Uni Graz
TU Graz

C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

8. Übungsblatt

9. Dez. 2019

Aufgabe 43: Bestimmen Sie die Ableitung der Wurzelfunktion. D.h. berechnen Sie für fixes $x > 0$ den Grenzwert

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} := \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Aufgabe 44: Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen, indem Sie die Rechenregeln der Ableitung anwenden:

a) $f(x) = x\sin(x^2)$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{4x+3}$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

d) $f(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$

e) $f(x) = x^2 e^x \sin(x)$

f) $f(y) = \arccos(y)$

Beachte: Die Funktion $\arccos(y)$ in f) ist die Umkehrfunktion des bijektiven $\cos : (0,\pi) \to (-1,1)$.

Aufgabe 45: Bestimmen Sie die Ableitungen von

a) $f(x) = x^\alpha$, für $\alpha \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = \alpha^x$, für $\alpha > 0$,

c) $f(x) = x^x$.

Aufgabe 46: Berechnen Sie die links- und rechtsseitige Ableitungen der Funktionen

a) $f(x) = (x + |x|)\sqrt{|x|}$,

b) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ 1 + \sin(x), & x \leq 0, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases}$

im Punkt $x = 0$. Sind die Funktionen auch differenzierbar in $x = 0$?

Aufgabe 47: In diesem Beispiel wollen wir die Potenzreihe des Logarithmus untersuchen:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der rechten Seite von (1).

b) Zeigen Sie, dass es sich bei der Potenzreihe (1) tatsächlich um den Logarithmus handelt. Vergleichen Sie dazu die Ableitungen der beiden Seiten.

c) Wie kann die Formel (1) verwendet werden um den Logarithmus auch in Punkten x außerhalb des Konvergenzbereichs zu berechnen?

Aufgabe 48*: Der heilige Abend nähert sich und der Stapel an Wunschzetteln der vielen Kinder auf dem Schreibtisch des Weihnachtsmannes will nicht kleiner werden. Mühsam arbeitet er Liste für Liste ab, doch ständig wird er abgelenkt durch seinen wackeligen Schreibtisch. Mehrfach hat er bereits versucht dessen Füße zu unterlegen, doch er will einfach nicht stabil werden. Als nach einiger Zeit Wichtel Jordi in den Raum kommt um neue Aufträge für die Geschenkewerkstatt zu holen, hört er den Weihnachtsmann in seinen Bart grummeln. Er bemerkt sein Dilemma und sieht sich das Problem genauer an: Der Schreibtisch besitzt 4 Füße, die quadratisch angeordnet und alle gleich lang sind. Das Problem muss also am unebenen Boden liegen. Er überlegt kurz und erinnert sich an den "Nullstellensatz von Bolzano" den er während seiner Wichtelausbildung gelernt hat. Er gibt der dem Weihnachtsmann den folgenden Rat:

"Du musst den Tisch nicht kompliziert unterlegen, dreh ihn einfach um 90°. Bei irdendeinem Winkel während dieser Drehung wird es passieren, dass der Tisch komplett stabil steht, d.h. alle 4 Füße den Boden berühren!"

Der Weihnachtsmann glaubt ihm zuerst nicht, immerhin hat er bereits mehrmals vergeblich versucht den Tisch zu stabilisieren. Doch er gibt Jordi eine Chance und fängt an den Tisch langsam zu drehen. Und tatsächlich, er findet eine Position an der der Tisch stabil steht. Er bedankt sich sehr herzlich bei Jordi, gibt ihm ein kleines Geschenk aus seinem Mantel, und macht sich schnell wieder an die Arbeit damit alle Geschenke rechtzeitig ausgeliefert werden können.

Warum funktioniert Jordis Trick?