Uni Graz
TU Graz

C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

5. Übungsblatt — 18. Nov. 2019

Aufgabe 25:

a) Verwenden Sie das ε-δ-Kriterium um zu zeigen, dass es sich bei der Wurzelfunktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

um eine stetige Funktion handelt.

b) Folgern Sie aus a), auch die Stetigkeit der Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = |x|.$$

Aufgabe 26: Überprüfen Sie ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{für } x < 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ 1 + x, & \text{für } x > 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{für } x \neq 2, \\ 3, & \text{für } x = 2. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{für } x < 1, \\ 2, & \text{für } x = 1, \\ \frac{1}{x^2-1}, & \text{für } x > 1. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 27: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitzstetig, wenn ein $L \geq 0$ existiert, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass jede Lipschitzstetige Funktion auch stetig ist. Interpretieren Sie Lipschitzstetigkeit geometrisch.

Aufgabe 28: Überprüfen Sie ob die folgenden Gleichungen eine Lösung im Intervall $[-1, 1]$ besitzen. Die exakte Wert der Lösung muss dabei nicht bestimmt werden.

a) $x^4 + 2x^3 = -x^3 + 2x^2 + 1$

b) $\frac{3+x^3-x^7}{\sqrt{1+x^5}} = 2$

c) $\frac{3+x}{2+3x^4} = 1$

d) $\frac{3+x}{2+3x^4} = 3$

Hinweis: Zwischenwertsatz

Aufgabe 29: Sei p ein Polynom ungeraden Grades, d.h.

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade und } a_n \neq 0.$$

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz um zu zeigen, dass p mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 30*: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ gibt, indem $f(x_0) = 0$ ist.

Anleitung: Setze $a_1 = a$ und $b_1 = b$. Dann ist $f(a_1) \leq 0$ und $f(b_1) \geq 0$. Evaluiere nun den Funktionswert im Mittelpunkt $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ des Intervalls.
Ist $f(m_1) \geq 0$, wähle $a_2 = a_1$ und $b_2 = m_1$.
Ist $f(m_1) \leq 0$, wähle $a_2 = m_1$ und $b_2 = b_1$.
Wiederhole dieses Verfahren um Intervalle $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, $\ldots$ zu erhalten. Zeige, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x_0 \in [a, b]$ konvergieren und dass sowohl $f(x_0) \leq 0$ alsauch $f(x_0) \geq 0$ ist.