Uni Graz | J. Graspeuntner, C. Kern
TU Graz | M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

12. Übungsblatt 15. Jänner

Aufgabe 56
Weisen Sie mit Hilfe der Formel von d'Alembert folgende Eigenschaften der Wellengleichung nach:

(i) Sind $u_0(x) = u(0,x)$ und $u_1(x) = u_t(0,x)$ beliebig oft differenzierbar (bzgl. x), so ist $u(t,x)$ beliebig oft differenzierbar (bzgl. x) für jedes t.

(ii) Falls u_0 und u_1 kompakten Träger haben[1], so hat $u(t,x)$ kompakten Träger (bzgl. x) für jedes t. Gibt es in diesem Fall ein Intervall $[a,b]$, das unabhängig von t ist, so dass $u(t,x) = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ und alle t?

Aufgabe 57
In dieser Aufgabe verwenden wir Fourierreihen zum Lösen der gewöhnlichen Differenzialgleichung

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = g(t), \quad f(0) = f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi),$$

auf dem Intervall $[0, 2\pi]$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und g stückweise stetig sein soll. Dazu entwickeln wir g in die komplexe Fourierreihe

$$g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikt}$$

und machen für die Lösung f den Ansatz

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{ikt}$$

mit unbekannten Koeffizienten f_k. Unter der Annahme, dass f hinreichend glatt ist, können f' und f'' durch termweises Differenzieren der Fourierreihe berechnet werden. Bestimmen Sie mit einem Koeffizientenvergleich die unbekannten Terme f_k und zeigen Sie, dass sich die Lösung des Problems als periodisches Faltungsintegral

$$f(t) = (h * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t-s) g(s) \mathrm{d}s$$

mit

$$h(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{f_k}{g_k} e^{ikt}$$

schreiben lässt.

Aufgabe 58
Lösen Sie das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(0,y) = u(1,y) &= 0, \quad y \in (0,1), \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in (0,1), \\ u(x,1) &= x(1-x), \quad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Sie dürfen sämtliche aus der Vorlesung bekannten Formeln verwenden.

[1] d.h. es existiert eine Konstante $m > 0$ mit $u_0(x) = 0$ und $u_1(x) = 0$ für alle $|x| > m$

Aufgabe 59
Lösen Sie das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung mittels Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1),\\
u(0,y) = u(1,y) &= 0, \quad y \in (0,1),\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) &= 0, \quad x \in (0,1),\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 2\pi \sin(2\pi x)(e^{2\pi} - e^{-2\pi}) &, \quad x \in (0,1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 60
Finden Sie mittels Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ mindestens eine Lösung der partiellen Differenzialgleichung

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y) + 3y^2 u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$