

## Numerische Mathematik 2

16. Gegeben ist die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & b & \\ & & c & a & \\ & & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

mit  $bc > 0$ . Man zeige, daß  $A$  die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2 \operatorname{sign}(c) \sqrt{bc} \cos \frac{k\pi}{n} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1$$

und die Eigenvektoren  $\underline{v}^k$  mit

$$v_\ell^k = m^\ell \sin \frac{k\ell\pi}{n} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n-1, \quad m = \sqrt{\frac{c}{b}}$$

besitzt.

**Hinweis:** Man betrachte zunächst den Fall  $a = 0$ . Für die Eigenvektoren verwende man die Darstellung

$$v_\ell^k = \frac{m^\ell}{2i} \left[ e^{ik\ell\pi/n} - e^{-ik\ell\pi/n} \right].$$

17. Für  $u \in C^6([a, b])$  konstruiere man eine 5-Punkt-Differenzenformel der Form

$$D_2^{(5)}u(x) := \frac{1}{h^2} \left[ a_2u(x+2h) + a_1u(x+h) + a_0u(x) + a_{-1}u(x-h) + a_{-2}u(x-2h) \right].$$

Wie lautet die zugehörige Abschätzung des Approximationsfehlers?

18. Sei  $S_h^1([0, 1]) = \operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^n \subset H^1([0, 1])$  der Raum der stückweise linearen Funktionen bezüglich einem gleichmässigen Gitter mit der Maschenweite  $h$ . Man beweise die inverse Ungleichung

$$\int_0^1 [v_h'(x)]^2 dx \leq ch^{-2} \int_0^1 [v_h(x)]^2 dx \quad \text{für alle } v_h \in S_h^1([0, 1]).$$