Die hier aufgeführten Aufgaben sind als Beispiele zu verstehen, von welcher Art bzw. Gestalt die Aufgaben in der Vorlesungsprüfung in Differenzial- und Integralrechnung sein werden. Sie decken aber nicht das gesamte Stoffgebiet ab und sind auf keinen Fall als vollständiger Fragekatalog zu verstehen! Bei den Prüfungen werden auch Aufgaben aus anderen Stoffgebieten, die in der Vorlesung behandelt wurden, gestellt werden. Weiters ist der Umfang der hier aufgeführten Beispiele weit höher als bei den tatsächlichen Prüfungen!

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob die Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch

$$d(x, y) = |x_1 - y_1|, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

gegeben ist, eine Metrik ist.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Folgen

$$a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad b_n := \frac{n^2 + 3n + 2}{\sqrt{n^5} + n}.$$

Untersuchen Sie, ob (a_n) und (b_n) konvergent sind und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left((-1)^n + \frac{3}{n^2}\right) \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 + 3n^2\right).$$

Aufgabe 4

(i) Geben Sie eine Definition für die Stetigkeit einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ an.

(ii) Verwenden Sie die Charakterisierung der Stetigkeit aus (i), um die Stetigkeit der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkte $x_0 = 0$ zu überprüfen.

Aufgabe 5

Welche Aussagen können über die Existenz von Minimum und Maximum der Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$, gemacht werden? Begründen Sie Ihre Antwort! Was ändert sich, wenn f statt auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ erklärt ist?

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \quad f(x) = \frac{xe^x - 3}{2 + \cos x} \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \cos\left(\ln(1 + x^2)\right).$$

Aufgabe 7

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ (1 - x)^3, & x > 1. \end{cases}$$

(i) Geben Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f stetig ist.

(ii) Geben Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist.

Begründen Sie all Ihre Antworten.

Aufgabe 8

Wann heißt eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex? Geben Sie ein Kriterium aus der Differenzialrechnung an, mit dem die Konvexität einer hinreichend glatten Funktion überprüft werden kann.

Aufgabe 9

Geben Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung für die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{\tan x}.$$

Aufgabe 11

(i) Geben Sie die Substitutionsregel für das bestimmte Integral an. Nennen Sie alle erforderlichen Voraussetzungen und erklären Sie alle auftretenden Symbole.

(ii) Berechnen Sie

$$\int_3^{11} \frac{x^2}{\sqrt{3 + x^3}} \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 12

Bestimmen Sie, für welche $\alpha > 0$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

existiert, und berechnen Sie für diese α den Wert des Integrals.