

Numerische Mathematik 2

25. Man bestimme die exakte Lösung des Randwertproblems

$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = 0 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

und stelle diese grafisch dar.

26. Für das Randwertproblem

$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = 0 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

stelle man die zugehörige Variationsformulierung auf und untersuche diese auf eindeutige Lösbarkeit. Insbesondere zeige man die Beschränktheit und Elliptizität der zugehörigen Bilinearform.

27. Für die Diskretisierung des Randwertproblems

$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = 0 \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

mit stückweise linearen Basisfunktionen und einer global gleichmässigen Maschenweite h leite man eine Fehlerabschätzung in der Energienorm her. Dabei berechne man explizit die auftretende Norm der exakten Lösung. Was hat dies für Konsequenzen für die zu wählende Maschenweite?