Uni Graz
TU Graz

C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

11. Übungsblatt

27. Jan. 2020

Aufgabe 61: Berechnen Sie die Werte der folgenden bestimmten Integrale

a) $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x}}dx$

b) $\int_0^1 e^x \cosh(x)dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx$

d) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}dx$

f) $\int_{-1}^1 \arctan(\sinh(x))dx$

Aufgabe 62: Benutzen Sie partielle Integration zur Bestimmung der uneigentlichen Integrale

a) $\int x^2 e^x dx$

b) $\int x\ln(x)dx$

c) $\int \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

d) $\int e^x \sinh(x)dx$

Aufgabe 63: Berechnen Sie die folgenden Integrale indem Sie geeignet substituieren.

a) $\int e^{\sin(x)}\cos^3(x)dx$

b) $\int \ln(\cos(x))\sin(2x)dx$

c) $\int \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

e) $\int \arcsin(x)dx$

f) $\int \tan(x)dx$

Aufgabe 64: Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannten Integrale

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) \qquad \text{und} \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

um die folgenden Integrale rationaler Funktionen zu berechnen

a) $\int \frac{x^3+3x^2+2x+5}{x^3+2x^2+x+2}dx$

b) $\int \frac{1}{x^2-5x+4}dx$

c) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx$

Aufgabe 65: Betrachten Sie eine Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ den selben Konvergenzradius $\rho > 0$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Stammfunktion der Potenzreihe gegeben ist durch

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C, \qquad \forall x \in B(x_0,\rho).$$

c) Verwenden Sie b) zum Beweis der Potenzreihendarstellung

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, \qquad \forall |x| < 1.$$

Aufgabe 66*: Betrachten Sie eine Riemann integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass die Schwerpunktskoordinaten der Figur die von f und der x-Achse eingeschlossen wird, gegeben sind durch

$$x_s = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx \qquad \text{und} \qquad y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b f(x)^2 dx,$$

wobei A die Fläche der Figur ist.

Hinweis: Verwenden Sie Riemann-Summen um die Integrale zu approximieren.