Uni Graz — O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
TU Graz — J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

3. Übungsblatt — 08. Nov. 2018

Aufgabe 13: Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ und induzierter Norm $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$. Zeige für beliebige Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ die Identitäten:

a) Wenn $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, dann gilt $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$; (Satz von Pythagoras)

b) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2\right)$; (Parallelogrammidentität)

c) $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2\right)$. (Polarisationsidentität)

Aufgabe 14: Überprüfe die folgenden Vektoren auf Lineare Abhängigkeit:

a) $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 15: Betrachte den komplexen Vektorraum der Funktionen $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$ und überprüfe ob die Vektoren f, g, h jeweils linear abhängig oder unabhängig sind:

a) $f(x) = x$,
$g(x) = e^x$,
$h(x) = \sin(x)$;

b) $f(x) = 1$,
$g(x) = \sin^2(x)$,
$h(x) = \cos(2x)$;

c) $f(x) = \cos(x)$,
$g(x) = \sin(x)$,
$h(x) = e^{ix}$.

Aufgabe 16: Zeige, dass der Vektorraum $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$ unendlichdimensional ist.

Aufgabe 17: Sei $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ ein Vektorraum und $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ linear unabhängig. Weiters sei ein Vektor $\mathbf{w} \in V$ und Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gegeben, sodass $\lambda_1 \neq 0$ und $\mathbf{w}$ sich schreiben lässt als Linearkombination

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v_n}.$$

Zeige, dass in diesem Fall auch $\mathbf{w}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 18*: Zeige, dass für $p > 1$ die Abbildung

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

eine Norm des $\mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Zum Beweis der Dreiecksungleichung gehe wie folgt vor:

Schritt 1: Benutze die Konvexität

$$e^{\lambda a + (1-\lambda) b} \leq \lambda e^a + (1-\lambda) e^b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1]$$

der Exponentialfunktion, um für alle $A, B \geq 0$ die Ungleichung

$$AB \leq \frac{1}{p} A^p + \frac{p-1}{p} B^{\frac{p}{p-1}} \tag{1}$$

zu zeigen.

Schritt 2: Wähle A und B in (1) geeignet, um für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ die sogenannte Hölder-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i||w_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{2}$$

zu folgern.

Schritt 3: Für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ verwende (2) mit den Werten $v_i = |x_i|,\ w_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ bzw. $v_i = |y_i|,\ w_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ um die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

zu erhalten, aus der dann direkt die Dreiecksungleichung folgt.