

Numerische Mathematik 2

7. Gegeben sei das Crank–Nicolson–Verfahren (Trapez–Verfahren)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1$$

zur näherungsweise Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Man zeige: Ist f zweimal stetig differenzierbar, dann besitzt das Verfahren die Konsistenzordnung 2. Hinweis: Man verwende für den Beweis die Trapezformel für die numerische Integration.

8. Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) + \mu y(t) = 0 \quad \text{für } t \in (0, T), \quad y(0) = y_0, \quad \mu > 0,$$

sei $y_h(t)$ eine stückweise lineare stetige Funktion mit Stützstellen $t_k = kh$ für $k = 0, \dots, N$, einer Schrittweite $h = T/N$, und

$$y_h(t) = y_{k-1} + \frac{1}{h}(t - t_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \quad \text{für } t \in (t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten y_k für $k = 1, \dots, N$ betrachte man die Forderung

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} [y'_h(t) + \mu y_h(t)] dt = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, N.$$

Man gebe die Koeffizienten y_k in Abhängigkeit von y_0 an!

Unter welchen Bedingungen an μ und h bleiben diese beschränkt?

9. Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) + \mu y(t) = 0 \quad \text{für } t \in (0, T), \quad y(0) = y_0, \quad \mu > 0,$$

sei $y_h(t)$ eine stückweise lineare stetige Funktion mit Stützstellen $t_k = kh$ für $k = 0, \dots, N$, einer Schrittweite $h = T/N$, und

$$y_h(t) = y_{k-1} + \frac{1}{h}(t - t_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \quad \text{für } t \in (t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Mit $\varphi_\ell(t)$ für $\ell = 0, N$ werden die stückweise linearen und stetigen Basisfunktionen mit $\varphi_\ell(t_k) = \delta_{k\ell}$ bezeichnet. Zur Bestimmung der Koeffizienten y_k für $k = 1, \dots, N$ betrachte man jetzt die Forderung

$$\int_0^T [y'_h(t) + \mu y_h(t)] \varphi_\ell(t) dt = 0 \quad \text{für } \ell = 0, \dots, N-1.$$

Ist das zugehörige lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar?

Unter welchen Voraussetzungen an μ und h ist die Wurzelbedingung erfüllt?