Uni Graz
TU Graz

J. Graspeuntner, C. Kern
M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

11. Übungsblatt 8. Jänner

Aufgabe 51
Betrachten Sie den Differenzialoperator in $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L} = (A(x)\nabla) \cdot \nabla + b(x) \cdot \nabla + c(x),$$

wobei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig differenzierbar und $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig sind. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathcal{L}$ is genau dann elliptisch in $x \in \mathbb{R}^2$, wenn $\det A(x) > 0$.

(ii) $\mathcal{L}$ is genau dann hyperbolisch in $x \in \mathbb{R}^2$, wenn $\det A(x) < 0$.

(iii) $\mathcal{L}$ is genau dann parabolisch in $x \in \mathbb{R}^2$, wenn $\det A(x) = 0$ und $\operatorname{rank}(A(x)|b(x)) = 2$.

Aufgabe 52
Bestimmen Sie die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) - 4\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) &= 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \cos x, \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) &= \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vereinfachen Sie so weit wie möglich und führen Sie die Probe durch.

Aufgabe 53
Ist u eine Lösung der Wellengleichung? Falls ja, bestimmen Sie die Wellengeschwindigkeit c sowie die Anfangsposition u_0 und die Anfangsgeschwindigkeit u_1.

(i) $u(t,x) = t \cdot \tan x$;

(ii) $u(t,x) = \sin(x)\cos(3t)$;

(iii) $u(t,x) = \frac{t^2}{2} + \frac{x^2}{2} + t$.

Aufgabe 54
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = 4\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), & t > 0, x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) = x^3(1-x)^3, & x \in [0,1], \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) = \sin(2\pi x), & x \in [0,1], \end{array}$$

für die Zeiten $t \in [0, \frac{1}{4}]$.
Tipp: Verwenden Sie die Formel von d'Alembert und – wo nötig – eine periodische Fortsetzung der Randdaten; vgl. Vorlesung. Die Terme mit $\widetilde{u}_0$ müssen nicht weiter vereinfacht werden.

Aufgabe 55
Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für $x \in (0, 2\pi]$ durch $f(x) := x$ gegeben. Skizzieren Sie die periodische Fortsetzung von f und bestimmen Sie die Fourierreihe. Gegen welchen Wert konvergiert $\mathrm{FR}[f](0)$? Benutzen Sie obige Resultate, um die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

zu berechnen.
Tipp: Um die Parseval-Identität aus der Vorlesung zu verwenden, kann man die komplexen Fourierkoeffizienten aus $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n})$ für $n \geq 1$ berechnen.

Wir wünschen fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!