J. Behrndt, M. Holzmann

Einführung in die mathematischen Methoden (für PhysikerInnen) WS 2018/19

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Hier findet man die Lösungen zu den Übungsaufgaben. Diese sind dazu gedacht, die gerechneten Beispiele zu kontrollieren. Das selbstständige Rechnen der Aufgaben stellt eine optimale Vorbereitung auf die Prüfung dar!

Aufgabe 1

(a) Es sei H die Menge aller Studierenden im Hörsaal und O die Menge aller Orte in Österreich. Weiters bezeichnen wir mit $E(s)$ die Eltern eines/einer Studierenden $s \in H$. Dann ist die Aussage äquivalent zu

$$\forall s \in H \ \exists o \in O : E(s) \text{ wohnen in } o.$$

Die Verneinung ist

$$\exists s \in H \ \forall o \in O : E(s) \text{ wohnen nicht in } o.$$

(b) Eine Funktion ist stetig in $x \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Die Verneinung ist

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \neg(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

(c*) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} : y < x$. Die Verneinung ist $\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ y \geq x$.

(d*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N : |a - a(n)| < \varepsilon$. Die Verneinung davon ist $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N : |a - a(n)| \geq \varepsilon$.

Aufgabe 2

(a*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$, ist eine Funktion.

(b*) $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = -x$, ist keine Funktion, da $g(x)$ nicht im Bildbereich liegt.

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$, ist keine Funktion, da $h(0)$ nicht definiert ist.

(d) $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{1}{x}$, ist eine Funktion.

(e) $G : \{\text{alle Studierende des Kurses}\} \to \mathbb{R}$, $G(s) =$ Körpergröße des Studierenden s, ist eine Funktion.

Aufgabe 3

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$, ist nicht injektiv, da z.B. $f(-1) = f(0)$.

Aufgabe 4

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$, ist weder injektiv noch surjektiv.

(b) $g : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$, ist injektiv. Die Umkehrfunktion ist $g^{-1} : [2, \infty) \to [2, \infty)$, $g^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y - 2}$.

(c) $h : [2, \infty) \to [2, \infty)$, $h(x) = x^2 - 4x + 6$, ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $h^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y - 2}$.

(d*) $k : (-\infty, 2] \to [2, \infty)$, $k(x) = x^2 - 4x + 6$, ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $k^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y - 2}$.

Aufgabe 5*

$f^{-1}((-\infty, 0]) = (-\infty, 0] \cup [1, 2]$.

Aufgabe 6

(a) $x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i$.

(b*) $x_1 = 1, x_2 = -5$.

(c*) $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = -4$.

Aufgabe 7*
$f\big(\big[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\big]\big) = \big[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\big]$ und $f^{-1}\big(\big[0, \frac{1}{2}\big]\big) = \big[-2\pi, -\frac{11\pi}{6}\big] \cup \big[-\frac{7\pi}{6}, -\pi\big] \cup \big[0, \frac{\pi}{6}\big] \cup \big[\frac{5\pi}{6}, \pi\big]$.

Aufgabe 8

(a*) $\frac{x^3+2x-1}{x^2-3x+2} = x + 3 - \frac{2}{x-1} + \frac{11}{x-2}$.

(b) $\frac{x^4+1}{x^3+x} = x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}$.

(c*) $\frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13} = \frac{3}{x+1} + \frac{4x-2}{x^2-4x+13}$.

(d*) $\frac{x^2+x-3}{x^5-x^4+4x^3-4x^2} = \frac{1}{2x} + \frac{3}{4x^2} - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{6x+11}{20(x^2+4)}$.

Aufgabe 9

(a) $(1+i)\cdot(3+i) = 2+4i$.

(b) $\frac{1+i}{3+i} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}$.

(c*) $\frac{3+2i}{4-5i} = \frac{2}{41} + \frac{23i}{41}$.

(d*) $\frac{5}{9+i} = \frac{45}{82} - \frac{5i}{82}$.

Aufgabe 10*
$|5+3i| = \sqrt{34}$ und $|9+i| = \sqrt{82}$.

Aufgabe 11

(a) $\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$ (b*) $\sqrt{3} - i = 2e^{i11\pi/6}$ (c*) $-3-3i = 3\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$
(d*) $-1+\sqrt{3}\cdot i = 2e^{i2\pi/3}$.

Aufgabe 12
$u = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3e^{i\pi/3}$, $v = \sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot i = 2e^{i\pi/4}$, $u\cdot v = 6e^{i7\pi/12}$ und $\frac{u}{v} = \frac{3}{2}e^{i1\pi/12}$.

Aufgabe 13*
$u = -\sqrt{3} - i = 2e^{i7\pi/6}$, $v = 1 - i = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$, $u\cdot v = 2\sqrt{2}e^{i11\pi/12}$ und $\frac{u}{v} = \sqrt{2}e^{i19\pi/12}$.

Aufgabe 14

(a) $z_0 = e^{i\pi/6}, z_1 = e^{i5\pi/6}, z_2 = e^{i3\pi/2}$.

(b*) $z_0 = 2e^{i\pi/4}, z_1 = 2e^{i3\pi/4}, z_2 = 2e^{i5\pi/4}, z_3 = 2e^{i7\pi/4}$.

(c*) $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{i7\pi/12}, z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i5\pi/4}, z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i23\pi/12}$.

(d*) $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/24}, z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i19\pi/24}, z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i31\pi/24}, z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i43\pi/24}$.

Aufgabe 15

(a) $f_1'(x) = \cos x + 12x^{11}$ (b) $f_2'(x) = 2x\cos(x^2)$ (c) $f_3'(x) = -(2xe^{x^2} + 3)\sin(e^{x^2} + 3x)$

(d) $f_4'(x) = -\dfrac{3\cos x}{\sin^4(x)}$ (e) $f_5'(x) = \dfrac{2 + 2e^x + e^{-x}}{(e^{-x} + 2)^2}$ (f) $f_6'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

(g*) $f_7'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (h*) $f_8'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{\arctan x}(1 + x^2)}$

(i*) $f_9'(x) = (2x - 1)(\sin x)^3 + (x^2 - x + 3)(\sin x)^2\cos x$ (j*) $f_{10}'(x) = -\dfrac{1}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}}$.

Aufgabe 16

(a) $f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ und $f''(x) = -\frac{2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

(b*) $g'(x) = -3x^2\sin(x^3)$ und $g''(x) = -6x\sin(x^3) - 9x^4\cos(x^3)$.

Aufgabe 17*

- maximaler Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$.
- keine Nullstellen.
- lokales Maximum bei $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- keine Wendepunkte.

Aufgabe 18*

- maximaler Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ (bei $x = \pm 1$ würde es eine Division durch null geben).
- Nullstellen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
- lokales Minimum bei $x = 0$.
- keine Wendepunkte.

Aufgabe 19

(a*) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$.

(b) $\int x^2 e^{-x}\mathrm{d}x = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$.

(c) $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$.

(d) $\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$.

(e*) $\int \frac{(\ln x)^{2/3}}{x}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}(\ln x)^{5/3} + C$ (Tipp: Substitution $u = \ln x$).

(f*) $\int x\sqrt{1 + x}\mathrm{d}x = \frac{2}{15}(1 + x)^{3/2}(-2 + 3x) + C$ (Tipp: partiell integrieren).

(g*) $\int \arctan x \mathrm{d}x = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ (Tipp: partiell integrieren).

(h*) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C$ (Tipp: $a^x = e^{x \ln a}$).

(i*) $\int (2x+1)\sqrt[3]{x^2+x-5}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}(x^2+x-5)^{4/3} + C$ (Tipp: Substitution $u = x^2+x-5$).

Aufgabe 20

(a*) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

(b) $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{8}(\pi - 2)$.

(c) $\int_0^1 e^x \sqrt{1+e^x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\big((1+e)^{3/2} - \sqrt{8}\big)$.

(d*) $\int_1^2 \sqrt{(x-1)^3}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$.

(e*) $\int_0^\pi \cos^3 x \mathrm{d}x = 0$ (Tipp: Substitution $u = \cos x$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Aufgabe 21

(a) $\int \frac{x^4+1}{x^3+x}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \ln(1+x^2) + C$.

(b) $\int \frac{1}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x = \arctan(x+3) + C$ (Tipp: im Nenner quadratisch ergänzen und Substitution $u = x+3$).

(c*) $\int_0^1 \frac{9x}{(x+1)^2(x-2)}\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - 4\ln 2$.