Uni Graz
TU Graz

C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

2. Übungsblatt

28. Okt. 2019

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die Infima der folgenden Mengen:

a) $A = \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$; b) $B = \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$; c) $C = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

In welchen Fällen handelt es sich beim Infimum um ein Minimum?

Aufgabe 8: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ wird normalerweise mit dem euklidischen Abstand

$$\|x-y\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \tag{1}$$

gerechnet. Es ist jedoch auch möglich andere Metriken zu verwenden, beispielsweise

$$\|x-y\|_1 := |x_1-y_1| + |x_2-y_2|, \tag{2}$$

oder auch

$$\|x-y\|_\infty := \max\left\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\right\}. \tag{3}$$

Skizzieren Sie die Einheitskugel $B(0,1)$ jeweils in den Metriken (1), (2) und (3).

Aufgabe 9: Betrachten Sie den Raum der stetigen Funktionen

$$C([-1,1]) = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

mit der Metrik

$$\|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)-g(x)|. \tag{4}$$

Berechnen Sie den Abstand $\|f-g\|_\infty$ zwischen den Funktionen

a) $f(x) = e^x$ und $g(x) = 1+x$;

b) $f(x) = \cos(\pi x)$ und $g(x) = \sin(\pi x)$;

c) $f(x) = 1 + \cos^2\left(\ln(1+x^2) - \sqrt{e^{\pi\sin(x)}}\right)$ und $g(x) = 1 - \sin^2\left(\ln(1+x^2) - \sqrt{e^{\pi\sin(x)}}\right)$.

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass es sich bei (4) um eine Metrik handelt.

Aufgabe 11: Skizzieren Sie für beliebiges $s \geq 1$ die Funktionen

$$f_s(x) = \begin{cases} s(1-sx), & \text{für } x \in [0, \frac{1}{s}], \\ s(1+sx), & \text{für } x \in [-\frac{1}{s}, 0], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_s \,:\, s \geq 1\}$ als Teilmenge von $C([-1,1])$ unbeschränkt ist bezüglich der Metrik (4), jedoch beschränkt bezüglich der Metrik

$$\|f-g\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|dx.$$

Hinweis: Im Allgemeinen ist die Beschränktheit einer Menge A definiert als: Es existiert ein $C \geq 0$, sodass

$$d(f,g) \leq C, \qquad \forall f,g \in A.$$

Ist die Metrik jedoch in der Form $d(f,g) = \|f-g\|$ als Differenz der beiden Elemente gegeben, so reicht es zum Beweis der Beschränktheit aus zu zeigen, dass

$$\|f\| \leq C, \qquad \forall f \in A.$$

Aufgabe 12*: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass:

a) Ist M abgeschlossen, so ist das Supremum von M immer ein Maximum.

b) Ist M offen, so kann das Supremum von M nie ein Maximum sein.

Hinweis: Nehmen Sie in a) an, dass das Supremum kein Maximum ist und führen Sie dies zu einem Widerspruch. D.h. Finden Sie eine obere Schranke die kleiner ist als das Supremum.
Analog nehmen Sie in b) an, dass das Supremum angenommen wird und folgern Sie daraus einen ähnlichen Widerspruch wie in a).