Uni Graz J. Graspeuntner, C. Kern
TU Graz M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

5. Übungsblatt 6. November

Aufgabe 21
Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen zum Dualraum von $L^2([0,1])$ gehören.

(i) $A : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}, \quad Af = \int_0^1 x \cdot f(x) \mathrm{d}x;$

(ii) $B : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}, \quad Bf = \int_0^1 \sqrt{|f(x)|} \mathrm{d}x;$

(iii) $C : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), \quad Cf(x) = x \cdot f(x).$

Aufgabe 22
Der Operator $T : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ sei gegeben durch

$$(Tf)(x) = e^{-x} f(2x), \quad f \in L^2(0,\infty).$$

(i) Zeigen Sie, dass T beschränkt ist.

(ii) Berechnen Sie den adjungierten Operator T^* von T.

Aufgabe 23
Gegeben sei die Abbildung

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}, \qquad T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x_1 + x_2.$$

(i) Zeigen Sie, dass T ein linearer beschränkter Operator ist.

(ii) Berechnen Sie den adjungierten Operator $T^* : \mathbb{C} \to \ell^2(\mathbb{N})$.

Aufgabe 24
Der *Linksshift-Operator* $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ ist gegeben durch

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der zugehörige adjungierte Operator $T^* : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ die Gestalt

$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

hat. Der Operator T^* heißt *Rechtsshift-Operator*. Untersuchen Sie jeden der Operatoren T und T^* auf Injektivität und Surjektivität.[1]

Aufgabe 25
Wir betrachten den linearen Operator

$$P : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad Pf(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} f(y) \mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie, dass P eine Orthogonalprojektion ist.
HINWEIS: Schreiben Sie den Operator in der Form $Pf = \varphi(f,\varphi)_{L^2}$. Welche Eigenschaften hat φ?

---

[1] Zur Erinnerung, ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ ist *injektiv*, falls $\ker T = \{0\}$, und *surjektiv*, falls $\operatorname{ran} T = \mathcal{K}$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V ein linearer Operator $T : V \to V$ genau dann injektiv ist, wenn er surjektiv ist. In dieser Aufgabe stellen wir fest, dass diese Äquivalenz in unendlichdimensionalen Vektorräumen nicht mehr stimmt.