Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

1. Übungsblatt

18. Okt. 2018

Aufgabe 1: Gegeben sei das Viereck mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne die Seitenlängen und Innenwinkel des Vierecks.
Hinweis: Für den Winkel θ zwischen zwei Vektoren u, v gilt: $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$.

b) Durch welchen Punkt D' müsste D ersetzt werden, damit ein Quadrat entsteht?

Aufgabe 2: Gegeben seien die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfe ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

b) Schreiben Sie die durch ABC aufgespannte Ebene in Parameterform.

b) Bestimme einen Normalvektor auf die Ebene.

c) Bestimme die Gerade, die senkrecht auf die Ebene steht und A enthält.

Aufgabe 3: Gegeben seien die beiden Ebenen

$$E(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$F(\xi,\delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Gerade in der sich die beiden Ebenen schneiden.

Aufgabe 4: Gegeben sei der Punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme

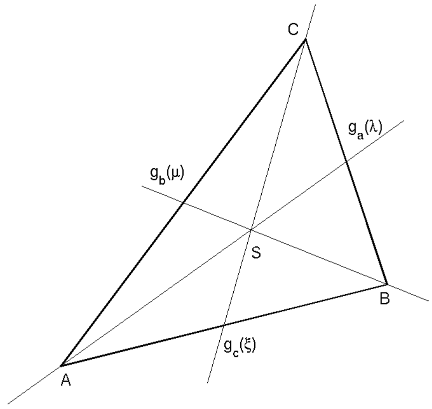
a) den Punkt A_a der entsteht, wenn man A am Punkt $S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ spiegelt.

b) den Punkt A_b der entsteht, wenn man A an der Geraden $g(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spiegelt.

c) den Punkt A_c der entsteht, wenn man A um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn rotiert.

Aufgabe 5: Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



a) Berechne die drei Schwerelinien $g_a(\lambda)$, $g_b(\mu)$ und $g_c(\xi)$.

b) Berechne den Schwerpunkt S des Dreiecks. (Schnittpunkt der Schwerelinien)

c) Überprüfe ob der berechnete Schwerpunkt mit der bekannten Formel

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

übereinstimmt.

Aufgabe 6*: Gegeben sei die Gerade

$$g(\lambda) = a + \lambda b$$

mit beliebigen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeige, dass der (minimale) Abstand dieser Gerade zum Ursprung gegeben ist durch

$$d_{\min} = \sqrt{|a|^2 - \frac{\langle a, b\rangle^2}{|b|^2}}.$$

Hinweis 1: Für das Minimum der Abstandsfunktion $d(\lambda) = |g(\lambda)|$ gilt $\frac{d}{d\lambda} d(\lambda) = 0$.

Hinweis 2: Für eine übersichtliche Notation verwende $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ und $|a|^2 = \langle a, a\rangle$.

b) Zeige, dass in $n = 3$ Dimensionen der Abstand sich schreiben lässt als

$$d_{\min} = \frac{|a \times b|}{|b|}.$$