Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2022/23
Blatt 8
25.11.2022

Numerische Mathematik 2

22. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-((1+x)u'(x))' + u(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0,1), \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

a. Man gebe die zugehörige Variationsformulierung an.

b. Man berechne die Matrix, die bei der Diskretisierung der Variationsformulierung mit stückweise linearen finiten Elementen mit der Maschenweite $h = \frac{1}{2}$ entsteht.

c. Man bestimme die Näherungslösung und skizziere diese.

23. Man leite eine Variationsformulierung in $H^1(0,1)$ des Neumann–Randwertproblems

$$-u''(x) + u(x) = 3 \quad \text{für } x \in (0,1), \qquad u'(0) = 1, \quad u'(1) = 2$$

her. Man gebe die diskrete Variationsformulierung für den Raum $S_h^1(0,1) = \operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ der stückweise linearen und global stetigen Funktionen mit gleichmäßiger Maschenweite h und das resultierende Gleichungssystem $(A_h + M_h)\underline{u} = \underline{f}$ mit der Steifigkeitsmatrix $A_h \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, der Massematrix $M_h \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ und der rechten Seite $\underline{f} \in \mathbb{R}^{n+1}$ an. Für $h = \frac{1}{4}$ berechne man die Näherungslösung $u_h \in S_h^1(0,1)$ und skizziere diese.

24. Man leite eine Variationsformulierung in $H^1_{0,}(0,1) := \{v \in H^1(0,1) \colon v(0) = 0\}$ des gemischten Randwertproblems

$$-u''(x) + u(x) = 3 \quad \text{für } x \in (0,1), \qquad u(0) = 1, \quad u'(1) = 2$$

mittels Homogenisierung der inhomogenen Dirichlet–Randbedingung her. Man gebe die diskrete Variationsformulierung für den Raum $S_h^1(0,1) \cap H^1_{0,}(0,1) = \operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ der stückweise linearen und global stetigen Funktionen mit gleichmäßiger Maschenweite h und das resultierende Gleichungssystem $(A_h + M_h)\underline{u} = \underline{f}$ mit der Steifigkeitsmatrix $A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$, der Massematrix $M_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und der rechten Seite $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$ an. Für $h = \frac{1}{4}$ berechne man die Näherungslösung $u_h \in S_h^1(0,1)$ und skizziere diese.