Aufgabe 16:

Sei

$$\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_n x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Um die lineare Abhängigkeit zu zeigen müssen wir $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ zeigen.

Wähle dazu in (1) $x = 0$. Dann folgt

$$\lambda_0 = 0.$$

D.h. (1) reduziert sich zu

$$\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_n x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dividiere diese Gleichung durch x ergibt sich

$$\lambda_1 + \lambda_2 x^1 \cdots + \lambda_n x^{n-1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wählt man wieder $x = 0$ erhält man $\lambda_1 = 0$. Macht man so weiter erhält man schlussendlich

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$