Uni Graz
TU Graz

C. Kern, O. Orasch, N. Reichelt,
P. Schlosser, C. Stelzer, M. Weichselbaum

Differenzial- und Integralrechnung

WS 2019/20

9. Übungsblatt

13. Jan. 2020

Aufgabe 49: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung um die folgende Ungleichung zu zeigen:

a) $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1, \qquad \forall x > 0;$

b) $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x, \qquad \forall x \geq 0.$ Wie verhält sich die Ungleichung für $x < 0$?

Aufgabe 50: Zeigen Sie die Identitäten

a) $\mathrm{Arsinh(x)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R};$

b) $\mathrm{Arcosh(x)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad \forall x \geq 1;$

c) $\mathrm{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}), \qquad \forall x \in (-1,1).$

Aufgabe 51: Verwenden Sie die Regel von de l'Hospital um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin(x)\ln(x)),$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right),$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}.$

Sei $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein beliebiges Polynom. Zeigen Sie weiters die Grenzwerte

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \infty,$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0.$

Aufgabe 52: Bestimmen Sie

a) das Taylorpolynom 4. Ordnung von $f(x) = \ln(1+x^2)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$;

b) die Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Stimmt die Reihe mit der Funktion f überein?

Aufgabe 53: Nehmen Sie an Sie wollen die Sinus-Funktion Ihres Taschenrechners programmieren. Da die Anzeige Ihres Taschenrechners maximal 10 Nachkommastellen anzeigen kann, ist eine Berechnungsgenauigkeit 10^{-9} ausreichend. Bestimmen Sie das Taylorpolynom das zur Berechnung notwendig ist und geben Sie eine entsprechende Fehlerabschätzung.

Aufgabe 54*:

a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Seien weiters $x_1, \ldots, x_n \in I$ beliebige Punkte, sowie für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann gilt die *Jensen'sche Ungleichung*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \tag{1}$$

Zeigen Sie (1) für $n = 3$.

b) Verwenden Sie (1) um für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ die *Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel* zu beweisen:

$$(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$