

Numerische Mathematik 2

4. Betrachtet werde das Anfangswertproblem

$$u'' = f(x, u, u') \quad \text{für } x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

Man überführe die Differentialgleichung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und leite für dieses ein explizites Euler–Verfahren her. Mit einer Schrittweite von $h = 0.1$ berechne man damit die Näherungslösung in $x = 0.2$ des Anfangswertproblems

$$u''(x) + u(x) + x = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

Die exakte Lösung ist $u(x) = \sin x - x$.

5. Gegeben sei das implizite Euler–Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1$$

zur näherungsweise Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

- a) Man bestimme die Konsistenzordnung des impliziten Euler–Verfahrens.
- b) Man gebe die Rekursionsvorschrift für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) - x, \quad y(0) = 1$$

an und verwende diese zur Berechnung der Näherungslösung in $x = 1$ mit der Schrittweite $h = 0.25$.

6. Gegeben sei das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)$, $y(0) = y_0$.

- a) Man stelle die zugehörige Iterationsvorschrift des expliziten Euler–Verfahrens mit konstanter Schrittweite $h = \frac{1}{N}$ auf und gebe eine explizite Formel für die Näherung y_N in Abhängigkeit zu y_0 an.
- b) Es sei $y_0 = 1$ und $N = 100$. Man berechne eine Abschätzung des Fehlers der Näherungslösung an der Stelle $x = 1$ mit der Formel aus der Vorlesung und vergleiche diese mit dem tatsächlichen Fehler.