Lineare Algebra

WS 2018/19

7. Übungsblatt

6. Dez. 2018

Aufgabe 37: Gegeben sind die folgenden linearen Operatoren

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix},$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$

c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad T(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2.$

Berechne den jeweiligen Adjungierten Operator.

Aufgabe 38: Zeige, dass alle Matrizen $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit der Eigenschaft $M = M^*$ von der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & d \end{pmatrix},$$

für Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sind.

Aufgabe 39: Seien V, W, U endlichdimensionale Vektorräume und $T : V \to W$, $S : W \to U$ lineare Operatoren. Beweise die folgenden Rechenregeln beim Rechnen mit der Adjungierten Relation.

a) Der Adjungierte Operator der Hintereinanderausführung von S und T ist gegeben durch

$$(ST)^* = T^* S^*.$$

b) Ist T bijektiv, so ist auch T^* bijektiv und es gilt

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Aufgabe 40: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und $T : V \to V$ ein bijektiver linerer Operator. Zeige, dass $T^* = T^{-1}$ genau dann gilt, wenn

$$(v_1, v_2) = (T(v_1), T(v_2)), \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Aufgabe 41: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist aus der Vorlesung bekannt, dass $V = U \oplus U^\perp$, d.h. für jedes Element $v \in V$ existieren eindeutige Elemente $v_\parallel \in U$ und $v_\perp \in U^\perp$, sodass

$$v = v_\parallel + v_\perp.$$

Definiere nun den linearen Operator $P : V \to V$ durch

$$P(v) = v_\parallel.$$

Berechne den Adjungierten Operator P^*.

Aufgabe 42*: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und $F : V \to \mathbb{K}$ ein beliebiges lineares Funktional. Berechne den Adjungierten Operator F^*.

Hinweis: Verwende den Darstellungssatz von Riesz.