Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

5. Übungsblatt

22. Nov. 2018

Aufgabe 25: Überprüfe, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um lineare Operatoren handelt:

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix};$

b) $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}) \quad \text{mit } T\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1};$

c) $T : \text{Abb}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad T(f) = f(0).$

Aufgabe 26: Berechne $\ker(T)$ sowie $\text{ran}(T)$ der linearen Operatoren aus Aufgabe 25.

Aufgabe 27: Überprüfe bei welchen der folgenden Abbildungen es sich um lineare Operatoren handelt:

a) $T : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \text{ mit } T(f)(x) = -f''(x) + x^2 f(x);$

b) $T : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \text{ mit } T(f)(x) = -f''(x) + x^2;$

c) $T : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \text{ mit } T(f)(x) = -f''(x) + f(x)^2.$

Beachte, dass $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ der Vektorraum der zwei mal stetig differenzierbaren Funktionen und f'' entsprechend die zweite Ableitung ist.

Aufgabe 28: Seien V, W Vektorräume, $T : V \to W$ ein linearer Operator und $\mathbf{v_1}, \dots \mathbf{v_n} \in \text{dom}(T)$.

a) Zeige: Sind $T(\mathbf{v_1}), \dots, T(\mathbf{v_n})$ linear unabhängig, so sind auch $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ linear unabhängig.

b) Zeige an einem Gegenbeispiel, dass die umgekehrte Aussage nicht stimmen muss.

Aufgabe 29: Seien V, W Vektorräume und $T : V \to W$ ein bijektiver linearer Operator. Zeige, dass die Umkehrfunktion $T^{-1} : W \to V$ ebenfalls ein linearer Operator ist.

Aufgabe 30*: Seien V, W Vektorräume und $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ eine Basis von V und $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_n} \in W$ beliebige Elemente. Beweise, dass es einen eindeutigen linearen Operator $T : V \to W$ gibt mit

$$T(\mathbf{v_i}) = \mathbf{w_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$