Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

9. Übungsblatt

10. Jan. 2018

Aufgabe 49: Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 50: Berechne die Determinanten der folgenden $n \times n$-Matrizen:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & \dots & 0 \\ i & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \dots & 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Fibonacci-Folge

Aufgabe 51: Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

indem Sie sie auf Zeilen-Stufen-Form bringen.

Aufgabe 52:

a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^\top = -A$ und n ungerade. Zeige, dass $\det(A) = 0$.

b) Sei $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar mit $U^{-1} = U^\top$. Zeige, dass $\det(U) = \pm 1$.

Aufgabe 53: Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ vier Matrizen. Zeige, dass

a) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$,

b) $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$, und sogar

c) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$, falls A invertierbar ist.

Hinweis: In a) schreibe $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ als Matrixprodukt, mit I_n, I_m der n- bzw. m-dimensionalen Einheitsmatrix. In b) und c) gehe ähnlich vor.

Aufgabe 54*: [Cramersche Regel]

a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $b \in \mathbb{K}^n$. Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ bekanntlich eine eindeutige Lösung. Zeige, dass der Lösungsvektor $x \in \mathbb{K}^n$ elementweise bestimmt werden kann durch die Determinante

$$x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)}, \tag{1}$$

wobei $a_i \in \mathbb{K}^n$ die Spalten der Matrix $A = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ sind. D.h. in der Determinante (1) wurde die i-te Spalte der Matrix A durch die rechte Seite b ersetzt.

b) Folgern Sie aus a), dass das Element $(A^{-1})_{ij}$ der Inversen Matrix berechnet werden kann durch

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)},$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor ist.