Uni Graz — C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
TU Graz — P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

6. Übungsblatt — 25. Nov. 2019

Aufgabe 31: Seien X, X' metrische Räume, $K \subseteq X$ kompakt und $f : X \to X'$ stetig. Zeigen Sie, dass auch die Bildmenge $f(K) = \{\, f(x) \mid x \in K \,\}$ kompakt ist. Führen Sie den Beweis

a) mittels Überdeckungskompaktheit,

b) mittels Folgenkompaktheit.

Aufgabe 32: Überprüfen Sie ob dei folgenden Teilmengen das $\mathbb{R}^2$ kompakt sind. Ist dies nicht der Fall geben Sie eine offene Überdeckung an die keine Teilüberdeckung besitzt UND eine Folge die keine konvergente Teilfolge besitzt.

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, 0 < x < 1, \text{ und } 0 \le y \le 1 \right\}$

b) $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le x < y \le 1 \right\}$

c) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x \ge 0, \text{ und } 0 \le y \le \frac{1}{x} \right\}$

d) $D = \left\{ \frac{1}{t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \middle| \, t \ge 1 \right\}$

Aufgabe 33: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel bei dem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, jedoch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergiert.

Aufgabe 34: Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Der Wert der Reihe muss nicht berechnet werden.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$

e) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$

f) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8^2} \dots$

Aufgabe 35: Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, q^n \quad$ für $\quad q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

Hinweis zu b): Zeigen und verwenden Sie die Abelsche Summationsformel

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = b_{N+1} \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} (b_{n+1} - b_n) \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Aufgabe 36*: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent. Zeigen Sie, dass das Produkt der beiden Reihen wieder als Reihe geschrieben werden kann, nämlich als das sogenannte *Cauchy-Produkt*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit Koeffizienten} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Hinweis: Mit den Partialsummen $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$, $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$ bzw. den Grenzwerten $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ zeigen Sie die Identität

$$C_N - AB = \sum_{n=0}^{N} a_n(B_{N-n} - B) + B(A_N - A).$$