Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

10. Übungsblatt

17. Jan. 2018

Aufgabe 55: Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 5 & -2 & -5 \\ -6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

und ihre jeweilige algebraische und geometrische Vielfachheit. Ist die Matrix diagonalisierbar?

Aufgabe 56 Gegeben sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^{100} = \underbrace{AAA\ldots A}_{100 \text{ mal}}$.

Aufgabe 57: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeige, dass die Matrizen AB und BA die selben Eigenwerte besitzen.

Hinweis: Behandeln Sie den Fall $\lambda = 0$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und den Fall $\lambda \neq 0$ direkt über die Eigenwertgleichung.

Aufgabe 58: Definiere die Spur (Engl.: trace) einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ als die Summe der Diagonalelemente

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Beweisen Sie:

a) Für zwei beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt immer

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

b) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix, dann ist $\operatorname{tr}(A)$ gleich der Summe der Eigenwerte (gezählt mit der jeweiligen algebraischen Vielfachheit).

Aufgabe 59: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Winkel und

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Die Matrix die die Spielgelung an der Gerade beschreibt welche den Winkel α mit der x-Achse einschließt. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix S_α und interpretieren Sie diese geometrisch.

Aufgabe 60*: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit $A \neq 0$. Zeigen Sie: Wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A^k = 0$ ist, dann ist A nicht diagonalisierbar.