Uni Graz | J. Graspeuntner, C. Kern
TU Graz | M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

8. Übungsblatt 27. November

Aufgabe 36
Lösen Sie das Sturm–Liouville-Eigenwertproblem mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} &-f''(x) - 7f(x) = \lambda f(x), \quad x \in (0,\pi), \\ &f'(0) = f'(\pi) = 0, \end{aligned}$$

für das Intervall $(0,\pi)$, das heißt, bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte λ und die zugehörigen (hinreichend oft differenzierbaren) Eigenfunktionen $f \in L^2(0,\pi)$.[1]

Aufgabe 37
Noch ein Sturm–Liouville-Eigenwertproblem: Finden Sie alle reellen Eigenwerte der Gleichung

$$\begin{aligned} &-f''(x) = \lambda f(x), \quad x \in (0,\infty), \\ &f'(0) = \eta f(0), \end{aligned}$$

für festes $\eta < 0$.
Achtung: Beachten Sie, dass zugehörige Eigenfunktionen in $L^2(0,\infty)$ liegen müssen!

Aufgabe 38
Betrachten Sie den Integraloperator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$,

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \quad f \in L^2(0,1),$$

wobei

$$k(x,y) := \begin{cases} (1-x)y, & y < x, \\ x(1-y), & y > x. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $k \in L^2((0,1)^2)$. Daher ist T kompakt.

(ii) Sei $f \in C([0,1])$ stetig. Zeigen Sie, dass $g = Tf$ die Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} -g''(x) &= f(x), \quad x \in (0,1), \\ g(0) &= g(1) = 0, \end{aligned}$$

erfüllt.

Hinweis: Schreiben Sie $Tf(x) = \int_0^x k_1(x,y)f(y)\mathrm{d}y + \int_x^1 k_2(x,y)f(y)\mathrm{d}y$ und berechnen Sie die Ableitung davon mit dem Hauptsatz der Differenzialrechnung über $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x h(y)\mathrm{d}y = h(x)$.

Aufgabe 39
Es sei $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger, d.h. es existiert $m > 0$ mit $V(x) = 0$ für alle $|x| > m$. Weiters nehmen wir an, dass V symmetrisch ist, d.h. $V(x) = V(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es sei H der zugehörige selbstadjungierte Schrödingeroperator

$$Hf(x) := -f''(x) + V(x)f(x), \quad \operatorname{dom} H = H^2(\mathbb{R}).^2 \tag{1}$$

Unter obigen Voraussetzungen kann man zeigen, dass H selbstadjungiert ist und dass das stetige Spektrum von H durch $\sigma_c(H) = [0,\infty)$ gegeben ist. Im Folgenden wollen wir einige Aussagen zum Punktspektrum von H machen:

[1] Es handelt sich dabei um das Eigenwertproblem für einen selbstadjungierten, unbeschränkten Operator in $L^2(0,\pi)$; vgl. die Vorlesung für ein ähnliches Beispiel.
[2] Dies ist der Sobolevraum 2. Ordnung

(i) Es sei $V_0 := \min\{V(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von partieller Integration, dass dann

$$(Hf, f) \geq V_0(f, f)$$

für alle $f \in \operatorname{dom} H$. Folgern Sie daraus, dass jeder Eigenwert λ von H, falls solche existieren, $\lambda \geq V_0$ erfüllt.

(ii) Es sei f eine Eigenfunktion von H zum Eigenwert λ. Dann ist auch f_-, gegeben durch $f_-(x) := f(-x)$, eine Eigenfunktion von H zum Eigenwert λ.

(iii) Schließen Sie aus (ii) die folgende Aussage: um die Eigenwerte von H zu bestimmen, reicht es, nach geraden und ungeraden Eigenfunktionen zu suchen (d.h. nach Eigenfunktionen, die $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$ erfüllen).

Hinweis zu (iii): Man erinnere sich an die Projektion auf den Raum der geraden/ungeraden Funktionen.

Aufgabe 40

Es sei V gegeben durch

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & x \in [-a, a], \\ 0, & x \notin [-a, a], \end{cases}$$

wobei $V_0, a > 0$ Konstanten sind. Es sei H der zugehörige selbstadjungierte Schrödingeroperator wie in (1). Zeigen Sie, dass H mindestens einen negativen Eigenwert $\lambda \in (-V_0, 0)$ hat. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(i) Suchen Sie eine Eigenfunktion der Form

$$f(x) = \begin{cases} f_-(x), & \text{falls } x < -a, \\ f_m(x), & \text{falls } -a \leq x \leq a, \\ f_+(x), & \text{falls } x > a. \end{cases}$$

f soll eine Lösung von $(H - \lambda)f = 0$ sein, d.h. die Funktionen f_+, f_m und f_- sollen die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -f_-''(x) &= \lambda f_-(x), & x &\in (-\infty, -a), \\ -f_m''(x) - V_0 f_m(x) &= \lambda f_m(x), & x &\in (-a, a), \\ -f_+''(x) &= \lambda f_+(x), & x &\in (a, \infty), \end{aligned}$$

erfüllen. Weiters soll f symmetrisch sein, d.h. $f(x) = f(-x)$, und die folgenden Randbedingungen erfüllen:

(a) Quadratintegrierbarkeit: $f_- \in L^2(-\infty, -a), f_m \in L^2(-a, a)$ und $f_+ \in L^2(a, \infty)$.
(b) Stetigkeit in $\pm a$: $f_-(-a) = f_m(-a)$ und $f_m(a) = f_+(a)$.[3]
(c) Stetigkeit der ersten Ableitung in $\pm a$: $f_-'(-a) = f_m'(-a)$ und $f_m'(a) = f_+'(a)$.[3]

(ii) Eine der Konstanten in der Definition von f kann durch Normierung 1 gesetzt werden.

(iii) Die Bedingung an die Stetigkeit der Funktion selbst und der Ableitung ergeben zwei Gleichungen. Dividieren Sie eine Gleichung durch die andere, sodass die verbleibende Konstante eliminiert wird.

(iv) Zeichnen Sie den Graphen der rechten und der linken Seite der in Punkt (iii) erhaltenen Gleichung und argumentieren Sie über Schnittpunkte dieser Kurven, dass es mindestens eine Lösung geben muss, welche eine Eigenfunktion induziert. Der konkrete Wert der Lösung ist dabei für uns nicht wichtig.

[3] Wegen der Symmetrie reicht es, diese Bedingung in einem der Punkte $+a$ oder $-a$ zu verlangen.