Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

8. Übungsblatt

13. Dez. 2018

Aufgabe 43: Benutzen das Gauß'sche Eliminationsverfahren um alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems zu finden:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: x_1 + 5x_3 &= 2, \\ \mathrm{II}: x_1 + 6x_3 - x_4 &= 1, \\ \mathrm{III}: x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 12. \end{aligned}$$

Aufgabe 44: Für welche Werte des Koeffizienten $\alpha \in \mathbb{C}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\alpha & \alpha & 9 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) keine Lösung,

b) eine eindeutige Lösung,

c) unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 45: Bestimme für die folgenden Matrizen die zugehörige Inverse Matrix (wenn möglich):

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 46: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen und betrachte die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Welche Bedingung ist an die Koeffizienten a, b, c, d zu stellen, damit die Inverse Matrix A^{-1} existiert? Berechne die explizite Gestalt von A^{-1} in diesem Fall.

Aufgabe 47: Für einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ haben wir in Aufgabe 33 die Drehmatrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

hergeleitet. Berechne

a) die Inverse Matrix M_α^{-1}, sowie

b) für einen weiteren Winkel $\beta \in \mathbb{R}$ das Matrixprodukt $M_\beta M_\alpha$

und interpretiere das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 48*: Es ist Heiliger Abend und in der Spielzeugfabrik des Weihnachtsmanns herrscht Hochbetrieb. Nach einem anstrengenden Tag sind bereits fast alle Geschenke ausgeliefert, nur noch 20 Teddybären, 40 Spielzeugautos und 60 Malbücher stehen auf der Wunschliste. Um das Be- und Entladen der Schlitten effizienter zu gestalten hat der Weihnachtsmann angeordnet mehrere Geschenke in Kisten zusammenzufassen. Jedoch haben sich die beiden schusseligen Wichtel Trixi und Jordi nicht an den Bepackungsplan des Weihnachtsmannes gehalten sondern Trixi hat immer 4 Teddybären, 4 Spielzeugautos und 6 Malbücher in eine Kiste gepackt und Jordi immer 2 Teddybären, 2 Spielzeugauto und 8 Malbücher. Da der Weihnachtsmann sich im Lösen von linearen Gleichungssystemen auskennt, weiss er sofort, dass es keine Möglichkeit gibt die richtige Anzahl an Geschenken auf den Schlitten zu packen. Er kann aber auch nicht unnötig viele Geschenke mitnehmen, da der Schlitten sonst zu langsam wäre und nicht mehr rechtzeitig zur Bescherung ankommen würde. Da keine Zeit mehr ist die ganzen Kisten wieder umzupacken wendet er sich verzweifelt an den Schlaumeier Wichtel der sich glücklicherweise mit dem Prinzip der Pseudoinversen Matrix und der Least-Squares Methode auskennt. Er behauptet: Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, kann man

$$x_{\min} := (A^*A)^{-1}A^*b \tag{1}$$

wählen (falls A^*A invertierbar ist) und erhält diejenige Lösung bei der der Fehler der rechten Seite im Sinne der $\|\cdot\|_2$-Norm minimal wird, d.h.

$$\|Ax_{\min} - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2.$$

a) Beweise, dass der Schlaumeier Wichtel die Wahrheit sagt.

   Hinweis: Die Gültigkeit von (1) kann man entweder direkt nachrechnen oder man verwendet Aufgabe 24 mit $U = \operatorname{ran}(A)$.

b) Wieviele Kisten von Trixi bzw. Jordi muss der Weihnachtsmann auf seinen Schlitten laden um so gut als möglich die Wunschliste zu erfüllen.

!!! Frohe Weihnachten !!!