Uni Graz C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
TU Graz P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung WS 2019/20

4. Übungsblatt 11. Nov. 2019

Aufgabe 19: Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

a) $x_n = \frac{2n^3}{4n^2-1} - \frac{n^2}{2n+1}$

b) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}+4n-5}{n+5}$

c) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

d) $\sqrt{n^4+n^2} - \sqrt{n^4-n^2}$

e) $x_n = 2\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{4n+\sqrt{16n-1}}$

f) $x_n = \frac{n}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}}$

Aufgabe 20: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen

a) $x_n = \frac{1+(-1)^{n+1}n}{n+3}$

b) $x_n = \frac{n\sin(\frac{n\pi}{3})}{2n+1}$

Geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine konvergente Teilfolge an.

Aufgabe 21: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\ldots\right).$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ eine Folge rationaler Zahlen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ existiert, die gegen r konvergiert.

Aufgabe 22:

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ zwei Folgen die gegen den selben Grenzwert konvergieren,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

und weiters $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_n \leq x_n \leq b_n$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

gegen den selben Grenzwert konvergiert.

b) Verwenden Sie a) um den Grenzwert von $x_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ zu berechnen. Es darf der in der Vorlesung bewiesene Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, für $a > 0$, verwendet werden.

Aufgabe 23: Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden rekursiv gegebenen Folgen ohne die explizite Form der Folge zu verwenden.

a) $x_1 = 0$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{x_n}{2}$ für alle $n \geq 1$.

b) $x_1 = 2$ und $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ für alle $n \geq 1$.

c) $x_1 = a \geq 0$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ für all $n \geq 1$. (Babylonisches Wurzelziehen)

Hinweis: Folgern Sie direkt aus der Rekursionsvorschrift (induktiv für $n = 1, 2, 3, \ldots$) die Beschränktheit und Monotonie der Folge und damit deren Konvergenz. Der Wert des Grenzwertes ergibt sich dann durch Grenzwertbildung in der Rekursionsvorschrift.

Aufgabe 24*: Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden rekursiv gegebenen Folge ohne die explizite Form der Folge zu verwenden.

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{x_n}{2}, \quad \text{für alle } n \geq 1$$