Uni Graz J. Graspeuntner, C. Kern
TU Graz M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

4. Übungsblatt 30. Oktober

Aufgabe 16

Wir betrachten den linearen Operator $T : L^2([0,2]) \to L^2([0,2])$ welcher durch $Tf(x) = h(x)f(x)$ mit

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in (1,2], \end{cases}$$

gegeben ist.

(i) Beweisen Sie, dass T beschränkt ist und berechnen Sie die Norm $\|T\|$ von T.

(ii) Berechnen Sie den Kern von T, also die Menge

$$\ker T := \left\{ f \in L^2([0,2]) : Tf = 0 \right\}.$$

Aufgabe 17

Wir betrachten den linearen Operator $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, welcher durch

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) := (x_1 - 2x_2, x_2 - 2x_3, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_5, \dots)$$

gegeben ist.

(i) Zeigen Sie, dass T ein linearer Operator ist.

(ii) Beweisen Sie, dass T beschränkt ist.

(iii) Berechnen Sie den Kern von T, also die Menge

$$\ker T := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) : Tx = 0 \right\}.$$

Aufgabe 18

Wir betrachten den eindimensionalen Laplaceoperator

$$P : \operatorname{dom} P \to L^2([0,1]), \quad Pf(x) = -f''(x),$$

wobei

$$\operatorname{dom} P = C^2([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist } 2\times \text{ differenzierbar und } f', f'' \text{ sind stetig auf } [0,1]\}.$$

Zeigen Sie, dass P linear und wohldefiniert (d.h. $Pf \in L^2([0,1])$ für alle $f \in \operatorname{dom} P$), aber nicht beschränkt ist, d.h.

$$\forall C > 0 \, \exists \, 0 \neq f \in \operatorname{dom} P : \frac{\|Pf\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} > C.$$

Hinweis: Polynome vom Grad n können hilfreich sein.

Aufgabe 19
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass der Kern eines beschränkten und überall definierten Operators eine abgeschlossene Menge ist. Hier wollen wir uns überlegen, dass dies für das Bild *nicht* der Fall sein muss. Dazu betrachten wir den Operator $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, welcher durch

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\tfrac{1}{n}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegeben ist.

(i) Zeigen Sie, dass T ein beschränkter linearer Operator ist.

(ii) Es sei $y = \left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \frac{1}{n}$, also

$$\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots\right).$$

Zeigen Sie, dass

$$y \notin \operatorname{ran} T = \left\{(z_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) : \exists (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) : (z_n) = T(x_n)\right\}.$$

(iii) Zeigen Sie, dass es eine Folge $y^{(m)} = \left(y_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{ran} T$ gibt, sodass $y^{(m)}$ bzgl. der ℓ^2-Norm gegen y konvergiert.

Hinweis: Die Folgen $x^{(m)} = \left(x_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} 1, & n < m, \\ 0, & n \geq m, \end{cases}$$

können hilfreich sein.

Aufgabe 20
Lösen Sie die Integralgleichung

$$u(s) - \int_0^1 stu(t)\mathrm{d}t = \sin(\pi s), \quad s \in [0,1], u \in L^2(0,1).$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(i) Betrachten Sie den linearen Operator

$$T : L^2(0,1) \to L^2(0,1), \quad (Tu)(s) := \int_0^1 stu(t)\mathrm{d}t,$$

und zeigen Sie, dass T beschränkt ist mit $\|T\| < 1$.

(ii) Definieren Sie $f(s) := \sin(\pi s)$ für $s \in (0,1)$ und berechnen Sie

$$u := (1 - T)^{-1} f$$

über die Formel der Neumann'schen Reihe. Unterwegs könnte die Identität $(T^n f)(s) = \frac{s}{3^{n-1}\pi}$, $n \geq 1$, nützlich sein, die für den Fall $n = 1$ überprüft werden soll und für $n = 2, 3, \dots$ beweislos verwendet werden darf.