Uni Graz — J. Graspeuntner, C. Kern
TU Graz — M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

7. Übungsblatt — 20. November

Aufgabe 31
Wir haben gesehen, dass die Funktionen $\varphi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, ein Orthonormalsystem in $L^2(-\pi, \pi)$ bilden. Es sei nun für $N \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_N := \operatorname{span}\{\varphi_{-N}, \varphi_{-N+1}, \dots, \varphi_{N-1}, \varphi_N\} = \left\{ \sum_{k=-N}^{N} c_k \varphi_k : c_{-N}, \dots, c_N \in \mathbb{C} \right\}$$

der endlichdimensionale Teilraum von $L^2(-\pi, \pi)$, der von $\varphi_{-N}, \dots, \varphi_N$ aufgespannt wird. Betrachten Sie den Operator $T := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ im Teilraum $\mathcal{H}_N$. Was ist der größtmögliche Teilraum von $\mathcal{H}_N$, auf dem T sinnvoll erklärt werden kann, damit T ein Operator in $\mathcal{H}_N$ ist (d.h. damit auch $T\varphi \in \mathcal{H}_N$ für $\varphi \in \operatorname{dom} T$)? Ist der Operator symmetrisch oder sogar selbstadjungiert? Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von T.

Aufgabe 32
Gegeben sei der lineare und beschränkte Operator

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

mit $a_n := \frac{i}{n^3}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie das Spektrum von T. Ist T selbstadjungiert?

Aufgabe 33
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine Orthogonalprojektion mit $\{0\} \subsetneq \operatorname{ran} P \subsetneq \mathcal{H}$. Berechnen Sie das Spektrum von P. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(i) Zeigen Sie $\sigma_p(P) = \{0, 1\}$.

(ii) Beweisen Sie für $\lambda \notin \{0, 1\}$, dass $P - \lambda$ bijektiv ist, und, dass der inverse Operator $(P - \lambda)^{-1}$ stetig ist.

Hinweis für Punkt (ii): Machen Sie für $(P-\lambda)^{-1}$ einen Ansatz bzgl. der orthogonalen Zerlegung $\mathcal{H} = \operatorname{ran} P \oplus \ker P$, d.h. schreiben Sie diesen Operator für $y = y_1 + y_2 \in \operatorname{ran} P \oplus \ker P$ als $(P - \lambda)^{-1} y = P_1(\lambda) y_1 + P_2(\lambda) y_2$. Wie sehen die Operatoren $P_1(\lambda)$ und $P_2(\lambda)$ aus?

Aufgabe 34
Konstruieren Sie – falls solche existieren – beschränkte, überall definierte lineare Operatoren mit den folgenden Spektren:

(i) $\sigma(T) = \{0, e^3, \pi^2, i, 42\}$;

(ii) $\sigma(T) = (-1, 1]$;

(iii) $\sigma(T) = \{1/n^2 : n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{0\}$;

(iv) $\sigma(T) = [1, 2]$;

(v) $\sigma(T) = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Hinweis: Multiplikationsoperatoren in $L^2(a,b)$ können hilfreich sein.

Aufgabe 35
Betrachten Sie den durch die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebenen kompakten, selbstadjungierten linearen Operator im Hilbertraum $\mathbb{C}^3$.

(i) Berechnen Sie seine Spektraldarstellung (d.h. die Summendarstellung aus dem Spektralsatz).

(ii) Berechnen Sie den Operator e^{tT} und zeigen Sie, dass die vektorwertige Funktion $f(t) := e^{tT}x$ für ein $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{C}^3$ das Anfangswertproblem

$$f'(t) = Tf(t), \quad f(0) = x,$$

löst.

Hinweis: Beachten Sie, dass die unendliche Summe im Spektralsatz für kompakte Operatoren im endlichdimensionalen Fall zu einer endlichen Summe über alle Eigenwerte wird.