J. Behrndt, M. Holzmann

Einführung in die mathematischen Methoden (für PhysikerInnen) WS 2018/19

Übungsaufgaben

Hier werden sowohl jene Aufgaben aufgelistet, welche in den Übungseinheiten behandelt wurden, als auch zusätzliche, die zur Vorbereitung auf die Prüfung verwendet werden können. Die Aufgaben, welche nicht in der Lehrveranstaltung vorgerechnet wurden, sind mit einem * gekennzeichnet. Das selbstständige Rechnen der Aufgaben stellt eine optimale Vorbereitung auf die Prüfung dar!

Aufgabe 1
Formulieren Sie folgende Aussagen mit Hilfe von Quantoren und verneinen Sie diese:

(a) Für alle Studierenden in diesem Hörsaal existiert ein Ort in Österreich, in dem die Eltern wohnen.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass aus $|x - y| < \delta$ die Beziehung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

(c*) Für alle reellen Zahlen x existiert eine reelle Zahl y, die kleiner wie x ist.

(d*) Für jede positive reelle Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl N, sodass für alle $n > N$ die Ungleichung $|a - a(n)| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Aufgabe 2
Sind die folgenden Abbildungsvorschriften Funktionen? Begründen Sie die Antwort!

(a*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.

(b*) $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = -x$.

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

(d) $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{1}{x}$.

(e) $G : \{\text{alle Studierende des Kurses}\} \to \mathbb{R}$, $G(s) =$ Körpergröße des Studierenden s.

Aufgabe 3
Überprüfen Sie, ob die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$, injektiv ist.

Aufgabe 4
Überprüfen Sie die unten gegebenen Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

(b) $g : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$.

(c) $h : [2, \infty) \to [2, \infty)$, $h(x) = x^2 - 4x + 6$.

(d*) $k : (-\infty, 2] \to [2, \infty)$, $k(x) = x^2 - 4x + 6$.

Aufgabe 5*
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}((-\infty, 0])$.

Aufgabe 6
Bestimmen Sie die Nullstellen von folgenden Polynomen:

(a) $p_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

(b*) $p_2(x) = x^2 + 4x - 5$.

(c*) $p_3(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$.

Aufgabe 7*
Es sei $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Berechnen Sie $f\big(\big[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\big]\big)$ und $f^{-1}\big(\big[0, \frac{1}{2}\big]\big)$.

Aufgabe 8
Berechnen Sie die Partialbruchzerlegungen von folgenden rationalen Funktionen:

(a*) $\frac{x^3+2x-1}{x^2-3x+2}$.

(b) $\frac{x^4+1}{x^3+x}$.

(c*) $\frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13}$.

(d*) $\frac{x^2+x-3}{x^5-x^4+4x^3-4x^2}$.

Aufgabe 9
Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen (in der Darstellung $a + bi$):

(a) $(1 + i) \cdot (3 + i)$.

(b) $\frac{1+i}{3+i}$.

(c*) $\frac{3+2i}{4-5i}$.

(d*) $\frac{5}{9+i}$.

Aufgabe 10*
Bestimmen Sie $|5 + 3i|$ und $|9 + i|$.

Aufgabe 11
Geben Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen an:

(a) $\sqrt{3} + i$ (b*) $\sqrt{3} - i$ (c*) $-3 - 3i$ (d*) $-1 + \sqrt{3} \cdot i$.

Aufgabe 12
Bestimmen Sie die Polardarstellung von $u = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ und $v = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$ und berechnen Sie damit $u \cdot v$ und $\frac{u}{v}$ (in Polardarstellung).

Aufgabe 13*
Bestimmen Sie die Polardarstellung von $u = -\sqrt{3} - i$ und $v = 1 - i$ und berechnen Sie damit $u \cdot v$ und $\frac{u}{v}$ (in Polardarstellung).

Aufgabe 14
Berechnen Sie die Wurzeln der folgenden komplexen Zahlen (in Polardarstellung):

(a) $\sqrt[3]{i}$ (b*) $\sqrt[4]{-16}$ (c*) $\sqrt[3]{1-i}$ (d*) $\sqrt[4]{-\sqrt{3} - i}$.

Aufgabe 15
Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f_1(x) = \sin x + x^{12}$ (b) $f_2(x) = \sin(x^2)$ (c) $f_3(x) = \cos(e^{x^2} + 3x)$ (d) $f_4(x) = \dfrac{1}{\sin^3(x)}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^{-x} + 2}$ (f) $f_6(x) = \arctan x$ (g*) $f_7(x) = \arcsin x$ (h*) $f_8(x) = \sqrt[3]{(\arctan x)^2}$

(i*) $f_9(x) = (x^2 - x + 3)(\sin x)^3$ (j*) $f_{10}(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Aufgabe 16
Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + 1}$ (b*) $g(x) = \cos(x^3)$.

Aufgabe 17*
Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + 1}$$

durch. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$, d.h. alle $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x)$ sinnvoll erklärt werden kann, und berechnen Sie sämtliche Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

Aufgabe 18*
Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

durch. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$, d.h. alle $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x)$ sinnvoll erklärt werden kann, und berechnen Sie sämtliche Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

Aufgabe 19
Man bestimme die folgenden unbestimmten Integrale:

(a*) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \ln x \mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x$

(e*) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^{2/3}}{x}\mathrm{d}x$ (f*) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$ (g*) $\displaystyle\int \arctan x \mathrm{d}x$

(h*) $\displaystyle\int a^x \mathrm{d}x \quad (a > 0)$ (i*) $\displaystyle\int (2x+1)\sqrt[3]{x^2+x-5}\mathrm{d}x$.

Aufgabe 20
Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^x}\mathrm{d}x$

(d*) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{(x-1)^3}\mathrm{d}x$ (e*) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x \mathrm{d}x$.

Aufgabe 21

Bestimmen Sie die folgenden Integrale rationaler Funktionen:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x^4+1}{x^3+x}\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{1}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x \qquad \text{(c*)} \quad \int_0^1 \frac{9x}{(x+1)^2(x-2)}\mathrm{d}x.$$