

Kapitel 1

Approximation von Funktionen

Die polynomiale Approximation von Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen $x \in \mathbb{R}$ dient einerseits der Verarbeitung von experimentellen Daten, d.h. für eine gegebene Punktmenge $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^n$ ist eine geeignete funktionale Darstellung $f_n(x)$ zu finden, andererseits ermöglicht die Approximation einer gegebenen Funktion $f(x)$ durch ein Polynom eine einfache Realisierung von Differentiation und Integration. Später werden diese Konzepte zur Approximation von Funktionen auch zur näherungsweise Lösung von Anfangs- und Randwertproblemen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen bzw. von Integralgleichungen eingesetzt.

1.1 Interpolation

Gegeben seien $n+1$ Paare $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^n$ von paarweise verschiedenen Stützstellen $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und zugehörigen Funktionswerten f_i ; für eine gegebene Funktion $f(x)$ sei $f_i = f(x_i)$. Gesucht ist das Interpolationspolynom

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (1.1)$$

mit noch zu bestimmenden Zerlegungskoeffizienten a_0, \dots, a_n , welches in den Stützstellen x_i die Interpolationsgleichungen $f_n(x_i) = f_i$ erfüllt, d.h.

$$f_n(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k = f_i \quad \text{für } i = 0, \dots, n. \quad (1.2)$$

Diese $n+1$ Gleichungen entsprechen dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

bzw.

$$A_n \underline{a} = \underline{f} \quad (1.4)$$

mit der durch die Einträge

$$A_n[i, k] = x_i^k \quad \text{für } i, k = 0, \dots, n \quad (1.5)$$

definierten Systemmatrix

$$A_n \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Die Zerlegungskoeffizienten a_k des Interpolationspolynoms $f_n(x)$ sind genau dann eindeutig bestimmt, wenn das lineare Gleichungssystem (1.4) eindeutig lösbar ist. Zu untersuchen ist deshalb die Invertierbarkeit der Systemmatrizen A_n .

Lemma 1.1. *Die durch*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

gegebenen Systemmatrizen $A_n \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ sind Vandermonde-Matrizen. Für diese gilt

$$\det A_n = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (1.7)$$

Beweis: Der Beweis von (1.7) erfolgt durch vollständige Induktion nach n . Für $n = 1$ ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}$$

und somit folgt die Induktionsverankerung

$$\det A_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0.$$

Für Matrizen der Gestalt

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

gelte also die Induktionsvoraussetzung

$$\det A_n = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Sei nun

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & x_n^{n+1} \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung der Determinante von A_{n+1} ergibt die Subtraktion des x_0 -fachen der $(k-1)$ -ten Spalte von der k -ten Spalte für $k = n+1, n, \dots, 1$

$$\det A_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0x_1 & \dots & x_1^n - x_0x_1^{n-1} & x_1^{n+1} - x_0x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0x_n & \dots & x_n^n - x_0x_n^{n-1} & x_n^{n+1} - x_0x_n^n \\ 1 & x_{n+1} - x_0 & x_{n+1}^2 - x_0x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n - x_0x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n+1} - x_0x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile folgt dann

$$\begin{aligned} \det A_{n+1} &= \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} & (x_1 - x_0)x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n+1} - x_0 & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1} & \dots & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^{n-1} & (x_{n+1} - x_0)x_{n+1}^n \end{vmatrix} \\ &= (x_1 - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

und somit gilt

$$\det A_{n+1} = (x_1 - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_0) \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) = \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i).$$

■

Für paarweise verschiedene Stützstellen $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ folgt somit $\det A_n \neq 0$ und damit die Invertierbarkeit der Systemmatrizen A_n . Damit ist das lineare Gleichungssystem (1.4) und somit die Interpolationsaufgabe (1.2) eindeutig lösbar.

Beispiel 1.1. Für $n = 2$ und $x \in [-5, 5]$ führt die Interpolation der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

in den gleichmäßig verteilten Stützstellen

$$x_0 = -5, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{26}.$$

Damit lautet das zugehörige Interpolationspolynom

$$f_2(x) = 1 - \frac{1}{26}x^2.$$

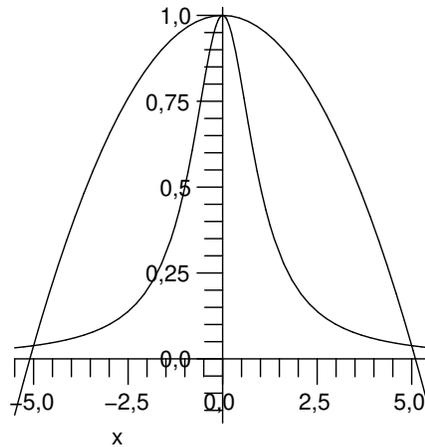


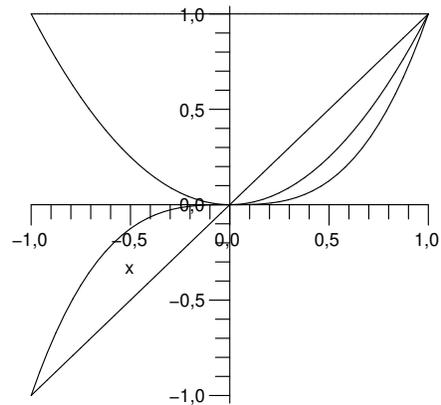
Abbildung 1.1: Interpolationspolynom $f_2(x)$ von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Allgemein kann das Interpolationspolynom (1.1) geschrieben werden als

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$$

mit den Basisfunktionen

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \dots, \quad \varphi_n(x) = x^n. \quad (1.8)$$

Abbildung 1.2: Monome $\varphi_k(x) = x^k$ für $k = 0, 1, 2, 3$.

Die Verwendung von Monomen $\varphi_k(x) = x^k$ als Basisfunktionen erfordert die Lösung der linearen Gleichungssysteme (1.4), deren Systemmatrizen durch die Vandermonde-Matrizen (1.6) gegeben sind. Es stellt sich die Frage, wie durch eine geeignete Wahl von Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ die Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems möglichst einfach gestaltet werden kann. Dies motiviert die folgende Definition der Lagrange-Polynome.

Die Monome $\varphi_k(x) = x^k$ bilden eine Basis des linearen Raumes der Polynome vom Grad n ,

$$\Pi_n = \text{span}\left\{\varphi_k(x)\right\}_{k=0}^n = \text{span}\left\{x^k\right\}_{k=0}^n.$$

Jedes Polynom $f_n \in \Pi_n$ mit maximalen Grad n kann also als Linearkombination der Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ dargestellt werden,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Der Übergang zu einer anderen Basis

$$\Pi_n = \text{span}\left\{x^k\right\}_{k=0}^n = \text{span}\left\{\psi_k(x)\right\}_{k=0}^n$$

mit Basisfunktionen $\psi_k(x)$ ermöglicht für das Interpolationspolynom den Ansatz

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \psi_k(x)$$

mit noch zu bestimmenden Zerlegungskoeffizienten b_k für $k = 0, \dots, n$. Die zugehörigen Interpolationsgleichungen lauten dann

$$f_n(x_i) = \sum_{k=0}^n b_k \psi_k(x_i) = f_i \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \psi_0(x_0) & \dots & \psi_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_0(x_n) & \dots & \psi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Die Basisfunktionen $\psi_k(x)$ sollen nun derart gewählt werden, so daß das lineare Gleichungssystem (1.9) besonders einfach zu lösen ist. Insbesondere aus der Forderung

$$\psi_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (1.10)$$

folgt

$$b_k = f_k \quad \text{für alle } k = 0, \dots, n$$

und somit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \psi_k(x).$$

Die Forderung (1.10) motiviert die Definition der Lagrange-Polynome

$$L_k^n(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad \text{für } k = 0, \dots, n. \quad (1.11)$$

Die in (1.11) definierten Lagrange-Polynome $\{L_k^n(x)\}_{k=0}^n$ bilden eine Basis im Raum Π_n der Polynome vom Grad n . Für das Interpolationspolynom ergibt sich dann die Darstellung

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k^n(x). \quad (1.12)$$

Beispiel 1.2. Für die Stützstellen

$$x_0 = -5, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

ergeben sich die in Abbildung 1.3 dargestellten Lagrange-Polynome

$$L_0^2(x) = \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{10}x, \quad L_1^2(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 1, \quad L_2^2(x) = \frac{1}{50}x^2 + \frac{1}{10}x.$$

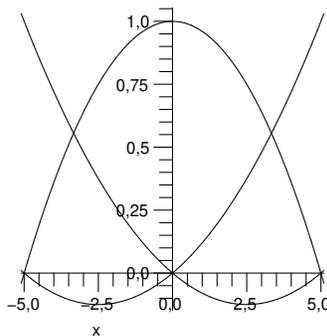


Abbildung 1.3: Lagrange-Polynome $L_k^2(x)$, $k = 0, 1, 2$.

Für das Interpolationspolynom $f_2(x)$ der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

folgt dann

$$f_2(x) = f(-5)L_0^2(x) + f(0)L_1^2(x) + f(5)L_2^2(x) = 1 - \frac{1}{26}x^2.$$

1.2 Abschätzung des Interpolationsfehlers

Für eine gegebene Funktion f bezeichne $f_n \in \Pi_n$ das Interpolationspolynom mit

$$f_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, n. \quad (1.13)$$

Dabei seien die $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_i \in [a, b]$ in einem beschränkten Intervall $[a, b]$ gegeben. Abzuschätzen bleibt der Fehler

$$e_n(x) := f(x) - f_n(x) \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Satz 1.1. Sei $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ $n+1$ -mal stetig differenzierbar, und sei $f_n(x)$ das Interpolationspolynom vom Grad n mit $f_n(x_i) = f(x_i)$ in den $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_i \in [a, b]$. Für den Interpolationsfehler in $x \in [a, b]$ gilt dann die Darstellung

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{j=0}^n (x - x_j) \quad (1.14)$$

mit einer geeigneten Zwischenwertstelle $\xi(x) \in [a, b]$.

Der Beweis von Satz 1.1 beruht auf einer Anwendung des Satzes von Rolle:

Satz 1.2 (Satz von Rolle). Sei $f(x)$ für $x \in [a, b]$ stetig, differenzierbar in (a, b) , und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es wenigstens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis: Eine in $[a, b]$ stetige Funktion nimmt dort ihr Maximum und ihr Minimum an. Folglich existieren $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit

$$f(\alpha) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(\beta).$$

Im Fall $f(\alpha) = f(\beta)$ ist $f(x)$ in $[a, b]$ konstant und somit gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Im Fall $f(\alpha) < f(\beta)$ sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden: Für $f(a) = f(b) < f(\beta)$ folgt $\beta \in (a, b)$, d.h. $f(x)$ hat in β ein lokales Maximum und es folgt $f'(\beta) = 0$.

Für $f(a) = f(b) > f(\alpha)$ folgt entsprechend, dass $f(x)$ in $\alpha \in (a, b)$ ein lokales Minimum hat, d.h. es gilt $f'(\alpha) = 0$. ■

Beweis von Satz 1.1: In den Stützstellen $x = x_i$ folgt aus den Interpolationsgleichungen (1.13)

$$e_n(x_i) = f(x_i) - f_n(x_i) = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Für die von einem reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$g_\alpha(x) := e_n(x) - \alpha \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

folgt dann

$$g_\alpha(x_i) = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Für ein beliebiges $\bar{x} \in [a, b]$ mit $\bar{x} \neq x_i$ für $i = 0, \dots, n$ ist

$$\bar{\alpha} = \frac{e_n(\bar{x})}{\prod_{j=0}^n (\bar{x} - x_j)}$$

wohldefiniert und es folgt

$$g_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0.$$

Damit hat die Funktion $g_{\bar{\alpha}}(x)$ im Intervall $[a, b]$ $n + 2$ paarweise verschiedene Nullstellen x_0, \dots, x_n und \bar{x} . Nach dem Satz von Rolle besitzt dann $g'_{\bar{\alpha}}(x)$ in $[a, b]$ $n + 1$ paarweise verschiedene Nullstellen und durch rekursives Anwenden folgt, daß $g_{\bar{\alpha}}^{(n+1)}(x)$ in $[a, b]$ eine Nullstelle $\xi(\bar{x}) \in [a, b]$ besitzt. Für diese ist

$$\begin{aligned} 0 = g_{\bar{\alpha}}^{(n+1)}(\xi(\bar{x})) &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[f(x) - f_n(x) - \bar{\alpha} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right]_{x=\xi(\bar{x})} \\ &= f^{(n+1)}(\xi(\bar{x})) - \bar{\alpha} (n+1)! \end{aligned}$$

und somit

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(\bar{x})).$$

Dann folgt

$$0 = g_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f_n(\bar{x}) - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(\bar{x})) \prod_{j=0}^n (\bar{x} - x_j)$$

und somit gilt

$$f(\bar{x}) - f_n(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(\bar{x})) \prod_{j=0}^n (\bar{x} - x_j)$$

für alle $\bar{x} \in [a, b]$ mit $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$. Offensichtlich bleibt dies auch für alle Stützstellen $\bar{x} = x_i$, $i = 0, \dots, n$, richtig, da dann beide Seiten Null sind. ■

Folgerung 1.1. *Aus der punktweisen Fehlerdarstellung (1.14) folgt auch eine Fehlerabschätzung in der Maximum-Norm,*

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| &= \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right|. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Beispiel 1.3. *Betrachtet wird die Interpolationsaufgabe zur Approximation der Funktion $f(x) = \sin x$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Für $n = 1$ ist*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad f_1(x) = \frac{2}{\pi} x$$

und es gilt die Fehlerabschätzung, mit $|f''(x)| = |-\sin x| \leq 1$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f(x) - f_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{\pi^2}{32} \approx 0.3084.$$

Dabei wird das Maximum für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen. Andererseits ist

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f(x) - f_1(x)| = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \sin x - \frac{2}{\pi} x \right| \approx 0.2105.$$

Der tatsächliche Interpolationsfehler wird in diesem Beispiel um einen Faktor von ca. 1.5 überschätzt.

Die Abschätzung (1.15) des Interpolationsfehlers $f(x) - f_n(x)$ zeigt, daß neben der Differenzierbarkeit der zu approximierenden Funktion $f(x)$ auch die Wahl der Stützstellen x_i wesentlich für die Güte der Approximation f_n ist, siehe hierzu auch die beiden folgenden Beispiele.

Beispiel 1.4. *Für die lineare Interpolierende $f_1(x) = x$ der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in [0, 1]$ mit den Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ folgt für den Fehler die Darstellung*

$$f(x) - f_1(x) = \frac{1}{8} [\xi(x)]^{-3/2} x(1-x)$$

für $x \in (0, 1)$ mit einer geeigneten (unbekannten) Zwischenwertstelle $\xi(x) \in (0, 1)$. Offenbar kann in diesem Beispiel nicht auf die Fehlerabschätzung (1.15) geschlossen werden, da das Maximum

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} x^{-3/2}$$

nicht existiert.

Beispiel 1.5. *Die Interpolation der Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für } x \in [-5, +5]$$

in den gleichmäßig verteilten Stützstellen

$$x_i = -5 + \frac{10i}{n} \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

ergibt die in Abbildung 1.4 für $n = 5$ und $n = 10$ dargestellten Interpolationspolynome mit den in der Nähe der Randpunkte ± 5 auftretenden Oszillationen.

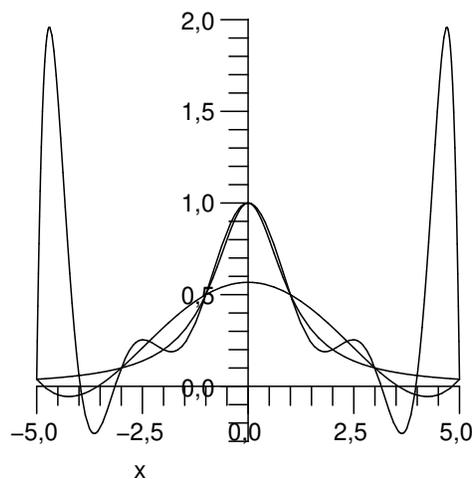


Abbildung 1.4: Interpolationspolynome $f_5(x)$ und $f_{10}(x)$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Die in Beispiel 1.5 betrachtete Interpolationsaufgabe motiviert die Wahl der Stützstellen x_j in einer solchen Weise, so daß

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right|$$

minimal wird. Zu lösen ist also das Minimierungsproblem

$$\min_{x_0, \dots, x_n} \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right|.$$

Die Lösung dieser Min–Max–Aufgabe beruht auf den im folgenden Abschnitt behandelten Tschebyscheff–Polynomen.

1.3 Tschebyscheff-Polynome

Der Raum Π_n der Polynome vom Grad n kann neben der Beschreibung durch die Monome x^k bzw. durch die Lagrange-Polynome $L_k^n(x)$ auch durch die Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ charakterisiert werden. Diese werden rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

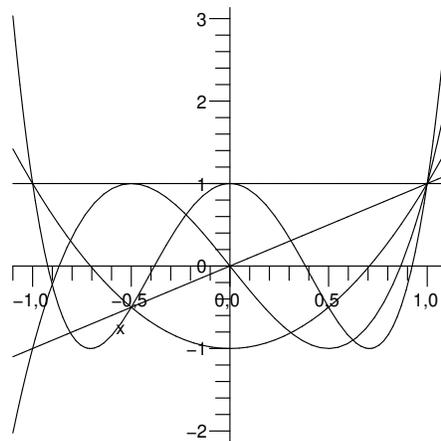


Abbildung 1.5: Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ für $k = 0, \dots, 4$.

Lemma 1.2. Für $x \in [-1, +1]$ und $k = 0, 1, 2, \dots$ gilt für die in (1.16) definierten Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ die alternative Darstellung

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x). \quad (1.17)$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach k . Mit $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$ gilt offenbar die Induktionsverankerung für $k = 0$ und für $k = 1$.

Aus dem Additionstheorem

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

folgt

$$\cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \beta$$

und mit

$$\alpha := (k + 1) \arccos x, \quad \beta := (k - 1) \arccos x$$

ergibt sich dann die Behauptung

$$\begin{aligned}\cos[(k+1)\arccos x] &= 2\cos[k\arccos x]\cos\arccos x - \cos[(k-1)\arccos x] \\ &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) = T_{k+1}(x)\end{aligned}$$

für alle $k = 1, 2, \dots$ ■

Aus der Darstellung (1.17) lassen sich nun einige wichtige Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ ablesen. Zunächst ist

$$\max_{x \in [-1, +1]} |T_k(x)| = \max_{x \in [-1, +1]} |\cos(k \arccos x)| = 1. \quad (1.18)$$

Für

$$\tilde{x}_i^{(k)} = \cos \frac{i\pi}{k} \quad \text{für } i = 0, \dots, k \quad (1.19)$$

gilt dabei

$$T_k(\tilde{x}_i^{(k)}) = \cos(k \arccos \tilde{x}_i^{(k)}) = \cos i\pi = (-1)^i \quad \text{für } i = 0, \dots, k.$$

Im Intervall $[-1, 1]$ hat das Tschebyscheff-Polynom $T_k(x)$ also k Vorzeichenwechsel, d.h. $T_k(x)$ besitzt in $[-1, 1]$ k Nullstellen. Diese ergeben sich aus der Forderung

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x) = 0$$

bzw.

$$k \arccos x = \frac{\pi}{2} + i\pi \quad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt

$$x_i^{(k)} = \cos \frac{(1+2i)\pi}{2k} \quad \text{für } i = 0, \dots, k-1. \quad (1.20)$$

Neben der hier durch die Rekursionsvorschrift (1.16) erfolgten Definition der Tschebyscheff-Polynome und der dazu äquivalenten Darstellung (1.17) durch trigonometrische Polynome ermöglichen die Tschebyscheff-Polynome eine dritte Darstellung, die insbesondere für die Funktionsauswertung von $T_k(x)$ für $x > 1$ wesentlich sein wird.

Lemma 1.3. *Für $k = 0, 1, 2, \dots$ gelten für die durch (1.16) definierten Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ die Darstellungen*

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k \right] \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-k} \right]. \quad (1.22)$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach k . Für $k = 0$ und für $k = 1$ gilt (1.21) offensichtlich. Als Induktionsvoraussetzung gelte also

$$\begin{aligned}T_{k-1}(x) &= \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^{k-1} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{k-1} \right], \\ T_k(x) &= \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k \right].\end{aligned}$$

Mit der rekursiven Definition (1.16) der Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ folgt

$$\begin{aligned}
 T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \\
 &= x \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^{k-1} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{k-1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1})^{k-1} \left[2x(x + \sqrt{x^2 - 1}) - 1 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 - 1})^{k-1} \left[2x(x - \sqrt{x^2 - 1}) - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Die erste Behauptung (1.21) ergibt sich nun aus

$$2x(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) - 1 = x^2 \pm 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1 = (x \pm \sqrt{x^2 - 1})^2.$$

Die zweite Behauptung (1.22) folgt unmittelbar aus

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{[x - \sqrt{x^2 - 1}][x + \sqrt{x^2 - 1}]}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

■

Für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b$ definiert

$$x = \frac{b + a - 2t}{b - a} \tag{1.23}$$

eine Transformation von $[-1, +1]$ auf $[a, b]$. Diese Transformation ermöglicht die Definition der skalierten Tschebyscheff-Polynome

$$\tilde{T}_k(t) := \frac{T_k\left(\frac{b+a-2t}{b-a}\right)}{T_k\left(\frac{b+a}{b-a}\right)} \quad \text{für } t \in [a, b]. \tag{1.24}$$

Nach Konstruktion ist $\tilde{T}_k(0) = 1$, d.h. $\tilde{T}_k \in \Pi_k^1$ mit

$$\Pi_k^1 = \left\{ p_k \in \Pi_k : p_k(0) = 1 \right\}.$$

Die modifizierten Tschebyscheff-Polynome $\tilde{T}_n \in \Pi_n^1$ sind die Polynome aus Π_n^1 mit dem kleinsten Maximum im Intervall $[a, b]$:

Satz 1.3. *Für $0 < a < b$ sind die modifizierten Tschebyscheff-Polynome $\tilde{T}_n(t)$ Lösung der Minimierungsaufgabe*

$$\min_{p_n \in \Pi_n^1} \max_{t \in [a, b]} |p_n(t)| = \max_{t \in [a, b]} |\tilde{T}_n(t)| = \frac{2q^n}{1 + q^{2n}} \quad \text{mit} \quad q = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt indirekt durch die Annahme, es existiere ein Polynom $q_n \in \Pi_n^1$ mit

$$\max_{t \in [a,b]} |q_n(t)| < \max_{t \in [a,b]} |\tilde{T}_n(t)|.$$

Für die durch (1.19) gegebenen Argumente

$$\tilde{x}_i^{(n)} = \cos \frac{i\pi}{n} \in [-1, 1]$$

ist

$$\tilde{t}_i^{(n)} := \frac{1}{2} \left[(b+a) - (b-a)\tilde{x}_i^{(n)} \right] \in [a, b] \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Dann wird durch

$$\tilde{T}_n(\tilde{t}_i^{(n)}) = \frac{T_n(\tilde{x}_i^{(n)})}{T_n\left(\frac{b+a}{b-a}\right)} = \frac{(-1)^i}{T_n\left(\frac{b+a}{b-a}\right)}$$

das Maximum bzw. das Minimum des modifizierten Tschebyscheff-Polynoms $\tilde{T}_n(t)$ in $[a, b]$ angenommen. In diesen Punkten gilt

$$\left| q_n(\tilde{t}_i^{(n)}) \right| \leq \max_{t \in [a,b]} |q_n(t)| < \frac{1}{T_n\left(\frac{b+a}{b-a}\right)} \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Insbesondere für $i = 2j$ ist $\tilde{T}_n(\tilde{t}_{2j}^{(n)}) > 0$ und somit gilt

$$-\tilde{T}_n(\tilde{t}_{2j}^{(n)}) < q_n(\tilde{t}_{2j}^{(n)}) < \tilde{T}_n(\tilde{t}_{2j}^{(n)}).$$

Entsprechend ergibt sich für $i = 2j + 1$ $\tilde{T}_n(\tilde{t}_{2j+1}^{(n)}) < 0$ und somit gilt

$$\tilde{T}_n(\tilde{t}_{2j+1}^{(n)}) < q_n(\tilde{t}_{2j+1}^{(n)}) < -\tilde{T}_n(\tilde{t}_{2j+1}^{(n)}).$$

Für das Polynom $r_n(t) := \tilde{T}_n(t) - q_n(t) \in \Pi_n$ folgt dann

$$r_n(\tilde{t}_{2j}^{(n)}) = \tilde{T}_n(\tilde{t}_{2j}^{(n)}) - q_n(\tilde{t}_{2j}^{(n)}) > 0$$

und

$$r_n(\tilde{t}_{2j+1}^{(n)}) = \tilde{T}_n(\tilde{t}_{2j+1}^{(n)}) - q_n(\tilde{t}_{2j+1}^{(n)}) < 0.$$

Zwischen den $n + 1$ paarweise verschiedenen Stellen $\tilde{t}_i^{(n)}$ finden also n Vorzeichenwechsel statt, d.h. das Polynom $r_n(t)$ besitzt im Intervall $[a, b]$ mindestens n Nullstellen. Wegen $\tilde{T}_n \in \Pi_n^1$ und $q_n \in \Pi_n^1$ ist weiterhin

$$r_n(0) = \tilde{T}_n(0) - q_n(0) = 1 - 1 = 0$$

und somit ist Null eine weitere Nullstelle von $r_n(t)$. Damit besitzt das Polynom $r_n(t)$ vom Polynomgrad n auf der reellen Achse mindestens $n + 1$ Nullstellen. Daraus folgt $r_n(t) \equiv 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $q_n = \tilde{T}_n$ im Widerspruch zur Annahme.

Zu bestimmen bleibt der maximale Wert von

$$\max_{t \in [a, b]} \left| \tilde{T}_n(t) \right| = \frac{1}{T_n\left(\frac{b+a}{b-a}\right)}.$$

Mit der Darstellung (1.22) und

$$\begin{aligned} q &= \frac{b+a}{b-a} + \sqrt{\left(\frac{b+a}{b-a}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{b-a} \left[(b+a) + \sqrt{(b+a)^2 - (b-a)^2} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \left[b+a + 2\sqrt{ab} \right] \\ &= \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \end{aligned}$$

ist schließlich

$$T_n\left(\frac{b+a}{b-a}\right) = \frac{1}{2} [q^n + q^{-n}] = \frac{q^{2n} + 1}{2q^n}.$$

■

Für das Tschebyscheff-Polynom $T_{n+1} \in \Pi_{n+1}$ mit den Nullstellen $x_i^{(n+1)}$ gilt die Darstellung

$$T_{n+1}(x) = \alpha \prod_{i=0}^n (x - x_i^{(n+1)}) = \alpha x^{n+1} + p_n(x)$$

mit einem Polynom $p_n(x)$ vom Polynomgrad n . Andererseits ergibt sich aus der rekursiven Definition (1.16) der Tschebyscheff-Polynome die Darstellung

$$T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + p_n(x)$$

wieder mit einem Polynom $p_n \in \Pi_n$ vom Polynomgrad n . Durch Vergleich der führenden Koeffizienten folgt $\alpha = 2^n$ und somit

$$T_{n+1}(x) = 2^n \prod_{i=0}^n (x - x_i^{(n+1)}).$$

Für $x \in [-1, +1]$ gilt dann

$$\left| \prod_{i=0}^n (x - x_i^{(n+1)}) \right| = \left| 2^{-n} T_{n+1}(x) \right| \leq 2^{-n}.$$

Werden also im Intervall $[-1, +1]$ die Nullstellen $x_i^{(n+1)}$ des Tschebyscheff-Polynoms $T_{n+1}(x)$ als Interpolationsknoten x_i gewählt, d.h. ist

$$f_n(x_i^{(n+1)}) = f(x_i^{(n+1)}) \quad \text{für } i = 0, \dots, n,$$

dann ergibt sich aus (1.15) die Fehlerabschätzung

$$\max_{x \in [-1, +1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2^{-n}}{(n+1)!} \max_{x \in [-1, +1]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (1.25)$$

Für ein beliebig gegebenes Intervall $[a, b]$ können die Stützstellen aus $[-1, +1]$ durch eine geeignete Transformation entsprechend übertragen werden: Für die Nullstellen $x_i^{(n+1)}$ von $T_{n+1}(x)$ ergeben sich die transformierten Stützstellen

$$t_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(b+a) - (b-a)x_i^{(n+1)} \right] \in [a, b] \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Beschreibt $f_n(t)$ das Interpolationspolynom der im Intervall $[a, b]$ gegebenen Funktion $f(t)$ mit

$$f_n(t_i^{(n+1)}) = f(t_i^{(n+1)}) \quad \text{für } i = 0, \dots, n,$$

dann lautet die Darstellung (1.14) des Fehlers für $t \in [a, b]$ und Rückführung auf $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f(t) - f_n(t) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(t)) \prod_{j=0}^n (t - t_j^{(n+1)}) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(t)) \prod_{j=0}^n \left[\frac{1}{2}(b-a) \left(x_i^{(n+1)} - x \right) \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(t)) (-1)^{n+1} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} \prod_{j=0}^n \left(x - x_j^{(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(t)) (-1)^{n+1} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} 2^{-n} T_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Dann ergibt sich die Fehlerabschätzung

$$\max_{t \in [a, b]} |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{2^{-n}}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} \max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|, \quad (1.26)$$

welche für $[a, b] = [-1, 1]$ mit (1.25) übereinstimmt.

Beispiel 1.6. Die Nullstellen $x_i^{(n+1)}$ des Tschebyscheff-Polynoms $T_{n+1}(x)$ im Intervall $[-1, 1]$ sind gegeben durch

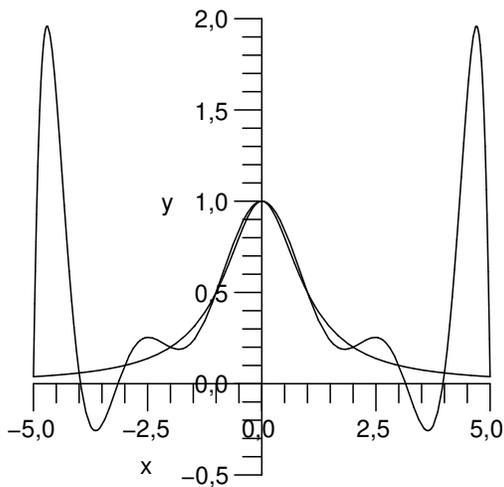
$$x_i^{(n+1)} = \cos \frac{(1+2i)\pi}{2(n+1)} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Für die Interpolation der Funktion $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ im Intervall $[-5, 5]$ ergeben sich dann die transformierten Stützstellen

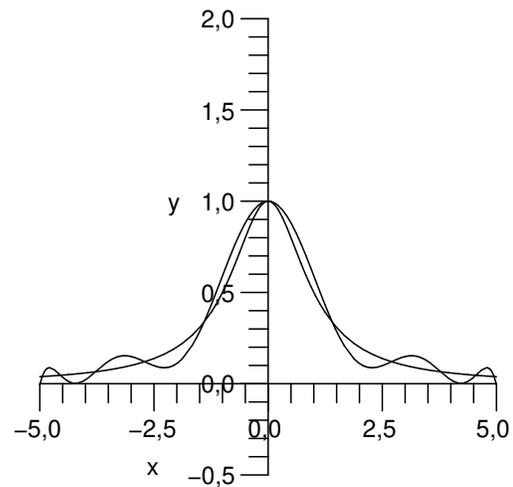
$$t_i^{(n+1)} = -5 x_i^{(n+1)} = -5 \cos \frac{(1+2i)\pi}{2(n+1)}, \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\max_{t \in [-5, 5]} |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{2^{-n}}{(n+1)!} 5^{n+1} \max_{t \in [-5, 5]} |f^{(n+1)}(t)|.$$



$$t_i = -5 + \frac{i}{10}, \quad i = 0, \dots, 10$$



$$t_i = -5 \cos \frac{(1+2i)\pi}{22}, \quad i = 0, \dots, 10$$

Abbildung 1.6: Interpolationspolynome $f_{10}(t)$ von $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

1.4 Hermite-Interpolation

Setzt man in den $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ neben den Funktionswerten $f(x_i)$ auch die ersten Ableitungen $f'(x_i)$ der zu interpolierenden Funktion $f(x)$ voraus, so kann aus der Kenntnis dieser Daten ein Interpolationspolynom

$$f_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k \quad (1.27)$$

gewonnen werden. Die Interpolationsgleichungen zur Bestimmung der $2n + 2$ unbekanntem Zerlegungskoeffizienten a_0, \dots, a_{2n+1} lauten dann

$$f_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad f'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, n. \quad (1.28)$$

Das resultierende Interpolationspolynom $f_{2n+1}(x)$ wird als Hermitesches Interpolationspolynom bezeichnet. Die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (1.28) ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Interpolationsaufgabe.

Satz 1.4. *Für paarweise verschiedene Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ besitzt die Hermite'sche Interpolationsaufgabe (1.28) eine eindeutig bestimmte Lösung $f_{2n+1}(x)$.*

Beweis: Seien $f_{2n+1}(x)$ und $g_{2n+1}(x)$ zwei Lösungen der Hermite'schen Interpolationsaufgabe (1.28), d.h. es gelten

$$f_{2n+1}(x_i) = g_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad f'_{2n+1}(x_i) = g'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Dann hat das Polynom $r_{2n+1}(x) = f_{2n+1}(x) - g_{2n+1}(x)$ die $n + 1$ doppelten Nullstellen x_i , insgesamt also $2n + 2$ Nullstellen. Andererseits ist nach Konstruktion der maximale Polynomgrad von $r_{2n+1}(x)$ $2n + 1$. Daraus folgt $r_{2n+1}(x) \equiv 0$ und somit die Gleichheit $f_{2n+1}(x) = g_{2n+1}(x)$, d.h. die Lösung der Hermite'schen Interpolationsaufgabe (1.28) ist eindeutig. Da (1.28) einem quadratischen linearen Gleichungssystem der Dimension $2n + 2$ entspricht, folgt daraus auch die Lösbarkeit von (1.28). ■

Beispiel 1.7. *Für die Hermite-Interpolation der Funktion $f(x) = \sin x$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ sei $n = 1$. In den Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ist dann*

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Für das Interpolationspolynom

$$f_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

ist

$$f'_3(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2.$$

Die Interpolationsgleichungen (1.28) lauten also

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_0 + a_1\frac{\pi}{2} + a_2\frac{\pi^2}{4} + a_3\frac{\pi^3}{8} = 1, \quad a_1 + 2a_2\frac{\pi}{2} + 3a_3\frac{\pi^2}{4} = 0.$$

Als Lösung ergibt sich

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{4(3 - \pi)}{\pi^2}, \quad a_3 = \frac{4(\pi - 4)}{\pi^3}$$

und somit

$$f_3(x) = x + \frac{4(3 - \pi)}{\pi^2}x^2 + \frac{4(\pi - 4)}{\pi^3}x^3.$$

Analog zu Satz 1.1 kann eine Fehlerabschätzung für den Interpolationsfehler des Hermite-Interpolationspolynoms (1.27) hergeleitet werden.

Satz 1.5. Sei $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ $2n + 2$ -mal stetig differenzierbar, und sei $f_{2n+1}(x)$ das Hermitesche Interpolationspolynom vom Grad $2n + 1$ mit

$$f_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad f'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

in $n + 1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_i \in [a, b]$. Für den Interpolationsfehler gilt dann die Darstellung

$$f(x) - f_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x)) \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2 \quad \text{für } x \in [a, b] \quad (1.29)$$

mit einer geeigneten Zwischenwertstelle $\xi(x) \in [a, b]$.

Beweis: Für die von einem reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$g_\alpha(x) := f(x) - f_{2n+1}(x) - \alpha \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2$$

gilt nach Konstruktion für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$g_\alpha(x_i) = g'_\alpha(x_i) = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Für ein beliebiges $\bar{x} \in [a, b]$ mit $\bar{x} \neq x_i$ für $i = 0, \dots, n$ ist

$$\bar{\alpha} = \frac{f(\bar{x}) - f_{2n+1}(\bar{x})}{\prod_{j=0}^n (x - x_j)^2}$$

wohldefiniert und es folgt

$$g_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0.$$

Es ist $\bar{x} \in [x_{i^*-1}, x_{i^*}]$ für genau einen Index $1 \leq i^* \leq n$. Somit gilt

$$g_{\bar{\alpha}}(x_{i^*-1}) = g_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = g_{\bar{\alpha}}(x_{i^*}) = 0.$$

Dann existieren Zwischenwertstellen $\xi_{i^*,1} \in (x_{i^*-1}, \bar{x})$ und $\xi_{i^*,2} \in (\bar{x}, x_{i^*})$ mit

$$g'_{\bar{\alpha}}(\xi_{i^*,1}) = g'_{\bar{\alpha}}(\xi_{i^*,2}) = 0.$$

Für die paarweise verschiedenen Argumente

$$x_{i^*-1} < \xi_{i^*,1} < \xi_{i^*,2} < x_{i^*}$$

gilt also

$$g'_{\bar{\alpha}}(x_{i^*-1}) = g'_{\bar{\alpha}}(\xi_{i^*,1}) = g'_{\bar{\alpha}}(\xi_{i^*,2}) = g'_{\bar{\alpha}}(x_{i^*}) = 0.$$

Damit besitzt $g''_{\bar{\alpha}}(x)$ im Intervall (x_{i^*-1}, x_{i^*}) drei voneinander verschiedene Nullstellen. Für $i = 1, \dots, n$ sei nun $[x_{i-1}, x_i]$ ein Intervall mit $\bar{x} \notin [x_{i-1}, x_i]$. Aus

$$g_{\bar{\alpha}}(x_{i-1}) = g_{\bar{\alpha}}(x_i) = 0$$

folgt die Existenz einer Zwischenwertstelle $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ mit $g'_{\bar{\alpha}}(\xi_i) = 0$. Für

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

gilt also

$$g'_{\bar{\alpha}}(x_{i-1}) = g'_{\bar{\alpha}}(\xi_i) = g'_{\bar{\alpha}}(x_i) = 0,$$

woraus die Existenz von zwei paarweise verschiedenen Nullstellen von $g''_{\bar{\alpha}}(x)$ im Intervall (x_{i-1}, x_i) folgt.

Die Funktion $g''_{\bar{\alpha}}(x)$ hat also im Intervall $[a, b]$ insgesamt

$$2(n-1) + 3 = 2n + 1$$

voneinander verschiedene Nullstellen. Die rekursive Anwendung des Satzes von Rolle ergibt nun die Existenz einer Nullstelle $\xi(\bar{x}) \in (a, b)$ von $g_{\bar{\alpha}}^{(2n+2)}(x)$ mit

$$0 = g_{\bar{\alpha}}^{(2n+2)}(\xi(\bar{x})) = f^{(2n+2)}(\xi(\bar{x})) - \bar{\alpha}(2n+2)!,$$

woraus

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(\bar{x}))$$

und somit die behauptete Darstellung folgt. ■

1.5 Stückweise polynomiale Interpolation

Die bisher verwendeten Ansatzfunktionen zur Bestimmung des Interpolationspolynoms $f_n(x)$ sind global, d.h. sie sind stets im gesamten Intervall $[a, b]$ auszuwerten. Die Anwendung der Fehlerabschätzung (1.15) für ein Interpolationspolynom n -ten Grades erfordert darüberhinaus die Stetigkeit der $(n+1)$ -ten Ableitung der zu interpolierenden Funktion $f(x)$. Für viele Anwendungen ist dies aber eine zu starke Restriktion. Deshalb sollen im folgenden Approximationsmethoden betrachtet werden, die neben lokalen Ansatzfunktionen auch Fehlerabschätzungen für Funktionen mit geringerer Regularität ermöglichen.

Gegeben seien im Intervall $[a, b]$ $n+1$ voneinander verschiedene Stützstellen x_i mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Zum Beispiel gilt für gleichmässig verteilte Stützstellen

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} = a + ih \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

mit der Schrittweite

$$h = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

In den Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, wird nun die Interpolation einer gegebenen Funktion $f(x)$ durch ein lokales Interpolationspolynom $f_{i,p_i}(x)$ vom Polynomgrad p_i betrachtet. Für die Stützstellen im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ gelte dabei

$$x_{i-1} = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,p_i} = x_i.$$

Die lokalen Interpolationsgleichungen lauten also

$$f_{i,p_i}(x_{i,k}) = f(x_{i,k}) \quad \text{für } k = 0, \dots, p_i.$$

Wegen

$$f_{i-1,p_{i-1}}(x_{i-1,p_{i-1}}) = f(x_{i-1,p_{i-1}}) = f(x_{i-1}) = f(x_{i,0}) = f_{i,p_i}(x_{i,0})$$

folgt dann die globale Stetigkeit des lokal definierten Interpolationspolynoms.

Aus der Fehlerabschätzung (1.15) ergibt sich für den lokalen Interpolationsfehler

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f_{i,p_i}(x)| \leq \frac{1}{(p_i + 1)!} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f^{(p_i+1)}(x)| \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \left| \prod_{j=0}^{p_i} (x - x_{i,j}) \right|. \quad (1.30)$$

Insbesondere für eine lokal lineare Interpolation mit $p_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ sind $x_{i,0} = x_{i-1}$ und $x_{i,1} = x_i$ und es folgt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f_{i,1}(x)| &\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)| \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| \\ &= \frac{1}{8} (x_i - x_{i-1})^2 \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Sind in den Stützstellen x_i die Funktionswerte der zu interpolierenden Funktion $f(x)$ durch $f_i = f(x_i)$ gegeben, so folgt für die lokal lineare Interpolierende $f_n(x) := f_{i,1}(x)$ die Darstellung

$$f_n(x) = f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} [f_i - f_{i-1}] \quad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.32)$$

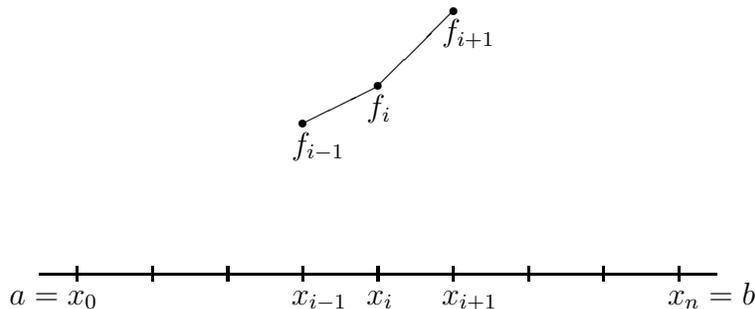


Abbildung 1.7: Stückweise lineare Interpolation.

Die punktweise Fehlerabschätzung (1.31) setzt die Beschränktheit der zweiten Ableitung $f''(x)$ der zu interpolierenden Funktion $f(x)$ voraus. Im folgenden soll deshalb eine Abschätzung des Interpolationsfehlers in der L^2 -Norm

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f_n(x)]^2 dx$$

gewonnen werden. Dabei werden wir immer wieder auf die Cauchy–Schwarz Ungleichung

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b [g(x)]^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.33)$$

für quadrat-integrierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zurückgreifen.

Lemma 1.4. *Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer lokal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gilt*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{8} (x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx. \quad (1.34)$$

Beweis: Sei $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ der Mittelpunkt des Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$. Für $x \in (x_{i-1}, \bar{x}_i)$ folgt aus den Interpolationsgleichungen $f(x_{i-1}) = f_n(x_{i-1})$ zunächst

$$f(x) - f_n(x) = f(x) - f(x_{i-1}) + f_n(x_{i-1}) - f_n(x) = \int_{x_{i-1}}^x [f'(\xi) - f'_n(\xi)] d\xi.$$

Dann gilt, unter Verwendung der Cauchy–Schwarz Ungleichung (1.33),

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)|^2 &= \left| \int_{x_{i-1}}^x [f'(\xi) - f'_n(\xi)] d\xi \right|^2 \\ &\leq \left[\int_{x_{i-1}}^x 1 \cdot |f'(\xi) - f'_n(\xi)| d\xi \right]^2 \\ &\leq \int_{x_{i-1}}^x 1^2 d\xi \int_{x_{i-1}}^x [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi \\ &\leq (x - x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi \quad \text{für } x \in (x_{i-1}, \bar{x}_i). \end{aligned}$$

Integration nach $x \in (x_{i-1}, \bar{x}_i)$ liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} [f(x) - f_n(x)]^2 dx &\leq \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} (x - x_{i-1}) dx \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2} (\bar{x}_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi \\ &= \frac{1}{8} (x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$\int_{\bar{x}_i}^{x_i} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{8}(x_i - x_{i-1})^2 \int_{\bar{x}_i}^{x_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi$$

und durch Addition beider Anteile folgt die Behauptung. \blacksquare

Die Abschätzung (1.48) beschreibt eine Abschätzung des Interpolationsfehlers durch den Fehler in den Ableitungen. Dieser kann im folgenden weiter abgeschätzt werden.

Lemma 1.5. *Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer lokal zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gilt*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3}(x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x)]^2 dx. \quad (1.35)$$

Beweis: Wegen

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(s) - f'_n(s)] ds = f(x_i) - f(x_{i-1}) - f_n(x_i) + f_n(x_{i-1}) = 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f'(\xi) - f'_n(\xi) - \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(s) - f'_n(s)] ds \right]^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} [(f'(\xi) - f'_n(\xi)) - (f'(s) - f'_n(s))] ds \right]^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{\xi} \int_s^{x_i} [f''(t) - f''_n(t)] dt ds \right]^2 d\xi. \end{aligned}$$

Für die lokal linear Interpolierende $f_n(t)$ ist $f''_n(t) = 0$ und daher ist

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{\xi} \int_s^{x_i} f''(t) dt ds \right]^2 d\xi.$$

Durch wiederholte Anwendung der Cauchy–Schwarz Ungleichung (1.33) folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \cdot \int_s^{\xi} f''(t) dt ds \right]^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^2 ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_s^{\xi} f''(t) dt \right]^2 ds d\xi \\ &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_s^{\xi} 1 \cdot f''(t) dt \right]^2 ds d\xi \\ &\leq \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \int_s^{\xi} 1^2 dt \right| \cdot \left| \int_s^{\xi} [f''(t)]^2 dt \right| ds d\xi \\ &\leq \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi - s| ds d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi - s| ds d\xi &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{\xi} (\xi - s) ds d\xi = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-(\xi - s)^2]_{x_{i-1}}^{\xi} d\xi \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\xi - x_{i-1})^2 d\xi = \frac{1}{3}(x_i - x_{i-1})^3 \end{aligned}$$

folgt schließlich die Behauptung,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(\xi) - f'_n(\xi)]^2 d\xi \leq \frac{1}{3}(x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(t)]^2 dt.$$

■

Durch Verknüpfung der Fehlerabschätzungen (1.48) und (1.35) ergibt sich:

Folgerung 1.2. Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer lokal zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gilt

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{24}(x_i - x_{i-1})^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x)]^2 dx. \quad (1.36)$$

Durch Summation der lokalen Fehlerabschätzungen ergibt sich nun:

Folgerung 1.3. Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer lokal zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gelten die Fehlerabschätzungen

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x)]^2 dx \leq \frac{1}{24} h^4 \int_a^b [f''(x)]^2 dx \quad (1.37)$$

und

$$\int_a^b [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3} h^2 \int_a^b [f''(x)]^2 dx \quad (1.38)$$

mit der globalen Maschenweite

$$h := \max_{i=1, \dots, n} h_i, \quad h_i := x_i - x_{i-1}.$$

Die Fehlerabschätzungen (1.35) und (1.36) setzen voraus, dass die zu interpolierende Funktion $f(x)$ wenigstens zweimal stetig differenzierbar ist. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, können die Fehlerabschätzungen (1.35) und (1.36) nicht angewendet werden. Für eine nur einmal stetig differenzierbare Funktion gilt die folgende Abschätzung:

Lemma 1.6. *Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gilt*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx \leq 4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x)]^2 dx. \quad (1.39)$$

Beweis: Mit der Dreiecksungleichung gilt zunächst

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx \leq 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x)]^2 dx + 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'_n(x)]^2 dx.$$

Für die linear Interpolierende $f_n(x)$ folgt, wieder unter Verwendung der Cauchy–Schwarz Ungleichung (1.33),

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'_n(x)]^2 dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(s) ds \right]^2 \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(s)]^2 ds. \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. ■

Für die Abschätzung des Interpolationsfehlers in L^2 ergibt sich dann:

Folgerung 1.4. *Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer lokal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gilt*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x)]^2 dx. \quad (1.40)$$

und

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2} h^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx. \quad (1.41)$$

Folgerung 1.5. *Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer lokal zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gelten die Fehlerabschätzungen*

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2} h^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \quad (1.42)$$

und

$$\int_a^b [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx \leq 4 \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x)]^2 dx = 4 \int_a^b [f'(x)]^2 dx. \quad (1.43)$$

Die Fehlerabschätzungen (1.37), (1.38), (1.42) und (1.43) können für $s = 1, 2$ und $\sigma = 0, 1$ kompakt in der folgenden Form geschrieben werden,

$$\int_a^b [f^{(\sigma)}(x) - f_n^{(\sigma)}]^2 dx \leq c(s, \sigma) h^{2(s-\sigma)} \int_a^b [f^{(s)}(x)]^2 dx, \quad (1.44)$$

mit

$$c(2, 0) = \frac{1}{24}, \quad c(2, 1) = \frac{1}{3}, \quad c(1, 0) = \frac{1}{2}, \quad c(1, 1) = 4.$$

Mit

$$\|f\|_0 := \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}, \quad \|f\|_1 := \sqrt{\int_a^b [f'(x)]^2 dx}, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b [f''(x)]^2 dx}$$

können wir die Fehlerabschätzung (1.44) auch in der Form

$$\|f - f_n\|_\sigma \leq c h^{s-\sigma} \|f\|_s. \quad (1.45)$$

schreiben. Im folgenden zeigen wir, dass diese für die Fälle $\sigma \in (0, 1)$ und $s \in (1, 2)$ verallgemeinert werden kann.

Für eine gegebene Funktion $u(x)$, $x \in (a, b)$, betrachten wir die Kosinus-Reihe

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cos k\pi \frac{x-a}{b-a}$$

mit den Koeffizienten

$$u_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) dx, \quad u_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b u(x) \cos k\pi \frac{x-a}{b-a} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dabei haben wir die Orthogonalität

$$\int_a^b \cos k\pi \frac{x-a}{b-a} \cos \ell\pi \frac{x-a}{b-a} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ b-a & \text{für } k = \ell = 0, \\ \frac{b-a}{2} & \text{für } k = \ell \neq 0, \end{cases}$$

ausgenutzt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(x)]^2 dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} u_k u_\ell \int_a^b \cos k\pi \frac{x-a}{b-a} \cos \ell\pi \frac{x-a}{b-a} dx \\ &= (b-a) u_0^2 + \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2, \end{aligned}$$

und für

$$u'(x) = -\frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k k\pi \sin k\pi \frac{x-a}{b-a}$$

folgt analog

$$\begin{aligned} \int_a^b [u'(x)]^2 dx &= \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} u_k u_\ell k\pi \ell\pi \int_a^b \sin k\pi \frac{x-a}{b-a} \sin \ell\pi \frac{x-a}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 (k\pi)^2. \end{aligned}$$

Ausgehend von

$$\|u\|_0^2 := \int_a^b [u(x)]^2 dx = (b-a) \left[u_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \right]$$

und

$$\|u\|_1^2 := \int_a^b [u'(x)]^2 dx = \frac{1}{2} (b-a) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \left(\frac{k\pi}{b-a} \right)^2$$

definieren wir für $\sigma \in (0, 1)$

$$\|u\|_\sigma^2 := \frac{1}{2} (b-a) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \left(\frac{k\pi}{b-a} \right)^{2\sigma}. \quad (1.46)$$

Unter Verwendung der Hölder-Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 0 \leq a_k, b_k,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u\|_\sigma^2 &= \frac{1}{2} (b-a) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \left(\frac{k\pi}{b-a} \right)^{2\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (b-a) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{2-2\sigma} \left(u_k \frac{k\pi}{b-a} \right)^{2\sigma} \\ &\leq \frac{1}{2} (b-a) \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(2-2\sigma)p} \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k \frac{k\pi}{b-a} \right)^{2\sigma q} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Insbesondere für

$$p = \frac{1}{1-\sigma}, \quad q = \frac{1}{\sigma}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \sigma + \sigma = 1$$

folgt

$$\|u\|_\sigma^2 \leq \frac{1}{2}(b-a) \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \right)^{1-\sigma} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \left(\frac{k\pi}{b-a} \right)^2 \right)^\sigma,$$

d.h.

$$\|u\|_\sigma^2 \leq \|u\|_0^{2(1-\sigma)} \|u\|_1^{2\sigma}.$$

Aus den Fehlerabschätzungen (1.37) und (1.38) folgt somit

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\sigma^2 &\leq \left(\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \right)^{1-\sigma} \left(\int_a^b [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx \right)^\sigma \\ &\leq \left(\frac{1}{24} h^4 \int_a^b [f''(x)]^2 dx \right)^{1-\sigma} \left(\frac{1}{3} h^2 \int_a^b [f''(x)]^2 dx \right)^\sigma \\ &= c h^{4-2\sigma} \int_a^b [f''(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

d.h. (1.45) für $s = 2$ und $\sigma \in (0, 1)$. Analog folgt aus (1.42) und (1.43)

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\sigma^2 &\leq \left(\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \right)^{1-\sigma} \left(\int_a^b [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx \right)^\sigma \\ &\leq \left(\frac{1}{2} h^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \right)^{1-\sigma} \left(4 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \right)^\sigma \\ &= c h^{2-2\sigma} \int_a^b [f'(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

d.h. (1.45) für $s = 1$ und $\sigma \in (0, 1)$.

Die Fehlerabschätzungen (1.35), (1.36), (1.39) und (1.48) setzen die zwei- bzw. einmalige Differenzierbarkeit der zu interpolierenden Funktion $f(x)$ voraus. Im folgenden betrachten wir eine Fehlerabschätzung für eine Funktion $f(x)$ mit dazwischenliegender Regularität.

Lemma 1.7. *Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ mit*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx < \infty, \quad s \in (0, 1).$$

Dann gilt

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx \leq (x_i - x_{i-1})^{2s} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx. \quad (1.47)$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f'(x) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f'(x) - \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(y) dy \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - f'(y)] dy \right]^2 dx.
\end{aligned}$$

Für $s \in (0, 1)$ folgt mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung (1.33)

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - f'_n(x)]^2 dx &= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{[f'(x) - f'(y)]}{|x - y|^{1/2+s}} |x - y|^{1/2+s} dy \right]^2 dx \\
&\leq \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - y|^{1+2s} dy dx \\
&\leq \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x_{i-1})^{1+2s} dy dx \\
&= (x_i - x_{i-1})^{2s} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx
\end{aligned}$$

die Behauptung. ■

Für die Abschätzung des Interpolationsfehlers ergibt sich:

Folgerung 1.6. Sei $f_n(x)$ das durch (1.32) definierte stückweise lineare Interpolationspolynom einer stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ mit

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx < \infty, \quad s \in (0, 1).$$

Dann gilt

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{8} (x_i - x_{i-1})^{2+2s} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx, \quad (1.48)$$

und durch Summation folgt

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{8} h^{2+2s} \int_a^b \int_a^b \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx, \quad (1.49)$$

d.h. (1.45) für $\tilde{s} := 1 + s \in (1, 2)$ und $\sigma = 0$. Insbesondere ist

$$\|f\|_{\tilde{s}}^2 := \int_a^b \int_a^b \frac{[f'(x) - f'(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx. \quad (1.50)$$

Bemerkung 1.1. Die Beschränkung von $s \in [1, 2]$ in der Fehlerabschätzung (1.45) wird einerseits durch die Differenzierbarkeit von f bestimmt, andererseits durch den Polynomgrad $p = 1$ der stückweise linearen Interpolation, d.h. es gilt $s \leq p + 1$. Entsprechend können diese Fehlerabschätzungen auf lokale Interpolationspolynome höheren Polynomgrades p übertragen werden.

Die Fehlerabschätzung (1.45) bleibt richtig für $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$, wobei für die zu interpolierende Funktion die Stetigkeit vorauszusetzen ist. Dies soll hier jedoch nicht weiter betrachtet werden. Später werden vergleichbare Fehlerabschätzungen für Projektionsverfahren mit stückweise konstanten Basisfunktionen hergeleitet.

Beispiel 1.8. Sei $f(x) = \sin x$ für $x \in [a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$. Dann ist

$$\|f\|_2 = \|f''\|_0 = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)^2 dx \right]^{1/2} = \left[\frac{\pi}{4} \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Für eine stückweise lineare Interpolation bezüglich der gleichmässig verteilten Stützstellen

$$x_i = ih \quad \text{für } i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{\pi}{2n}$$

folgt die Fehlerabschätzung

$$\|f - f_n\|_0 \leq \frac{\sqrt{6}}{12} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{6}}{96} \pi^{5/2} \frac{1}{n^2}.$$

In Tabelle 1.1 werden zusätzlich zur Fehlerabschätzung auch die tatsächlichen Fehler angegeben. Diese bestätigen insbesondere die quadratische Konvergenzordnung der stückweise linearen Interpolation.

	Fehlerabschätzung	Fehler $\ f - f_n\ _0$
2	0.111588	0.049236
4	0.027897	0.012434
8	0.006974	0.003116
16	0.001744	0.000787

Tabelle 1.1: Vergleich Interpolationsfehler mit Fehlerabschätzung.

Für eine globale Darstellung des durch (1.32) definierten stückweise linearen Interpolationspolynoms

$$I_n f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \varphi_k(x) \tag{1.51}$$

können Basisfunktionen

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_k, \\ 0 & \text{für } x = x_\ell \neq x_k, \\ \text{stückweise linear} & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden, siehe hierzu auch Abbildung 1.8.

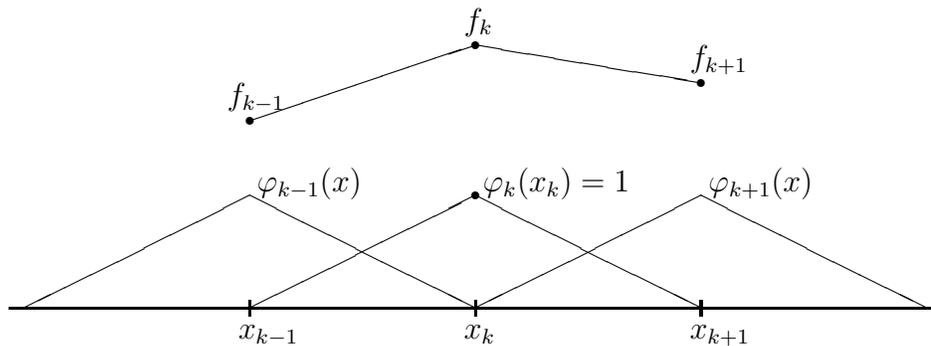


Abbildung 1.8: Ansatzfunktionen $\varphi_k(x)$ sowie $\varphi_{k\pm 1}(x)$.

Für die Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ ergibt sich daraus die funktionale Darstellung

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} & \text{für } x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} & \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.52)$$

Die Verwendung lokaler Basisfunktionen, z.B. stückweise linearer Ansatzfunktionen, ermöglicht eine einfache Auswertung des Interpolationspolynoms. Jedoch verlangt die Interpolationsaufgabe die Stetigkeit der zu approximierenden Funktion. Diese Voraussetzung kann durch die Verwendung von Projektionsmethoden vermieden werden.

1.6 Projektionsmethoden

Die Approximation einer gegebenen Funktion $f(x)$ durch ein Interpolationspolynom $f_n(x)$ erfordert zumindest die Stetigkeit der zu approximierenden Funktion $f(x)$. Diese Voraussetzung kann durch geeignete Projektionsmethoden abgeschwächt werden. Gesucht ist eine Approximation

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$$

mit zunächst beliebigen Ansatzfunktionen $\varphi_k(x)$, die den zugehörigen Fehler

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx &= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx \\ &= \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n a_k a_\ell \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_\ell(x) dx \\ &= \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n b_k f_k + \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n b_k b_\ell m_{k\ell} \end{aligned}$$

minimiert. Dabei sind

$$f_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad m_{k\ell} = \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_\ell(x) dx \quad \text{für } k, \ell = 0, \dots, n.$$

Aus der notwendigen Minimierungsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = 0 \quad \text{für alle } j = 0, \dots, n$$

folgt, unter Ausnutzung der Symmetrie $m_{k\ell} = m_{\ell k}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial a_j} \left[\int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k f_k + \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n a_k a_\ell m_{k\ell} \right] \\ &= -2f_j + \frac{\partial}{\partial a_j} \left[a_j^2 m_{jj} + \sum_{\ell=0, \ell \neq j}^n a_j a_\ell m_{j\ell} + \sum_{k=0, k \neq j}^n \sum_{\ell=0}^n a_k a_\ell m_{k\ell} \right] \\ &= -2f_j + 2a_j m_{jj} + \sum_{\ell=0, \ell \neq j}^n a_\ell m_{j\ell} + \sum_{k=0, k \neq j}^n a_k m_{kj} \\ &= -2f_j + 2 \sum_{k=0}^n a_k m_{kj}. \end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx \quad \text{für } j = 0, \dots, n, \quad (1.53)$$

bzw. mit dem linearen Gleichungssystem

$$M_h \underline{a} = \underline{f} \quad (1.54)$$

mit der Massematrix

$$M_h[j, k] = \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx \quad (1.55)$$

und dem Vektor der rechten Seite,

$$f_j = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx,$$

für $j, k = 0, \dots, n$. Wegen

$$M_h[j, k] = \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = M_h[k, j]$$

für alle $k, j = 0, \dots, n$ ist die Massematrix $M_h = M_h^\top$ symmetrisch, und wegen

$$\begin{aligned} (M_h \underline{a}, \underline{a}) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n M_h[j, k] a_k a_j = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_k a_j \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx > 0 \end{aligned}$$

für alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|\underline{a}\|_2 > 0$ positiv definit, wenn die Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ linear unabhängig sind. Insbesondere folgt daraus die Invertierbarkeit der Massematrix M_h , und somit die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (1.54).

Bei Verwendung der stückweise linearen Basisfunktionen (1.52) ergibt sich für die Einträge (1.55) der Massematrix

$$M_h[j, k] = \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad \text{für } j \neq k, k \pm 1.$$

Für die Nebendiagonaleinträge und $j = k \pm 1$ ist

$$\begin{aligned} M_h[k \pm 1, k] &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} dx \\ &= \frac{1}{(x_{k+1} - x_k)^2} \int_0^{x_{k+1} - x_k} (x_{k+1} - x_k - t) t dt = \frac{1}{6} (x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

Für die Hauptdiagonaleinträge und $j = k$ ist schließlich

$$\begin{aligned} M_h[k, k] &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right]^2 dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{3} (x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{3} (x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

Für eine gleichmäßige Unterteilung mit $h = x_{k+1} - x_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ folgt somit

$$M_h = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Die Massematrix M_h ist symmetrisch und positiv definit sowie schwach besetzt, d.h. M_h besitzt $2 + 3(n - 1) + 2$ Nichtnulleinträge. Damit können für die Lösung des linearen Gleichungssystems $M_h \underline{a} = \underline{f}$ effiziente Lösungsverfahren verwendet werden. Darauf soll an dieser Stelle jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Die voneinander linear unabhängigen Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ bilden einen linearen Raum

$$S_n = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^n.$$

Die durch die Lösung des linearen Gleichungssystems (1.54) eindeutig bestimmte Approximation $f_n \in S_n$ ist also Lösung des Variationsproblems

$$\int_a^b f_n(x) \varphi_j(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx \quad \text{für } j = 0, \dots, n,$$

bzw. von

$$\int_a^b f_n(x) g_n(x) dx = \int_a^b f(x) g_n(x) dx \quad \text{für alle } g_n \in S_n. \quad (1.56)$$

Offenbar gilt dann die Galerkin-Orthogonalität

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)] g_n(x) dx = 0 \quad \text{für alle } g_n \in S_n. \quad (1.57)$$

Die Approximation $f_n = Q_n f \in S_n$ wird als L^2 -Projektion von f bezeichnet.

Lemma 1.8. *Sei $Q_n f \in S_n$ die durch die Lösung des Variationsproblems (1.56) eindeutig bestimmte L^2 -Projektion einer gegebenen Funktion f . Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|f - Q_n f\|_0 \leq \|f - g_n\|_0 \quad \text{für alle } g_n \in S_n, \quad (1.58)$$

d.h. es gilt

$$\|f - f_n\|_0 = \min_{g_n \in S_n} \|f - g_n\|_0. \quad (1.59)$$

Beweis: Für den Fehler $f - Q_n f$ folgt mit der Galerkin-Orthogonalität (1.57) und der Cauchy-Schwarz Ungleichung (1.33)

$$\begin{aligned} \|f - Q_n f\|_0^2 &= \int_a^b [f(x) - Q_n f(x)][f(x) - Q_n f(x)] dx \\ &= \int_a^b [f(x) - Q_n f(x)][f(x) - g_n(x)] dx + \int_a^b [f(x) - Q_n f(x)][g_n(x) - f_n(x)] dx \\ &= \int_a^b [f(x) - Q_n f(x)][f(x) - g_n(x)] dx \\ &\leq \|f - Q_n f\|_0 \|f - g_n\|_0 \end{aligned}$$

für alle $g_n \in S_n$. Daraus folgt unmittelbar die Fehlerabschätzung (1.58). ■

Für das Beispiel der L^2 -Projektion in den Raum der stückweise linearen Funktionen kann die Fehlerabschätzung (1.58) mit der Fehlerabschätzung (1.45) kombiniert werden.

Folgerung 1.7. Sei $Q_n f \in S_n$ die durch die Lösung des Variationsproblems (1.56) eindeutig bestimmte stückweise lineare L^2 -Projektion einer gegebenen Funktion f mit $\|f\|_s < \infty$ für $s \in [1, 2]$. Sei weiterhin $I_n f$ das stückweise lineare Interpolationspolynom von f . Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\|f - Q_n f\|_0 \leq \|f - I_n f\|_0 \leq c h^s \|f\|_s. \quad (1.60)$$

Beispiel 1.9. Wie in Beispiel 1.8 betrachten wir die stückweise lineare Approximation der Funktion $f(x) = \sin x$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ bezüglich gleichmässig verteilten Stützstellen. Die Fehler der Interpolation $I_n f$ sowie der L^2 -Projektion $Q_n f$ sind in Tabelle 1.2 angegeben. In beiden Fällen beobachtet man eine quadratische Konvergenz, wobei im Fall der Projektion ein um den Faktor 2 reduzierter Fehler auftritt.

N	$\ f - I_n f\ _0$	$\ f - Q_n f\ _0$
2	4.92 $\cdot 10^{-2}$	2.14 $\cdot 10^{-2}$
4	1.24 $\cdot 10^{-2}$	5.17 $\cdot 10^{-3}$
8	3.12 $\cdot 10^{-3}$	1.28 $\cdot 10^{-3}$
16	7.87 $\cdot 10^{-4}$	3.19 $\cdot 10^{-4}$
32	1.95 $\cdot 10^{-4}$	7.96 $\cdot 10^{-5}$
64	4.87 $\cdot 10^{-5}$	1.99 $\cdot 10^{-5}$

Tabelle 1.2: Vergleich der L^2 -Fehler von Interpolation und L^2 -Projektion.

Für die Abschätzung der Ableitung des Fehlers der L^2 -Projektion muss anders wie bei der Interpolation vorgegangen werden. Für eine stückweise lineare Funktion $g_n \in S_n$ zeigen wir zunächst eine lokale inverse Ungleichung.

Lemma 1.9. Für eine stückweise lineare Funktion $g_n \in S_n$ mit

$$g_n(x) = g_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} [g_k - g_{k-1}] \quad \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k), k = 1, \dots, n$$

gilt die inverse Ungleichung

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [g'_n(x)]^2 dx \leq 12 (x_k - x_{k-1})^{-2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [g_n(x)]^2 dx. \quad (1.61)$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [g'_n(x)]^2 dx = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} (g_k - g_{k-1})^2 \leq \frac{2}{x_k - x_{k-1}} [g_k^2 + g_{k-1}^2]$$

und

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [g_n(x)]^2 dx &= \frac{1}{6} (x_k - x_{k-1}) \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_k \\ g_{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_k \\ g_{k-1} \end{pmatrix} \right) \\ &\geq \frac{1}{6} (x_k - x_{k-1}) [g_k^2 + g_{k-1}^2]. \end{aligned}$$

■

Für eine global gleichmässige Unterteilung mit $h = x_k - x_{k-1}$ für alle $k = 1, \dots, n$ folgt aus der lokalen inversen Ungleichung unmittelbar die globale inverse Ungleichung

$$\int_a^b [g'_n(x)]^2 dx \leq 12 h^{-2} \int_a^b [g_n(x)]^2 dx \quad \text{für alle } g_n \in S_n. \quad (1.62)$$

Lemma 1.10. *Sei $Q_n f \in S_n$ die durch die Lösung des Variationsproblems (1.56) eindeutig bestimmte lineare L^2 -Projektion einer gegebenen Funktion f mit $\|f\|_s < \infty$ für $s \in [1, 2]$. Für eine global gleichmässige Unterteilung folgt dann die Fehlerabschätzung*

$$\|f - Q_n f\|_1 \leq c h^{s-1} \|f\|_s. \quad (1.63)$$

Beweis: Mit der Dreiecksungleichung ist zunächst

$$\|f - Q_n f\|_1 \leq \|f - I_n f\|_1 + \|I_n f - Q_n f\|_1,$$

wobei $I_n f$ die stückweise lineare Interpolierende von f bezeichnet. Mit der globalen inversen Ungleichung (1.62) für $I_n f - Q_n f \in S_n$ folgt dann

$$\|f - Q_n f\|_1 \leq \|f - I_n f\|_1 + \sqrt{12} h^{-1} \|I_n f - Q_n f\|_0.$$

Nochmalige Verwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$\|f - Q_n f\|_1 \leq \|f - I_n f\|_1 + \sqrt{12} h^{-1} \|f - I_n f\|_0 + \sqrt{12} h^{-1} \|f - Q_n f\|_0,$$

und die Behauptung folgt aus der Fehlerabschätzung (1.45) für $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$, bzw. aus der Fehlerabschätzung (1.60). ■

Die Anwendung der Fehlerabschätzung (1.60) setzt die Beschränktheit von $\|f\|_\sigma < \infty$ für $\sigma \in [1, 2]$ voraus. Am Beispiel der L^2 -Projektion mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.64)$$

für $k = 1, \dots, n$ sollen nun Approximationen

$$Q_n f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)$$

untersucht werden, wenn die zu approximierende Funktion f eine geringere Differenzierbarkeit aufweist. Die L^2 -Projektion $Q_n f$ ergibt sich, vergleiche (1.53), als eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\sum_{k=1}^n a_k \int_a^b \psi_k(x) \psi_j(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_j(x) dx \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \quad (1.65)$$

Wegen

$$\int_a^b \psi_k(x) \psi_j(x) dx = \begin{cases} x_k - x_{k-1} & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt

$$a_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

Lemma 1.11. *Sei $Q_n f$ die durch die Lösung des Variationsproblems (1.65) eindeutig bestimmte stückweise konstante L^2 -Projektion einer gegebenen, lokal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - Q_n f(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3} (x_k - x_{k-1})^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(x)]^2 dx. \quad (1.66)$$

Beweis: Für $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ist $Q_n f(x) = a_k \psi_k(x) = a_k$ und somit ist

$$f(x) - Q_n f(x) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(y)] dy = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_y^x f'(s) ds dy.$$

Dann gilt, unter Verwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung (1.33),

$$\begin{aligned} [f(x) - Q_n f(x)]^2 &= \frac{1}{(x_k - x_{k-1})^2} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} 1 \cdot \int_y^x f'(s) ds dy \right]^2 \\ &\leq \frac{1}{(x_k - x_{k-1})^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} 1^2 ds \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\int_y^x f'(s) ds \right]^2 dy \\ &= \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\int_y^x f'(s) ds \right]^2 dy. \end{aligned}$$

Durch erneute Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung (1.33) folgt

$$\begin{aligned} [f(x) - Q_n f(x)]^2 &= \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\int_y^x 1 \cdot f'(s) ds \right]^2 dy \\ &\leq \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| \int_y^x 1^2 ds \right| \cdot \left| \int_y^x [f'(s)]^2 ds \right| dy \\ &\leq \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - y| dy \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(s)]^2 ds. \end{aligned}$$

Integration bezüglich $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ergibt

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - Q_n f(x)]^2 dx \leq \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - y| dy dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(s)]^2 ds.$$

Mit

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - y| dy dx = \frac{1}{3}(x_k - x_{k-1})^3$$

folgt schließlich die Behauptung. ■

Summation der lokalen Fehlerabschätzungen (1.66) ergibt die globale Fehlerabschätzung

$$\int_a^b [f(x) - Q_n f(x)]^2 dx \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(x)]^2 dx. \quad (1.67)$$

Die Voraussetzung der Quadratintegrierbarkeit der ersten Ableitung $f'(x)$ der zu approximierenden Funktion $f(x)$ gewährleistet also ein lineares Konvergenzverhalten der stückweise konstanten L^2 -Projektion $Q_n f$ für den Fehler $f - Q_n f$ in der L^2 -Norm. Ausgangspunkt für eine noch schwächere Fehlerabschätzung ist für $s \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f(x) - Q_n f(x) &= \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(y)] dy \\ &= \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{\frac{1}{2}+s}} |x - y|^{\frac{1}{2}+s} dy. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung (1.33) folgt daraus

$$\begin{aligned} [f(x) - Q_n f(x)]^2 &= \frac{1}{(x_k - x_{k-1})^2} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{\frac{1}{2}+s}} |x - y|^{\frac{1}{2}+s} dy \right]^2 \\ &\leq \frac{1}{(x_k - x_{k-1})^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{[f(x) - f(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - y|^{1+2s} dy \\ &\leq (x_k - x_{k-1})^{2s} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{[f(x) - f(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy. \end{aligned}$$

Integration bezüglich $x \in (x_{k-1}, x_k)$ liefert jetzt die lokale Fehlerabschätzung

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - Q_n f(x)]^2 dx \leq (x_k - x_{k-1})^{2s} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{[f(x) - f(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx \quad (1.68)$$

und durch Summation folgt die globale Fehlerabschätzung

$$\int_a^b [f(x) - Q_n f(x)]^2 dx \leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^{2s} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{[f(x) - f(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx. \quad (1.69)$$

Aus der Galerkin–Orthogonalität (1.57) folgt für $g_n = f_n = Q_n f$ unter Verwendung der Cauchy–Schwarz Ungleichung (1.33)

$$\begin{aligned} \|f - Q_n f\|_0^2 &= \int_a^b [f(x) - Q_n f(x)] [f(x) - Q_n f(x)] dx \\ &= \int_a^b [f(x) - Q_n f(x)] f(x) dx \\ &\leq \left(\int_a^b [f(x) - Q_n f(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

die triviale Fehlerabschätzung

$$\|f - Q_n f\|_0 \leq \|f\|_0. \quad (1.70)$$

Definieren wir

$$\|f\|_s := \left(\int_a^b \int_a^b \frac{[f(x) - f(y)]^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx \right)^{1/2} \quad \text{für } s \in (0, 1), \quad (1.71)$$

so können die obigen Fehlerabschätzungen wie folgt zusammengefaßt werden. Man beachte, daß durch (1.46) und (1.71) zueinander äquivalente Normen definiert werden.

Satz 1.6. *Sei $Q_n f$ die stückweise konstante L^2 -Projektion einer gegebenen Funktion f mit $\|f\|_s < \infty$ für $s \in [0, 1]$. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|f - Q_n f\|_0 \leq c h^s \|f\|_s. \quad (1.72)$$

Bemerkung 1.2. *Die Fehlerabschätzung (1.72) für stückweise konstante Ansatzfunktionen ($p = 0$) entspricht formal der Fehlerabschätzung (1.60) für stückweise lineare Ansatzfunktionen ($p = 1$) und für $s \in [1, 2]$. Tatsächlich bleibt (1.60) richtig für $s \in [0, 2]$, wobei der Fall $s = 0$ wie in (1.70) folgt. Die Fehlerabschätzungen für $s \in (0, 1)$ folgen dann durch Anwendung des sogenannten Interpolationssatzes aus den Fehlerabschätzungen für $s = 0$ und $s = 1$. Für L^2 -Projektionen $Q_n f$ mit Basisfunktionen mit lokalem Polynomgrad p gilt die Fehlerabschätzung (1.72) für alle $s \in [0, p + 1]$ unter der Voraussetzung $\|f\|_s < \infty$, wobei $\|f\|_s$ in Erweiterung zu (1.50) und (1.71) entsprechend definiert ist.*

Am Beispiel der stückweise konstanten Basisfunktionen $\psi_k(x)$ soll abschliessend auf einen Vergleich von Interpolation $I_n f$ und L^2 -Projektion $Q_n f$ eingegangen werden. Bezeichnet $\hat{x}_k := \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ den Mittelpunkt von (x_{k-1}, x_k) , ist die stückweise konstante Interpolation einer gegebenen Funktion $f(x)$ gegeben durch

$$I_n f(x) = \sum_{k=1}^n f(\hat{x}_k) \psi_k(x). \quad (1.73)$$

Lemma 1.12. *Sei $I_n f$ die durch (1.73) erklärte stückweise konstante Interpolierende einer gegebenen, lokal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - I_n f(x)]^2 dx \leq \frac{1}{4} (x_k - x_{k-1})^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(x)]^2 dx. \quad (1.74)$$

Beweis: Für $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ist $I_n f(x) = f(\hat{x}_k)$ und somit

$$f(x) - I_n f(x) = f(x) - f(\hat{x}_k) = \int_{\hat{x}_k}^x f'(s) ds.$$

Mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung (1.33) folgt dann

$$\begin{aligned} [f(x) - I_n f(x)]^2 &= \left[\int_{\hat{x}_k}^x 1 \cdot f'(s) ds \right]^2 \\ &\leq |x - \hat{x}_k| \left| \int_{\hat{x}_k}^x [f'(s)]^2 ds \right| \\ &\leq |x - \hat{x}_k| \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(s)]^2 ds. \end{aligned}$$

Integration nach x liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - I_n f(x)]^2 dx &\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - \hat{x}_k| dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(s)]^2 ds \\ &= \frac{1}{4} (x_k - x_{k-1})^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(s)]^2 ds. \end{aligned}$$

■

Summation der lokalen Fehlerabschätzungen (1.74) liefert die globale Abschätzung

$$\int_a^b [f(x) - I_n f(x)]^2 dx \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(x)]^2 dx. \quad (1.75)$$

Für einen Vergleich von Interpolation und L^2 -Projektion beschränken wir uns auf das Intervall $[a, b] = [0, 1]$ mit einer gleichmässigen Unterteilung in Stützstellen $x_k = kh$, $k = 0, \dots, n$, mit einer Schrittweite $h = 1/n$.

Satz 1.7. *Sei $f(x)$ eine lokal zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann stimmen die L_2 -Fehler der stückweise konstanten Interpolation $I_n f$ und der stückweise konstanten L_2 -Projektion $Q_n f$ bis auf Terme höherer Ordnung überein, d.h. es gilt*

$$\|f - I_n f\|_0 - \frac{1}{\sqrt{96}} h^2 \|f\|_2 \leq \|f - Q_n f\|_0 \leq \|f - I_n f\|_0. \quad (1.76)$$

Der Beweis von Satz 1.7 beruht auf einer Anwendung der Taylorschen Formel in der folgenden Form.

Satz 1.8 (Taylorsche Formel). *Sei $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - s)^n f^{(n+1)}(s) ds. \quad (1.77)$$

Beweis: Für eine stetig differenzierbare Funktion ist zunächst

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(s) ds.$$

Wird hinreichende Differenzierbarkeit vorausgesetzt, so folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(s) ds \\ &= (s - x)f'(s) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x (s - x)f''(s) ds \\ &= (x - x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x - s)f''(s) ds, \end{aligned}$$

d.h.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x - s)f''(s) ds.$$

Für $n = 1$ gilt also die Induktionsvoraussetzung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - s)^n f^{(n+1)}(s) ds.$$

Nochmalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) - \frac{1}{(n + 1)!} (x - s)^{n+1} f^{(n+1)}(s) \Big|_{x_0}^x \\ &\quad + \frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - s)^{n+1} f^{(n+2)}(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - s)^{n+1} f^{(n+2)}(s) ds, \end{aligned}$$

d.h. die Induktionsbehauptung für $n + 1$. ■

Beweis von Satz 1.7: Mit den Stützstellen $x_k = kh$ für $k = 0, \dots, n$ sind die stückweise konstante L^2 -Projektion $Q_n f$ und die stückweise konstante Interpolierende $I_n f$ gegeben durch, für $\hat{x}_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$,

$$Q_n f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x), \quad a_k = \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx, \quad I_n f(x) = \sum_{k=1}^n b_k \psi_k(x), \quad b_k = f(\hat{x}_k).$$

Die L^2 -Projektion $Q_n f$ ist definiert als Lösung eines Minimierungsproblems, mit (1.58) für $g_n = I_n f$ gilt daher

$$\|f - Q_n f\|_0 \leq \|f - I_n f\|_0.$$

und somit die obere Abschätzung. Andererseits gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\|f - I_n f\|_0 \leq \|f - Q_n f\|_0 + \|Q_n f - I_n f\|_0$$

und für den zweiten Summanden gilt

$$\|Q_n f - I_n f\|_0^2 = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [Q_n f(x) - I_n f(x)]^2 dx = h \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2.$$

Durch Anwendung der Taylorschen Formel für eine lokal zweimal stetig differenzierbare Funktion folgt für die Differenz der Zerlegungskoeffizienten

$$\begin{aligned} a_k - b_k &= \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(\hat{x}_k) = \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(\hat{x}_k)] dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[(x - \hat{x}_k) f'(\hat{x}_k) + \int_{\hat{x}_k}^x (x - s) f''(s) ds \right] dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{\hat{x}_k}^x (x - s) f''(s) ds dx. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich, unter Verwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung (1.33),

$$\begin{aligned} (a_k - b_k)^2 &= \frac{1}{h^2} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{\hat{x}_k}^x (x - s) f''(s) ds dx \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{h^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} 1^2 dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{\hat{x}_k}^x (x - s) f''(s) ds \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{\hat{x}_k}^x (x - s) f''(s) ds \right)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| \int_{\hat{x}_k}^x (x - s)^2 ds \right| \left| \int_{\hat{x}_k}^x [f''(s)]^2 ds \right| dx \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| \int_{\hat{x}_k}^x (x - s)^2 ds \right| dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f''(s)]^2 ds. \end{aligned}$$

Durch Berechnung des verbleibenden Integrals folgt

$$\begin{aligned}
 (a_k - b_k)^2 &\leq \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| \int_{\hat{x}_k}^x (x-s)^2 ds \right| dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f''(s)]^2 ds \\
 &= \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| -\frac{1}{3}(x-s)^3 \right|_{\hat{x}_k}^x dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f''(s)]^2 ds \\
 &= \frac{1}{3} \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - \hat{x}_k|^3 dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f''(s)]^2 ds \\
 &= \frac{2}{3} \frac{1}{h} \int_{\hat{x}_k}^{x_k} (x - \hat{x}_k)^3 dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f''(s)]^2 ds \\
 &= \frac{1}{96} h^3 \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f''(s)]^2 ds.
 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\|Q_n f - I_n f\|_0^2 \leq \frac{1}{96} h^4 \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f''(s)]^2 ds = \frac{1}{96} h^4 \int_0^1 [f''(x)]^2 dx$$

und somit

$$\|f - I_n f\|_0 \leq \|f - Q_n f\|_0 + \frac{1}{\sqrt{96}} h^2 \|f''\|_0,$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. ■

Beispiel 1.10. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$ für $x \in [0, 1]$. Für die Schrittweite $h = 1/n$ ergeben sich die Stützstellen $x_k = kh$, $k = 0, \dots, n$, und die Elementmittelpunkte

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) = \frac{1}{2}(2k-1)h \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Für die Zerlegungskoeffizienten b_k der stückweise konstanten Interpolierenden $I_n f$ ergibt sich

$$b_k = f(\hat{x}_k) = \hat{x}_k^2 = \frac{1}{4} h^2 (2k-1)^2$$

während für die Zerlegungskoeffizienten a_k der L^2 -Projektion $Q_n f$

$$a_k = \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{1}{h} [x_k^3 - x_{k-1}^3] = \frac{h^2}{3} [k^3 - (k-1)^3] = h^2 \left[k^2 - k + \frac{1}{3} \right]$$

folgt.

Für den Fehler der stückweise konstanten Interpolierenden $I_n f$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 [f(x) - I_h f(x)]^2 dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[x^2 - \frac{1}{4} h^2 (2k-1)^2 \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{3} h^5 \sum_{k=1}^n \left[k^2 - k + \frac{23}{80} \right] \\
 &= \frac{1}{3} h^5 \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{23}{80} n \right] \\
 &= \frac{1}{9} h^2 - \frac{11}{720} h^4
 \end{aligned}$$

und im Fall der L^2 -Projektion $Q_n f$ ist

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 [f(x) - Q_h f(x)]^2 dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[x^2 - h^2 \left(k^2 - k + \frac{1}{3} \right) \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{45} h^5 \sum_{k=1}^n [15k^2 - 15k + 4] \\
 &= \frac{1}{45} h^5 \left[\frac{15}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{15}{2} n(n+1) + 4n \right] \\
 &= \frac{1}{9} h^2 - \frac{1}{45} h^4.
 \end{aligned}$$

Bis auf Terme vierter Ordnung stimmen also Interpolations- und Projektionsfehler überein.