Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach
Dipl.–Ing. M. Gobrial

WS 2024/25
Blatt 1
4.10.2024

Numerische Mathematik 2

1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Man zeige: Ist $y(x)$ zweimal stetig differenzierbar, dann ist $y(x)$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems, wenn $y(x)$ eine Lösung der Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - s) f(s, y(s))\, ds$$

ist.

2. Für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) - x, \qquad y(0) = y_0$$

berechne man mit der Methode der sukzessiven Approximation eine Folge von Näherungslösungen bis einschließlich $y_3(x)$,

$$\begin{aligned} y_0(x) &\equiv y_0, \\ y_{k+1}(x) &= y_0 + \int_0^x f(s, y_k(s))\, ds \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

und bestimme den Grenzwert.
Hinweis: Man stelle eine Vermutung für $y_k(x)$ auf und beweise diese durch vollständige Induktion.

3. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) - x^2 + 2x \quad \text{für } x > 0, \quad y(0) = 0$$

mit der exakten Lösung $y(x) = x^2$. Man verwende das explizite und das implizite Euler–Verfahren zur Berechnung der Näherungslösung in $x = 0.2$ mit den Schrittweiten $h_1 = 0.1$ und $h_2 = 0.05$.