Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2022/23
Blatt 7
18.11.2022

Numerische Mathematik 2

19. Sei $S_h^1((0,1)) = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^n \subset H^1((0,1))$ der Raum der stückweise linearen Funktionen bezüglich einem gleichmässigen Gitter mit der Maschenweite h. Für $u \in H^1((0,1))$ sei $Q_h u \in S_h^1((0,1))$ die durch die Variationsformulierung

$$\langle Q_h u, v_h \rangle_{L_2((0,1))} = \langle u, v_h \rangle_{L_2((0,1))} \quad \text{für alle } v_h \in S_h^1((0,1))$$

definierte L_2–Projektion. Man beweise die $H^1((0,1))$–Stabilität

$$\|Q_h u\|_{H^1((0,1))} \leq c\, \|u\|_{H^1((0,1))} \,.$$

Hinweis: Man betrachte die durch

$$\langle P_h u, v_h \rangle_{H^1((0,1))} = \langle u, v_h \rangle_{H^1((0,1))} \quad \text{für alle } v_h \in S_h^1((0,1))$$

definierte Projektion $P_h u \in S_h^1((0,1))$.

20. Sei $S_h^1((0,1)) = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^n \subset H^1((0,1))$ der Raum der sückweise linearen Funktionen bezüglich einem gleichmässigen Gitter mit der Maschenweite h. Durch

$$\|f\|_{\widetilde{H}^{-1}((0,1))} := \sup_{0 \neq v \in H^1((0,1))} \frac{\langle f, v \rangle_{(0,1)}}{\|v\|_{H^1((0,1))}}$$

wird eine Norm des Dualraumes $\widetilde{H}^{-1}([(0,)]) = [H^1((0,1))]'$ definiert. Für $u \in H^2((0,1))$ sei $Q_h u \in S_h^1((0,1))$ die L_2 Projektion. Man gebe eine Abschätzung des Fehlers

$$\|u - Q_h u\|_{\widetilde{H}^{-1}((0,1))}$$

an.

21. Für die Lösung des Randwertproblems

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0,1), \quad u'(0) = u_0, \quad u'(1) = u_1$$

stelle man die Variationsformulierung auf. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Lösung? Ist diese eindeutig bestimmt?