Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

4. Übungsblatt

15. Nov. 2018

Aufgabe 19: Betrachte den Vektorraum der stetigen Funktionen

$$\mathcal{C}([-\pi,\pi]) = \{\, f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \,\},$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

a) Zeige, dass die Funktionen

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_2(x) = x\sin(x), \quad f_3(x) = \sin(2x),$$

ein Orthogonalsystem bilden.

b) Bilden diese Funktionen auch ein Orthonormalsystem bzw. eine Orthonormalbasis.

c) Wie müssen die Funktionen f_1, f_2, f_3 abgeändert werden, damit ein Orthonormalsystem bzw. eine Orthonormalbasis entsteht.

Aufgabe 20:

a) Gegeben sind die drei linear unabhängigen Vektoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimme ein zugehöriges Orthonormalsystem mit Hilfe das Gram-Schmidt Orthnormierungsverfahrens.

b) Auf dem Intervall $[-1,1]$ betrachte den Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades $P_2([-1,1])$, mit der Basis

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2.$$

Bestimme mit Hilfe des Gram-Schmidt Orthonormierungsverfahrens eine Orthonormalbasis bezüglich dem Skalarprodukt

$$(p,q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx. \tag{1}$$

Aufgabe 21: Betrachte den Vektorraum der Funktionen

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$$

und die beiden Untervektorräume der geraden bzw. ungeraden Funktionen

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}_g(\mathbb{R}) &= \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(-x) = f(x) \,\} \quad \text{und} \\ \mathrm{Abb}_u(\mathbb{R}) &= \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(-x) = -f(x) \,\}. \end{aligned}$$

Zeige, dass

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{R}) = \mathrm{Abb}_g(\mathbb{R}) \dot{+} \mathrm{Abb}_u(\mathbb{R})$$

eine direkte Summe ist.

Aufgabe 22: Berechne das orthogonalen Komplement

a) von $U_a = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ als Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$;

b) von $U_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$ als Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$;

c) von $U_c = \left\{ ax + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ als Untervektorraum von $P_2([-1,1])$ bezüglich des Skalarprdouktes (1).

Aufgabe 23:

a) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Beweise die folgende Aussage:

Jedes Orthogonalsystem $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ ist linear unabhängig.

b) Sei V ein Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume. Beweise die folgende Aussage:

$U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum genau dann wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 24*: Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und $U \subseteq V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum.

a) Zeige, dass es für jedes $\mathbf{v} \in V$ eindeutige Elemente $\mathbf{v}_\parallel \in U$ und $\mathbf{v}_\perp \in U^\perp$ gibt, sodass

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp.$$

Hinweis: Verwende dazu die in der Vorlesung gezeigte orthogonale Aufspaltung $V = U \oplus U^\perp$.

b) Zeige weiters, dass das Element $\mathbf{v}_\parallel$, jenes Element aus U ist, welches den kleinsten Abstand zu $\mathbf{v}$ besitzt, d.h.

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel\| = \min_{\mathbf{u} \in U} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|.$$