

Numerische Mathematik 2

30. Für die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) = 0 \text{ für } x \in (0, 1), t > 0, u(t, 0) = u(t, 1) = 0, u(0, x) = u_0(x)$$

gebe man die Lösung in Abhängigkeit der Fourier–Koeffizienten von

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin k\pi x$$

an.

31. Für die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) = 0 \text{ für } x \in (0, 1), t > 0, u(t, 0) = u(t, 1) = 0, u(0, x) = u_0(x)$$

zeige man die Abschätzung

$$\|u(t, \cdot)\|_{L_2(0,1)} \leq e^{-8t} \|u_0\|_{L_2(0,1)}.$$

Hinweis: Man betrachte die Variationsformulierung im Ort und verwende die Abschätzung

$$\int_0^1 [v(x)]^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 [v'(x)]^2 dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(0, 1).$$

32. Für die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) &= 0 && \text{für } x \in (0, 1), t > 0, \\ u(t, 0) = u(t, 1) &= 0 && \text{für } t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(t, x)|_{t=0} &= 0 && \text{für } x \in (0, 1), \end{aligned}$$

gebe man die Lösung in Abhängigkeit der Fourier–Koeffizienten von $u_0(x)$ an.