

Kapitel 5

Nichtlineare Gleichungen

Für die näherungsweise Bestimmung von Nullstellen einer gegebenen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. zur näherungsweisen Lösung der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \text{in } [a, b] \quad (5.1)$$

werden in diesem Kapitel Iterationsverfahren betrachtet, welche eine Folge von Näherungslösungen $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \text{und} \quad f(\bar{x}) = 0$$

erzeugen. Dabei konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $\bar{x}$ mit der Ordnung $p \geq 1$, $p \in \mathbb{R}$, falls

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq c |x_k - \bar{x}|^p \quad \text{für alle } k \geq k_0 \quad (5.2)$$

mit einem gewissen $k_0 \in \mathbb{N}$ und einer positiven Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt. Für $p = 1$ muß $c < 1$ vorausgesetzt werden.

Das Konvergenzverhalten ist im allgemeinen abhängig von der Wahl der Anfangsnäherung x_0 . Muß x_0 in einer geeigneten Umgebung von $\bar{x}$ vorausgesetzt werden, so spricht man von lokaler Konvergenz. Gilt die Konvergenz für eine beliebige Startnäherung $x_0 \in [a, b]$, so folgt globale Konvergenz.

5.1 Bisektionsverfahren

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte

$$f(a) f(b) < 0.$$

Daraus folgt die Existenz wenigstens einer Nullstelle $\bar{x} \in (a, b)$ mit $f(\bar{x}) = 0$. In Verbindung mit einer rekursiven Unterteilung des Intervalles $[a, b]$ kann daraus das Bisektionsverfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstelle $\bar{x} \in (a, b)$ abgeleitet werden, siehe Algorithmus 5.1.

Setze
 $a_0 = a, b_0 = b$ mit $f(a_0)f(b_0) < 0$.
 Definiere für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$$

 Für
 $f(x_k) = 0$ folgt $\bar{x} = x_k$.
 Setze
 $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$ falls $f(x_k)f(a_k) < 0$,
 $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$ falls $f(x_k)f(a_k) > 0$.

Algorithmus 5.1: Bisektionsverfahren.

Satz 5.1. *Das in Algorithmus 5.1 angegebene Bisektionsverfahren ist global konvergent. Insbesondere gilt die Fehlerabschätzung*

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{k+1}} |b - a|. \quad (5.3)$$

Beweis: Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt wegen $f(a_k)f(b_k) < 0$ stets $\bar{x} \in [a_k, b_k]$. Für die Näherungslösung

$$x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$$

folgt dann

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} |b_k - a_k|.$$

Mit

$$|b_k - a_k| = \frac{1}{2} |b_{k-1} - a_{k-1}|$$

ergibt sich

$$|b_k - a_k| = \frac{1}{2^k} |b - a|$$

und somit die Behauptung. ■

Beispiel 5.1. *Zur Bestimmung der Nullstelle $\bar{x} = 2$ von $f(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[a, b] = [1, 4]$ wird das in Algorithmus 5.1 angegebene Bisektionsverfahren angewendet. Die Ergebnisse für $k \leq 2$ sind in Tabelle 5.1 angegeben.*

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_k)$	$ x_k - \bar{x} $	$2^{-(k+1)} b - a $
0	1	4	2.5	-3	12	2.25	0.5	1.5
1	1	2.5	1.75	-3	2.25	-0.9375	0.25	0.75
2	1.75	2.5	2.125	-0.9375	2.25	0.515625	0.125	0.375

Tabelle 5.1: Bisektionsverfahren zur Lösung von $f(x) = x^2 - 4 = 0$ in $[a, b] = [1, 4]$.

Als ein Nachteil des Bisektionsverfahrens kann das nur lineare Konvergenzverhalten angesehen werden. Obwohl das Bisektionsverfahren global konvergent ist, kann die Fehlerreduktion nicht monoton sein, d.h. die Güte der Näherungslösung kann von der tatsächlichen Abbruchsituation abhängen. Hierzu betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 5.2. *Die Funktion*

$$f(x) = \frac{x}{8}(63x^4 - 70x^2 + 15)$$

besitzt im Intervall $[a, b] = [0.8, 1]$ die Nullstelle

$$\bar{x} = \frac{1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}} \approx 0.906179845.$$

Für $x_0 = 0.9$ ergibt sich der Fehler

$$|x_0 - \bar{x}| = 0.006179845,$$

während die nachfolgende Näherungslösung $x_1 = 0.95$ den größeren Fehler

$$|x_1 - \bar{x}| = 0.0438201543$$

erzeugt.

5.2 Methode der sukzessiven Approximation

Für die Herleitung eines allgemeinen Iterationsverfahrens zur Lösung der nichtlinearen Gleichung (5.1),

$$f(x) = 0 \quad \text{in } [a, b],$$

werde eine dazu äquivalente Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x) \quad \text{in } [a, b] \tag{5.4}$$

betrachtet. Ausgehend von einer Startnäherung $x_0 \in [a, b]$ ergibt sich daraus die Methode der sukzessiven Approximation,

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \tag{5.5}$$

Zu untersuchen bleibt die Konstruktion von $\Phi(x)$, der Nachweis der Konvergenz der Näherungslösungen x_k und die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit.

Definition 5.1. *Die Funktion Φ erfüllt in $D = [a, b]$ eine Lipschitz-Bedingung mit einer positiven Lipschitz-Konstanten c_L , falls*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq c_L |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D \tag{5.6}$$

erfüllt ist. Gilt $c_L = q < 1$, dann heißt Φ Kontraktion auf $D = [a, b]$.

Satz 5.2 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei $D = [a, b]$ abgeschlossen und $\Phi : D \rightarrow D$ eine Kontraktion auf D mit $q < 1$. Dann hat die Fixpunktgleichung $x = \Phi(x)$ genau eine Lösung $\bar{x} \in D$. Für jede beliebige Startnäherung $x_0 \in D := [a, b]$ konvergiert die Folge der sukzessiven Approximationen $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ gegen die Lösung $\bar{x}$ der Fixpunktgleichung $\bar{x} = \Phi(\bar{x})$ und es gelten die a priori Fehlerabschätzung*

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0| \quad (5.7)$$

sowie die a posteriori Fehlerabschätzung

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{q}{1 - q} |x_k - x_{k-1}|. \quad (5.8)$$

Beweis: Wegen $\Phi : D \rightarrow D$ und $x_0 \in D$ folgt durch vollständige Induktion

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \in D \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Durch rekursive Anwendung der Kontraktionsabschätzung folgt dann

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq q |x_k - x_{k-1}| \leq q^k |x_1 - x_0|.$$

Für $p \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned} |x_{k+p} - x_k| &= \left| \sum_{i=0}^{p-1} (x_{k+i+1} - x_{k+i}) \right| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |x_{k+i+1} - x_{k+i}| \leq \sum_{i=0}^{p-1} q^{k+i} |x_1 - x_0| \\ &= q^k |x_1 - x_0| \sum_{i=0}^{p-1} q^i = q^k \frac{1 - q^p}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Wegen $q < 1$ folgt daraus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+p} - x_k| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0| = 0$$

für alle $p \in \mathbb{N}_0$. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist also Cauchy-Folge und somit existiert der Grenzwert

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in D = \overline{D}.$$

Zu zeigen bleibt, daß der Grenzwert $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ Lösung der Fixpunktgleichung $x = \Phi(x)$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} |\bar{x} - \Phi(\bar{x})| &= |\bar{x} - \Phi(x_k) + \Phi(x_k) - \Phi(\bar{x})| \\ &\leq |\bar{x} - \Phi(x_k)| + |\Phi(x_k) - \Phi(\bar{x})| \\ &= |\bar{x} - x_{k+1}| + |\Phi(x_k) - \Phi(\bar{x})| \\ &\leq |\bar{x} - x_{k+1}| + q |x_k - \bar{x}| \\ &\leq \frac{q^{k+1}}{1 - q} |x_1 - x_0| + q \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0| = 2 \frac{q^{k+1}}{1 - q} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt

$$|\bar{x} - \Phi(\bar{x})| \leq 2|x_1 - x_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q^{k+1}}{1-q} = 0$$

und somit $\bar{x} = \Phi(\bar{x})$. Für zwei Fixpunkte $\bar{x} = \Phi(\bar{x})$ und $\tilde{x} = \Phi(\tilde{x})$ ist

$$|\bar{x} - \tilde{x}| = |\Phi(\bar{x}) - \Phi(\tilde{x})| \leq q|\bar{x} - \tilde{x}|$$

und somit

$$0 \leq (1-q)|\bar{x} - \tilde{x}| \leq 0.$$

Wegen $q < 1$ folgt mit $\bar{x} = \tilde{x}$ die Eindeutigkeit des Fixpunktes.

Aus

$$|x_k - \bar{x}| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\bar{x})| \leq q|x_{k-1} - \bar{x}| \leq q[|x_{k-1} - x_k| + |x_k - \bar{x}|]$$

folgt

$$(1-q)|x_k - \bar{x}| \leq q|x_k - x_{k-1}|$$

und somit die a posteriori Fehlerabschätzung (5.8). Aus der rekursiven Anwendung der Kontraktionsabschätzung ergibt sich weiterhin

$$|x_k - \bar{x}| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\bar{x})| \leq q|x_{k-1} - \bar{x}| \leq q^{k-1}|x_1 - \bar{x}|.$$

Mit der a posteriori Fehlerabschätzung für $k = 1$,

$$|x_1 - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q}|x_1 - x_0|,$$

folgt schließlich die a priori Fehlerabschätzung (5.7). ■

Beispiel 5.3. Zur Lösung der Gleichung $f(x) = x^2 - 4 = 0$ in $[a, b] = [2, 4]$ betrachten wir die dazu äquivalente Fixpunktgleichung

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right) = \Phi(x).$$

Ausgehend von einer Anfangsnäherung $x_0 \in [2, 4]$ ergibt sich daraus die Methode der sukzessiven Approximation

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{4}{x_k} \right) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, \quad (5.9)$$

welche der Iterationsvorschrift des Babylonischen Wurzelziehens entspricht.

Zu zeigen bleibt die Selbstabbildung $\Phi : [2, 4] \rightarrow [2, 4]$ und die Kontraktionseigenschaft von Φ . Für $x \in [2, 4]$ ist $x \leq 4$ und $x \geq 1$, d.h.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right) \leq \frac{1}{2} \left(4 + \frac{4}{1} \right) = 4.$$

Aus $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ folgt $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ und somit

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \geq 4\alpha\beta, \quad \text{d.h.} \quad \alpha\beta \leq \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2.$$

Für $\alpha = x \in [2, 4]$ und $\beta = 4/x$ gilt also

$$1 \leq 4 = x \frac{4}{x} \leq \frac{1}{4} \left(x + \frac{4}{x} \right)^2 = [\Phi(x)]^2$$

und somit $\Phi(x) \geq 2$, d.h. $\Phi : [2, 4] \rightarrow [2, 4]$ ist eine Selbstabbildung.

Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft für $x, y \in [1, 4]$ ist

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = \left| \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right) - \frac{1}{2} \left(y + \frac{4}{y} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{4}{xy} \right| |x - y| \leq q |x - y|$$

mit

$$q = \frac{1}{2} \max_{x, y \in [2, 4]} \left| 1 - \frac{4}{xy} \right| = \frac{3}{8} \leq 1.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (Satz 5.2) erfüllt, d.h. die Methode der sukzessiven Approximation $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ konvergiert linear mit einer Fehlerreduktion von $q = 0.375$.

Für die Anfangsnäherung $x_0 = 4$ ergeben sich die folgenden Näherungslösungen:

k	x_k	$ x_k - \bar{x} $
0	4	2
1	2.5	0.5
2	2.05	0.05
3	2.00061	0.00061

Tabelle 5.2: Näherungslösungen des Babylonischen Wurzelziehens.

Das in Tabelle 5.2 beobachtete Fehlerverhalten ist jedoch nicht linear! Wegen

$$|x_k - \bar{x}| = |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\bar{x})| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{4}{x_{k-1}\bar{x}} \right| |x_{k-1} - \bar{x}|$$

und mit $\bar{x}^2 = 4$ folgt mit

$$|x_k - \bar{x}| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\bar{x}}{x_{k-1}} \right| |x_{k-1} - \bar{x}| = \frac{1}{2} \frac{1}{x_{k-1}} |x_{k-1} - \bar{x}|$$

sogar ein quadratisches Konvergenzverhalten.

5.3 Sekantenmethode und Newton–Verfahren

Wesentlich für die Methode der sukzessiven Approximation war die Herleitung einer Fixpunktgleichung $x = \Phi(x)$ bzw. die daraus resultierende Rekursionsvorschrift $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Beim Babylonischen Wurzelziehen konnte diese durch einfache Transformationen aus der zu lösenden Gleichung gewonnen werden. Im folgenden soll ein allgemeiner Ansatz zur Herleitung von $\Phi(x)$ verfolgt werden.

Gesucht ist $\bar{x} \in D = [a, b]$ als Lösung der nichtlinearen Gleichung $f(\bar{x}) = 0$. Ist $f(x)$ in $[a, b]$ stetig differenzierbar, so liefert die Taylor–Entwicklung von $f(\bar{x})$ für eine gegebene Näherungslösung $x_k \in [a, b]$

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k) + (\bar{x} - x_k) f'(\xi) \quad (5.10)$$

mit einer Zwischenwertstelle $\xi \in (x_k, \bar{x}) \cup (\bar{x}, x_k)$. Daraus folgt

$$\bar{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(\xi)}. \quad (5.11)$$

Durch eine geeignete Approximation der Ableitung $f'(\xi)$ kann nun eine neue Näherungslösung x_{k+1} bestimmt werden. Mit

$$f'(\xi) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ergibt sich die Sehnen–Methode

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x_k). \quad (5.12)$$

Für zwei schon berechnete Näherungslösungen x_k und x_{k-1} führt Approximation

$$f'(\xi) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

auf die Sekantenmethode

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k). \quad (5.13)$$

Für die Initialisierung kann beispielsweise $x_0 = a$ und $x_1 = b$ gewählt werden. Wird in (5.13) anstelle der vorherigen Näherungslösung x_{k-1} eine Näherungslösung x_ℓ mit $f(x_k)f(x_\ell) < 0$ gewählt, so ergibt sich die modifizierte Sekantenmethode (Regula Falsi)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_\ell}{f(x_k) - f(x_\ell)} f(x_k) = \Phi(x_k). \quad (5.14)$$

Kann $f'(\bar{x}) \neq 0$ vorausgesetzt werden, so führt die Approximation

$$f'(\xi) \approx f'(x_k)$$

in einer Umgebung von $\bar{x}$ auf das Newton–Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (5.15)$$

Am Beispiel des Sekantenverfahrens soll nun gezeigt werden, daß für die in (5.2) auftretende Konvergenzordnung p nicht nur natürliche Zahlen in Frage kommen.

Satz 5.3. *Sei $f(x)$ eine zweimal stetige Funktion und in einer Umgebung der Nullstelle $\bar{x}$ von $f(x) = 0$ gelte*

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(x)}{f'(\tilde{x})} \right| \leq M.$$

Ferner seien Anfangsnäherungen x_0 und x_1 so gegeben so daß

$$K = \max\{M|x_0 - \bar{x}|, \sqrt[p]{M|x_1 - \bar{x}|}\} < 1, \quad p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

erfüllt ist. Dann genügen die durch das Sekantenverfahren berechneten Näherungslösungen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad x_0 = a, \quad x_1 = b$$

der Fehlerabschätzung

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{M} K^{p^{k+1}}.$$

Beweis: Durch Einsetzen der Rekursionsvorschrift (5.13) ergibt sich für den Fehler $e_{k+1} = x_{k+1} - \bar{x}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= x_k - \bar{x} - \frac{x_k - \bar{x} + \bar{x} - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \\ &= e_k - \frac{e_k - e_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \\ &= \frac{e_{k-1} f(x_k) - e_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}} = \frac{1}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \left[\frac{f(x_k)}{x_k - \bar{x}} - \frac{f(x_{k-1})}{x_{k-1} - \bar{x}} \right] = \frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

mit der Funktion

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - \bar{x}}.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x) dx = g'(\eta)(x_k - x_{k-1})$$

und

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) dx = f'(\xi)(x_k - x_{k-1})$$

mit Zwischenwertstellen $\eta, \xi \in (x_{k-1}, x_k)$. Somit folgt

$$\frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}} = \frac{g'(\eta)}{f'(\xi)}.$$

Die Ableitung von $g(x)$ ist

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - \bar{x}) - f(x)}{(x - \bar{x})^2}$$

und somit ist

$$g'(\eta) = \frac{f'(\eta)(\eta - \bar{x}) - f(\eta)}{(\eta - \bar{x})^2}.$$

Aus der Taylor-Entwicklung

$$0 = f(\bar{x}) = f(\eta) + f'(\eta)(\bar{x} - \eta) + \frac{1}{2}f''(\bar{\xi})(\bar{x} - \eta)^2$$

mit einer Zwischenwertstelle $\bar{\xi}$ folgt dann

$$g'(\eta) = \frac{1}{2}f''(\bar{\xi})$$

und somit

$$\left| \frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)} \right| \leq M$$

in einer Umgebung des Fixpunktes $\bar{x}$. Es gilt also

$$|e_{k+1}| \leq M |e_k| |e_{k-1}|$$

bzw.

$$\varrho_{k+1} \leq \varrho_k \varrho_{k-1}$$

mit $\varrho_k = M |e_k|$. Seien Anfangsnäherungen x_0 und x_1 gegeben, so daß

$$K = \max\{\varrho_0, \sqrt[p]{\varrho_1}\} < 1$$

für ein geeignet zu wählendes $p \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist

$$\varrho_0 \leq K = K^{p^0}, \quad \varrho_1 \leq K^p = K^{p^1}$$

und durch vollständige Induktion folgt

$$\varrho_{k+1} \leq \varrho_k \varrho_{k-1} \leq K^{p^k} K^{p^{k-1}} = K^{p^{k-1}(p+1)} = K^{p^{k+1}}$$

wenn

$$p+1 = p^2$$

erfüllt ist, d.h.

$$p_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

■

Beispiel 5.4. Zur Lösung der Gleichung $f(x) = x^2 - 4 = 0$ in $[a, b] = [1, 4]$ betrachten wir die Iterationsvorschrift der Sekantenmethode,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{[x_k^2 - 4] - [x_{k-1}^2 - 4]} [x_k^2 - 4] = \frac{x_k x_{k-1} + 4}{x_k + x_{k-1}}, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 4.$$

Für eine näherungsweise Berechnung der Konvergenzordnung p betrachten wir für den Fehler den Ansatz

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = C |x_k - \bar{x}|^p, \quad |x_k - \bar{x}| = C |x_{k-1} - \bar{x}|^p.$$

Auflösen nach p liefert

$$p_k = \frac{\ln |x_{k+1} - \bar{x}| - \ln |x_k - \bar{x}|}{\ln |x_k - \bar{x}| - \ln |x_{k-1} - \bar{x}|}.$$

k	x_k	$ x_k - \bar{x} $	p_k
0	1		
1	4		
2	1.6	0.4	
3	1.8571428571	0.1428571429	
4	2.0165289256	0.0165289256	2.0947
5	1.9993904297	0.0006095703	1.5301
6	1.9999974911	0.0000025089	1.6644
7	2.0000000004	0.0000000004	1.6000

Tabelle 5.3: Konvergenzordnung der Sekantenmethode.

Für die Iterationsvorschrift der sukzessiven Approximation, $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, liefert der Banachsche Fixpunktsatz (Satz 5.2) nur eine lineare Konvergenzabschätzung, wenn für Φ eine Kontraktionseigenschaft vorausgesetzt werden kann. Schon beim Beispiel des Babylonischen Wurzelziehens ergab sich jedoch eine quadratische Konvergenzordnung. Allgemein kann diese auch aus dem folgenden Satz abgeleitet werden.

Satz 5.4. Sei Φ eine in $D = [a, b]$ p -mal stetig differenzierbare Funktion und im Fixpunkt $\bar{x} = \Phi(\bar{x})$ gelte

$$\Phi'(\bar{x}) = \Phi''(\bar{x}) = \dots = \Phi^{(p-1)}(\bar{x}) = 0, \quad \Phi^{(p)}(\bar{x}) \neq 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung von $\bar{x}$, $U_\delta(\bar{x}) = \{y \in D : |y - \bar{x}| < \delta\}$, so daß

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{p!} \max_{y \in U_\delta(\bar{x})} |\varphi^{(p)}(y)| |x_k - \bar{x}|^p$$

für $x_k \in U_\delta(\bar{x})$ gilt.

Beweis: Die Taylor-Entwicklung von $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ um den Fixpunkt $\bar{x}$ ergibt

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = \Phi(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(\bar{x})(x_k - \bar{x})^n + \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(\xi)(x_k - \bar{x})^p$$

mit einer Zwischenwertstelle $\xi \in (x_k, \bar{x})$ für $x_k < \bar{x}$ bzw. $\xi \in (\bar{x}, x_k)$ für $\bar{x} < x_k$. Wegen $\Phi^{(n)}(\bar{x}) = 0$ für $n = 1, \dots, p-1$ und $\bar{x} = \Phi(\bar{x})$ gilt also

$$x_{k+1} = \bar{x} + \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(\xi)(x_k - \bar{x})^p.$$

Aus $\Phi^{(p)}(\bar{x}) \neq 0$ und wegen der Stetigkeit von $\Phi^{(p)}(x)$ existiert eine δ -Umgebung $U_\delta(\bar{x})$ von $\bar{x}$ mit $\Phi^{(p)}(\xi) \neq 0$ für $\xi \in U_\delta(\bar{x})$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Folgerung 5.1. *Das Newton-Verfahren (5.15),*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

ist ein lokal konvergentes Verfahren mit der Konvergenzordnung $p = 2$, d.h.

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq$$

Beweis: Für die Bildungsvorschrift (5.15) des Newton-Verfahrens,

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad f'(x) \neq 0,$$

ist

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)}{[f'(x)]^2} f''(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

und wegen $f(\bar{x}) = 0$ gilt im Fixpunkt $\Phi'(\bar{x}) = 0$. Weiterhin ist

$$\Phi''(x) = \frac{f''(x)[f'(x)]^2 - 2f(x)[f''(x)]^2 + f(x)f'(x)f^{(3)}(x)}{[f'(x)]^3}$$

und somit

$$\Phi''(\bar{x}) = \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

Für $f''(\bar{x}) \neq 0$ folgt somit $\Phi''(\bar{x}) \neq 0$ und mit $p = 2$ ergibt sich ein quadratisches Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens in einer Umgebung des Fixpunktes $\bar{x}$. ■

Beispiel 5.5. *Für die Rekursionsvorschrift*

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

und den Fixpunkt $\bar{x} = \sqrt{a}$ ist

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$$

und somit $\Phi'(\bar{x}) = 0$, aber

$$\Phi''(x) = \frac{1}{4} \frac{a}{x^3}, \quad \Phi''(\bar{x}) = \frac{1}{4\sqrt{a}} \neq 0.$$

Mit $p = 2$ ergibt sich also die quadratische Konvergenz des Babylonischen Wurzelziehens.

5.4 Nichtlineare Gleichungssysteme

Gesucht ist der Vektor $\underline{\bar{x}} \in \mathbb{R}^n$ als Lösung von n nichtlinearen Gleichungen $F(\underline{\bar{x}}) = \underline{0}$,

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) &= 0. \end{aligned}$$

Die Taylor-Entwicklung der Funktionen $f_i(\underline{\bar{x}})$ um eine gegebene Näherungslösung $\underline{x}^k$ führt bei Vernachlässigung des jeweiligen Restgliedes auf

$$0 = f_i(\underline{\bar{x}}) \approx f_i(\underline{x}^k) + \sum_{j=1}^n (\bar{x}_j - x_j^k) \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\underline{x}^k) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Damit kann eine neue Näherungslösung $\underline{x}^{k+1}$ aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\underline{x}^k) (x_j^{k+1} - x_j^k) = -f_i(\underline{x}^k) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

bestimmt werden. Dies ergibt das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$,

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^k) \right)^{-1} F(\underline{x}^k).$$

Die Konvergenz folgt analog zum eindimensionalen Fall aus dem Banachschen Fixpunktsatz, d.h. dem Nachweis der Kontraktion in einer geeignet gewählten Umgebung des Lösungsvektors, siehe zum Beispiel [5].