Uni Graz
TU Graz

C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

7. Übungsblatt

2. Dez. 2019

Aufgabe 37: Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)^n}{n^2}(x+1)^n$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (nx)^n$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+x)^{2n}}{(2+\frac{1}{n})^n}$

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2}$

Aufgabe 38: Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion für jedes $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

b) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Aufgabe 39: Im Folgenden seien $x, y \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie die aus der Vorlesung bereits bekannten Additionstheoreme von Sinus und Kosinus um die folgenden weiteren Eigenschaften zu beweisen.

a) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

b) $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

c) $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$

d) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

e) $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$

f) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$

Aufgabe 40 Verwenden Sie die Additionstheoreme aus der Vorlesung bzw. aus Aufgabe 38 um die folgenden Funktionswerte zu bestimmen

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *b)* $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *c)* $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *d)* $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *e)* $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ *f)* $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Aufgabe 41:

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n, \tag{1}$$

mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{0} := 1$ und $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

b) Zeigen Sie, dass es sich bei (1) tatsächlich um die Wurzelfunktion handelt.
Hinweis: Verwenden Sie das Cauchy-Produkt aus Aufgabe 36, sowie die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 42*: Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion sich auch als Grenzwert

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

schreiben lässt.
Hinweis: Berechen Sie zuerst den Grenzwert $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y}$ und wählen Sie anschließend eine geeignete Nullfolge $y_n \to 0$.