Uni Graz
TU Graz

C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

# Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

1. Übungsblatt — 21. Okt. 2019

**Aufgabe 1**: Betrachten Sie die reellen Zahlen, ausgestattet mit der Abstandsfunktion

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0, \\ -x, & \text{wenn } x \leq 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dies eine Metrik ist und daher die Dreiecksungleichung

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass zusätzlich auch die inverse Dreiecksungleichung gilt:

$$|x| - |y| \leq |x-y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

*Hinweis*: Verwenden Sie nicht die Definition (1) der Abstandsfunktion, sondern lediglich die Dreiecksungleichung (2).

**Aufgabe 2**: Betrachten Sie die reellen Zahlen, ausgestattet mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$. Geben Sie an, welche der folgenden Teilmengen beschränkt und welche unbeschränkt sind:

a) $A = \left\{ \frac{1}{1+x^2} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$

b) $B = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$

c) $C = \left\{ \frac{1}{x-1} \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}$

d) $D = \left\{ \frac{x^2-1}{x-1} \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}$

**Aufgabe 3**: Zeichnen Sie die folgenden Intervalle auf und erklären Sie deren Unterschiede. Argumentieren Sie welche der Intervalle offen bzw. abgeschlossen sind.

a) $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x \leq 1\}$

b) $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1\}$

c) $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x < 1\}$

d) $(0,1] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x \leq 1\}$

**Aufgabe 4**: Sei $M$ eine Menge mit Metrik $d$.

a) Zeigen Sie, dass für zwei offene Mengen $O_1, O_2$ sowohl deren Vereinigung $O_1 \cup O_2$ alsauch deren Durchschnitt $O_1 \cap O_2$ wieder offen ist.

b) Zeigen Sie, dass für zwei abgeschlossener Mengen $A_1, A_2$ sowohl deren Vereinigung $A_1 \cup A_2$ alsauch deren Durchschnitt $A_1 \cap A_2$ wieder abgeschlossen sind.

**Aufgabe 5**: Betrachten Sie einen Metrischen Raum ihrer Wahl.

a) Finden Sie eine unendlich Anzahl offener Mengen $(O_n)_{n=1}^{\infty}$, deren Durchschnitt $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n$ nicht mehr offen ist.

b) Finden Sie eine unendlich Anzahl abgeschlossene Mengen $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, deren Vereinigung $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ nicht mehr abgeschlossen ist.

**Aufgabe 6***: Sei $M$ eine Menge mit Metrik $d$. Folgern Sie aus den Metrik-Axiomen von $d$, dass auch die Abbildung

$$\widetilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad x, y \in M,$$

diese Axiome erfüllt und somit eine Metrik auf $M$ ist.