Aufgabe 34: In beiden Teilen a) und b) müssen wir die Matrix $M_{B_3B_2}(T) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ finden, sodass

$$T = \Phi_{B_2}^{-1} M_{B_3B_2}(T)\Phi_{B_3}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die k-te Spalte dieser Matrix $M_{B_3B_2}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} T(b_k), \quad \forall k \in \{1,2,3\}, \tag{1}$$

mit $b_k \in B_3$ dem k-ten Basisvektor. Die Aufgabe reduziert sich somit zur Berechnung der Wirkung des Isomorphismus $\Phi_{B_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor der sich schreiben lässt als

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{d_1} + \lambda_2 \mathbf{d_2} \tag{2}$$

mit den Basiselemente $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \in B_2$ dann ist

$$\Phi_{B_2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

der Vektor der Koeffizienten. In den einzelnen Punkten a) und b) muss also das Gleichungssystem (2) bezüglich λ_1, λ_2 gelöst werden.

a) Hier hat (2) die Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$\Phi_{B_2}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

und die Gleichung (1) wird zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. die komplette Matrix hat die Gestalt

$$M_{B_3B_2}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Hier hat (2) die Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$\Phi_{B_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1-x_2}{2} \end{pmatrix}$$

und die Gleichung (1) wird zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_{B_2} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

D.h. die komplette Matrix hat die Gestalt

$$M_{B_3 B_2}(T) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$