cdot\|_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}}$ ist äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(0,\infty)}$. Mit Proposition 8.2 folgt, dass $\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$ abgeschlossen ist.

Nach dem 1. Darstellungssatz (Satz 7.6) existiert ein eindeutiger selbstadjungierter, nach unten durch $\inf q$ halbbeschränkter Operator T in $L^2(0,\infty)$ mit

$$\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}[f,g] = (Tf, g) \quad \forall f \in \operatorname{dom} T, g \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}. \tag{8.1}$$

Wir zeigen nun, dass dieser Operator mit T_{D} übereinstimmt, was den Satz beweist.

$T \subset T_{\mathrm{D}}$: Sei $f \in \operatorname{dom} T$. Dann $f \in \operatorname{dom}\mathfrak{t}_{\mathrm{D}} = H_0^1(0,\infty)$. Mit

$$h(x) := \int_0^x (Tf)(t) - q(t)f(t)dt, \quad x \in [0,\infty),$$

ist h absolut stetig auf $(0,\infty)$ und es gilt $h' = Tf - qf \in L^2(0,\infty)$. Für alle $g \in C_0^\infty(0,\infty) \subset \operatorname{dom}\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$ folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h\overline{g'}dx &\overset{\text{part. Int.}}{=} -\int_0^\infty h'\overline{g}dx = -\int_0^\infty \big((Tf) - qf\big)\overline{g}dx \\ &\overset{(8.1)}{=} -\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}[f,g] + \int_0^\infty qf\overline{g}dx = -\int_0^\infty pf'\overline{g'}dx\end{aligned}$$

und daraus $\int_0^\infty (h+pf')\overline{g'}dx = 0$ für alle $g \in C_0^\infty(0,\infty)$. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung erhalten wir $pf' = -h + c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist pf' absolut stetig auf $(0,\infty)$ und $-(pf')' = h' = Tf - qf \in L^2(0,\infty)$. Daraus folgt $f \in \operatorname{dom} T_{\mathrm{D}}$, und $T_{\mathrm{D}}f = -(pf')' + qf = Tf$. Also $T \subset T_{\mathrm{D}}$.

$T_\mathrm{D} \subset T$: Sei $f \in \operatorname{dom} T_\mathrm{D}$, also $f \in H_0^1(0,\infty)$, pf' absolut stetig und $(pf')' \in L^2(0,\infty)$. Dann folgt mit Lemma 8.1

$$(-(pf')' + qf, g) \overset{\text{part. Int.}}{=} \int_0^\infty pf'\overline{g'}dx + \int_0^\infty qf\overline{g}dx = \mathfrak{t}_\mathrm{D}[f,g] \quad \forall g \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}_\mathrm{D}$$

und mit Satz 7.6 (iii) folgt $f \in \operatorname{dom} T$ (und $Tf = -(pf')' + qf$). □

Anstelle der Dirichlet-Randbedingung kann man auch andere Randbedingungen stellen: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setze

$$\begin{aligned} T_\alpha f &= -(pf')' + qf, \\ \operatorname{dom} T_\alpha &= \left\{ f \in H^1(0,\infty) : pf' \text{ absolut stetig}, (pf')' \in L^2(0,\infty), f'(0) = \alpha f(0) \right\}, \end{aligned}$$

in $L^2(0,\infty)$. (Robin-Randbedingung bzw. Neumann-Randbedingung für $\alpha = 0$.)

Satz 8.4. *$T_\alpha = T_\alpha^*$ und T_α ist halbbeschränkt nach unten für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Selbst; zeige, dass die Sesquilinearform

$$\mathfrak{t}_\alpha[f,g] = \int_0^\infty pf'\overline{g'}dx + \int_0^\infty qf\overline{g}dx + \alpha f(0)\overline{g(0)}, \quad \operatorname{dom} \mathfrak{t}_\alpha = H^1(0,\infty),$$

dicht definiert, symmetrisch, halbbeschränkt nach unten und abgeschlossen ist und dass der zugehörige darstellende Operator mit T_α übereinstimmt. □

Bemerkung. Wie in Kapitel 6 gibt es auch hier einen *minimalen* und einen *maximalen* Operator in $L^2(0,\infty)$, nämlich

$$T_0 f = -(pf')' + qf, \quad \operatorname{dom} T_0 = C_0^\infty(0,\infty),$$

und

$$\begin{aligned} Tf &= -(pf')' + qf, \\ \operatorname{dom} T &= \left\{ f \in H^1(0,\infty), pf' \text{ absolut stetig}, (pf')' \in L^2(0,\infty) \right\}, \end{aligned}$$

und man kann wieder $T_0^* = T$ zeigen. Aber diesmal ist T nicht selbstadjungiert (nicht mal symmetrisch, aus Mangel an Randbedingungen, die bei der partiellen Integration Randterme vernichten könnten), und T_0 nicht wesentlich selbstadjungiert; sonst hätte T_0 nur eine selbstadjungierte Erweiterung, nämlich $\overline{T_0}$ (wie im Beispiel aus Kapitel 6). Aber T_0 hat unendlich viele verschiedene selbstadjungierte Erweiterungen, nämlich T_D und alle T_α mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Das ist aber die übliche Situation: Ist $S \subset S^*$ in $\mathcal{H}$ nicht wesentlich selbstadjungiert und besitzt S eine selbstadjungierte Erweiterung, so hat S bereits unendlich viele selbstadjungierte Erweiterungen.

Literaturverzeichnis

[K] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, 1980.

[S] K. Schmüdgen, Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space, Springer, 2012.

[Wei] J. Weidmann, Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil I, Teubner, 2000.

[Wer] D. Werner, Funktionalanalysis, 5. Auflage, Springer, 2005.

Inhaltsverzeichnis