Uni Graz C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
TU Graz P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung WS 2019/20

3. Übungsblatt 4. Nov. 2019

Aufgabe 13: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $x_n = \frac{1-\cos(n\pi)}{n}$, indem sie die exakte Definition der Vorlesung verwenden. D.h.: "Erraten" Sie einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ und finden Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) > 0$, sodass

$$\forall n > n(\varepsilon) \text{ gilt } |x_n - x| < \varepsilon.$$

Aufgabe 14: Berechnen Sie die Grenzwerte (falls existent) der Folgen a) – e), indem sie die Rechenregeln der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Grenzwerten verwenden.

a) $x_n = (2 - \frac{3}{n})\frac{2n-1}{n} - \frac{7}{n}$

c) $x_n = \frac{2n^3+n}{3n^3+4n^2+n+7}$

b) $x_n = \frac{(-1)^n n^2+5n+2}{n^3+\frac{1}{n}}$

d) $x_n = \frac{n^2+1+\sin(n)}{n}$

Aufgabe 15: Für ein fixes $q \geq 0$ betrachten Sie die sogenannte geometrischen Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Berechnen Sie den Grenzwert von $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Falle $0 \leq q < 1$.

b) Wie verhält sich die Folge für $q \geq 1$?

Hinweis: Die sogenannte Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x \geq 0,$$

könnte hilfreich sein und darf ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 16: Betrachten Sie die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Entscheiden Sie in welchen der folgenden Metrischen Räume dies eine Cauchy-Folge bzw. eine konvergente Folge ist:

a) $\mathbb{R}$ b) $[0,1]$ c) $(0,1]$

ausgestattet jeweils mit der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$.

Aufgabe 17: Betrachten Sie den Raum $C([-1,1]) = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$, mit der Metrik

$$\|f-g\|_{L_1} := \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|dx.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ nx, & \text{für } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ 1, & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

eine Cauchy-Folge ist.

b) Ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergent? Was bedeutet dies für die Vollständigkeit von $C([-1,1])$.

Aufgabe 18*: Sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sei weiters $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ konvergent gegen ein $x \in M$. Zeigen Sie, dass aus der Abgeschlossenheit von A folgt, dass auch der Grenzwert x ein Element in A ist.