Die hier aufgeführten Aufgaben sind als Beispiele zu verstehen, von welcher Art bzw. Gestalt die Aufgaben in der Vorlesungsprüfung in Differenzial- und Integralrechnung sein werden. Sie decken aber nicht das gesamte Stoffgebiet ab und sind auf keinen Fall als vollständiger Fragekatalog zu verstehen! Bei den Prüfungen werden auch Aufgaben aus anderen Stoffgebieten, die in der Vorlesung behandelt wurden, gestellt werden. Weiters ist der Umfang der hier aufgeführten Beispiele weit höher als bei den tatsächlichen Prüfungen!

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob die Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch

$$d(x, y) = |x_1 - y_1|, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

gegeben ist, eine Metrik ist.

Lösung:

Da für $x = \binom{0}{1}$ und $y = \binom{0}{2}$ offensichtlich $d(x, y) = 0$, aber $x \neq y$, ist d keine Metrik.

Beachte: Die Abbildung d erfüllt außer der Definitheit alle Eigenschaften einer Metrik.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Folgen

$$a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad b_n := \frac{n^2 + 3n + 2}{\sqrt{n^5} + n}.$$

Untersuchen Sie, ob (a_n) und (b_n) konvergent sind und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung:

Betrachtet man für a_n die Teilfolgen mit geraden und ungeraden Indizes,

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \quad \text{und} \quad a_{2n-1} = -1 - \frac{1}{2n-1},$$

so sieht man leicht, dass diese Teilfolgen beide konvergent sind und dass sie die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(-1 - \frac{1}{2n-1}\right) = -1$$

haben. Also hat die Folge (a_n) zwei unterschiedliche Häufungspunkte, weshalb sie nicht konvergent sein kann.

Um die Konvergenz von b_n zu untersuchen, erweitern wir den Bruch mit $\frac{1}{\sqrt{n^5}}$ und erhalten

$$b_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{\sqrt{n^3}} + \frac{2}{\sqrt{n^5}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n^3}}}.$$

Wir untersuchen die Konvergenzeigenschaften von Zähler und Nenner separat. Da alle Summanden im Zähler jeweils gegen null konvergieren,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^5}} = 0,$$

konvergiert der Zähler als Summe konvergenter Folgen gegen null. Analog konvergieren alle Terme im Nenner mit

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = 0,$$

weshalb der Nenner als Summe konvergenter Folgen gegen 1 konvergiert. Da sowohl Zähler als auch Nenner konvergieren und der Grenzwert des Zählers ungleich null ist, konvergiert auch b_n und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{\sqrt{n^3}} + \frac{2}{\sqrt{n^5}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{\sqrt{n^3}} + \frac{2}{\sqrt{n^5}}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-1)^n + \frac{3}{n^2}\right) \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(1+3n^2\right).$$

Lösung:
(i) Da $a_n := \frac{1}{n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, folgt aus dem Leibnizkriterium, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

konvergiert. Weiters ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist. Also ist auch die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-1)^n + \frac{3}{n^2}\right)$$

als die Summe zweier konvergenter Reihen konvergent.
(ii) Da $\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n} \geq \frac{1}{n}$ und die harmonische Reihe divergiert, folgt aus dem Vergeleichskriterium, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(1+3n^2\right)$ divergiert; die harmonische Reihe ist hier eine divergente Minorante.

Aufgabe 4

(i) Geben Sie eine Definition für die Stetigkeit einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ an einem Punkt $x_0 \in [a,b]$ an.

(ii) Verwenden Sie die Charakterisierung der Stetigkeit aus (i), um die Stetigkeit der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkte $x_0 = 0$ zu überprüfen.

Lösung:
(i) f ist an $x_0 \in [a,b]$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $y \in [a,b]$ mit $|x_0 - y| < \delta$ stets $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ gilt.
(ii) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für $\delta := \min\{\varepsilon, 1\}$ und alle x mit $|x - 0| = |x| < \delta$:

$$|f(x) - f(0)| = |x^2 - 0| \leq |x| < \varepsilon.$$

Damit haben wir für das beliebige ε ein passendes δ gefunden, sodass die Definition der Stetigkeit erfüllt ist.
Anmerkung: Diese Aufgabe lässt sich auch über andere Charakterisierungen der Stetigkeit wie z.B. Folgenstetigkeit oder Charakterisierung der Stetigkeit über Grenzwerte von Funktionen lösen.

Aufgabe 5

Welche Aussagen können über die Existenz von Minimum und Maximum der Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$, gemacht werden? Begründen Sie Ihre Antwort! Was ändert sich, wenn f statt auf dem offenen Intervall $(0,1)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ erklärt ist?
Lösung:
Wegen $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ ist f streng monoton wachsend. Daher werden Infimum und Supremum am linken bzw. rechten Randpunkt angenommen. Da diese nicht zum Definitionsbereich von f, dem offenen Intervall $(0,1)$, gehören, werden Minimum und Maximum nicht angenommen!
Ist f stattdessen auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ erklärt, so gehören die Randpunkte $x = 0$ und $x = 1$ zum Definitionsbereich und entsprechend werden dort Minimum und Maximum angenommen. Dies ist auch in Übereinstimmung mit dem Satz von Weierstraß, nach dem jede stetige Funktion, die auf einem kompaktem Intervall definiert ist, immer Minimum und Maximum annimmt.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \quad f(x) = \frac{xe^x - 3}{2 + \cos x} \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \cos\left(\ln(1 + x^2)\right).$$

Lösung:

(i) Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(xe^x - 3)'(2 + \cos x) - (xe^x - 3)(2 + \cos x)'}{(2 + \cos x)^2} \\ &= \frac{e^x(x + 1)(2 + \cos x) + (xe^x - 3)\sin x}{(2 + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

(ii) Durch zweifache Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin(\ln(1 + x^2)) \cdot \frac{d}{dx}\ln(1 + x^2) \\ &= -\sin(\ln(1 + x^2))\frac{1}{1 + x^2}\frac{d}{dx}(1 + x^2) \\ &= -\sin(\ln(1 + x^2))\frac{2x}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ (1 - x)^3, & x > 1. \end{cases}$$

(i) Geben Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f stetig ist.

(ii) Geben Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist.

Begründen Sie all Ihre Antworten.

Lösung:

(i) Da die Funktionen $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 0$ und $g_3(x) = (1 - x)^3$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ stetig sind, ist f für alle $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ stetig. Um die Stetigkeit an $x = 0$ und $x = 1$ zu überprüfen, berechnen wir an diesen Punkten die links- und rechtsseitigen Grenzwerte: Es gilt

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x<0} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0, x<0} f(x),$$

also ist f an $x = 0$ stetig. Analog sehen wir

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} 0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1, x>1} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} (1 - x)^3 = 0 = \lim_{x\to 1, x<1} f(x),$$

also ist f auch in $x = 1$ stetig. Zusammengefasst ist f an allen $x \in \mathbb{R}$ stetig.

(ii) Da die Funktionen $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 0$ und $g_3(x) = (1 - x)^3$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind, ist f für alle $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ differenzierbar. Um die Differenzierbarkeit an $x = 0$ und $x = 1$ zu überprüfen, berechnen wir an diesen Punkten die links- und rechtsseitigen Ableitungen: Es gilt

$$\lim_{x\to 0, x<0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0, x<0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{0}{x - 0} = 0.$$

Da die links- und rechtsseitige Ableitung nicht übereinstimmen, ist f an $x = 0$ nicht differenzierbar.
Analog sehen wir

$$\lim_{x \to 1, x<1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1, x<1} \frac{0}{x - 1} = 0$$

und

$$\lim_{x \to 1, x>1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 0} = \lim_{x \to 1, x>1} \frac{(1-x)^3}{x - 1} = - \lim_{x \to 1, x>1} (x-1)^2 = 0,$$

also ist f in $x = 1$ differenzierbar. Zusammengefasst ist f an allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar.

Aufgabe 8

Wann heißt eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex? Geben Sie ein Kriterium aus der Differenzialrechnung an, mit dem die Konvexität einer hinreichend glatten Funktion überprüft werden kann.
Lösung:
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in [a, b]$ und alle $\theta \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

gilt.
Ist f zweimal differenzierbar, so ist f konvex, falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.
Alternativ ist f konvex, falls f einmal differenzierbar ist und die erste Ableitung f' monoton wachsend ist.

Aufgabe 9

Geben Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung für die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.
Lösung:
Die allgemeine Form des Taylorpolynoms ist

$$p_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Für $f(x) = \ln(1 + x)$ ergeben sich die Ableitungen als $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ und $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$. Setzt man dies in die obige allgemeine Formel ein, so erhalten wir

$$p_4(x) = \ln(3) + \frac{x-2}{3} - \frac{(x-2)^2}{18} + \frac{(x-2)^3}{81} - \frac{(x-2)^4}{4 \cdot 81}.$$

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x e^x}{\tan x}.$$

Lösung:
Es gilt $\lim_{x \to 1} \sin(\pi x) = 0$ und $\lim_{x \to 1} x = 1$, also

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \frac{\lim_{x \to 1} \sin(\pi x)}{\lim_{x \to 1} x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Für den zweiten Ausdruck kann wegen $\lim_{x \to 0} (\cos x - 1) = 1 - 1 = 0$ und $\lim_{x \to 0} x \sin x = 0$ die Regel von de l'Hospital angewandt werden und es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\sin x + x \cos x}.$$

Da wieder $\lim_{x\to 0}(-\sin x) = 0$ und $\lim_{x\to 0}(\sin x + x\cos x) = 0$, muss die Regel von de l'Hospital ein weiteres mal angewandt werden und wir erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin x)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x - x\sin x} = -\frac{1}{2}.$$

Beim dritten Ausdruck kann wegen $\lim_{x\to 0}(xe^x) = 0$ und $\lim_{x\to 0}\tan x = 0$ wieder die Regel von de l'Hospital angewandt werden und es ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{(xe^x)'}{(\tan x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(x+1)}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1.$$

Aufgabe 11

(i) Geben Sie die Substitutionsregel für das bestimmte Integral an. Nennen Sie alle erforderlichen Voraussetzungen und erklären Sie alle auftretenden Symbole.

(ii) Berechnen Sie

$$\int_3^{11} \frac{x^2}{\sqrt{3+x^3}} \mathrm{d}x.$$

Lösung:
(i) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a',b'] \to \mathbb{R}$ auf ganz $[a',b']$ differenzierbar, sodass g' auf ganz $[a',b']$ stetig und bijektiv ist und $g([a',b']) \subset [a,b]$. Dann gilt

$$\int_{g(a')}^{g(b')} f(x)dx = \int_{a'}^{b'} f(g(y))g'(y)dy.$$

(ii) Wir setzen $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ und $g(x) = 3 + x^3$. Dann gilt $g'(x) = 3x^2$, $g(0) = 3$ und $g(2) = 11$. Damit erhalten wir mit der Substitutionsregel

$$\int_3^{11} \frac{x^2}{\sqrt{3+x^3}} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{3+x^3}} 3x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{g(0)}^{g(2)} f(g(x))g'(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \frac{2}{3}\sqrt{y}\Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Aufgabe 12

Bestimmen Sie, für welche $\alpha > 0$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

existiert, und berechnen Sie für diese α den Wert des Integrals.
Lösung:
Für $\alpha > 0$ und ein beliebiges $b > 1$ gilt

$$\int_1^b x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1), & \alpha \neq -1, \\ \ln b, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Der Grenzwert von diesem Ausdruck für $b \to \infty$ existiert nur dann, wenn $\alpha > 1$. Für $\alpha > 1$ ergibt sich schließlich

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1}{\alpha - 1}.$$