Uni Graz
TU Graz

C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

# Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

10. Übungsblatt

20. Jan. 2020

**Aufgabe 55**: Für $a < b \in \mathbb{R}$ berechnen Sie das Integral

$$\int_a^b e^x dx.$$

Unterteilen Sie dazu das Intervall $[a, b]$ in äquidistante Stützstellen

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \qquad i \in \{0, \ldots, n\},$$

und berechnen Sie sich entweder die Ober- oder die Untersumme. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann das gesuchte Integral.

**Aufgabe 56**: Für $0 < a < b$ berechnen Sie das Integral

$$\int_a^b x^\alpha dx$$

für die Fälle a) $\alpha \neq -1$ und b) $\alpha = -1$.

Unterteilen Sie dazu das Intervall $[a, b]$ in die Stützstellen

$$x_i = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}, \qquad i \in \{0, \ldots, n\},$$

und berechnen Sie sich entweder die Ober- oder die Untersumme. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann das gesuchte Integral.

**Aufgabe 57**: Verwenden Sie das Integral aus 56 b) zur Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2).$$

*Hinweis*: Verwende Sie die Untersumme aus Aufgabe 56 b) im Fall $a = 1$, $b = 2$, sowie den Stützstellen aus Aufgabe 55.

**Aufgabe 58**: Zeigen Sie: Jede monoton wachsende Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar

**Aufgabe 59**:

a) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)dx.$$

b) Folgen Sie aus a) die *Dreiecksungleichung für Integrale*:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

**Aufgabe 60***: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $|f|$ Riemann integrierbar ist.

*Hinweis*: Schreiben Sie $|f| = f_+ + f_-$ mit den Funktionen $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \min\{f, 0\}$ und zeigen Sie die Riemann Integrierbarkeit von $f_+$ und $f_-$.