Kapitel 3

Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Anstelle einer skalaren Funktion $y(x)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a,b], \tag{3.1}$$

betrachten wir jetzt ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung von n Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ als Lösung der Differentialgleichungen

$$y_k'(x) = f_k(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad y_k(x_0) = y_k^0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

In Vektorschreibweise lautet das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\underline{y}'(x) = \underline{f}(x, \underline{y}(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}^0, \quad x_0 \in [a,b]. \tag{3.2}$$

Formal entspricht das System (3.2) von explizit gegebenen Differentialgleichungen erster Ordnung der skalaren Gleichung (3.1). Insbesondere können alle Betrachtungen zur eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems (3.1) auf das System (3.2) übertragen werden. Wie im skalaren Fall definiert $(x, \underline{y}, \underline{f}(x, \underline{y}))$ ein Richtungsfeld der Differentialgleichung. Die komponentenweise Integration der Differentialgleichung (3.2) führt auf das äquivalente System von Integralgleichungen

$$\underline{y}(x) = \underline{y}^0 + \int_{x_0}^{x} \underline{f}(s, \underline{y}(s))\, ds =: \Phi[\underline{y}](x) \quad \text{für } x \in [a,b], \tag{3.3}$$

d.h.

$$y_k(x) = y_k^0 + \int_{x_0}^{x} f_k(s, y_1(s), \ldots, y_n(s))\, ds \quad \text{für } k = 1, \ldots, n, \; x \in [a,b].$$

Dabei ist $\Phi : (C([a,b]))^n \to (C([a,b]))^n$ ein Operator, der den Banach–Raum der im Intervall $[a,b]$ stetigen vektorwertigen Funktionen in sich selbst abbildet. Analog zum skalaren Fall definiert

$$\|\underline{g}\|_{(C([a,b]))^n, \gamma} := \max_{x \in [a,b]} \left| \|\underline{g}(x)\|_2 \, e^{-\gamma |x - x_0|} \right|$$

eine äquivalente Norm in $(C([a,b]))^n$. Dabei ist

$$\|\underline{a}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}$$

der Euklidische Abstand. Wird die globale Lipschitz–Bedingung

$$\|\underline{f}(x,\underline{y}^1) - \underline{f}(x,\underline{y}^2)\|_2 \le L\,\|\underline{y}^1 - \underline{y}^2\|_2 \quad \text{für alle } (x,\underline{y}^1),(x,\underline{y}^2) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n$$

vorausgesetzt, so kann Satz 2.4 entsprechend für das System (3.3) formuliert und bewiesen werden. Insbesondere folgt die eindeutige Lösbarkeit des Integralgleichungssystems (3.3) und somit des Anfangswertproblems (3.2), sowie die Konvergenz des Verfahrens von Picard–Lindelöf,

$$\underline{y}^{m+1}(x) := \underline{y}^0 + \int_{x_0}^x \underline{f}(s,\underline{y}^m(s))\,ds \quad \text{für } m=0,1,2,\ldots, \quad \underline{y}^0(x) := \underline{y}^0,\ x\in[a,b],$$

d.h. für $k = 1,\ldots,n$ und $x \in [a,b]$

$$y_k^{m+1}(x) = y_k^0 + \int_{x_0}^x f_k(s,y_1^m(s),\ldots,y_n^m(s))\,ds \quad \text{für } m=0,1,2,\ldots, \quad y_k^0(x) = y_k^0. \tag{3.4}$$

Bemerkung 3.1. *Bei der Berechnung der neuen Näherungslösung $\underline{y}^{m+1}$ werden in (3.4) für alle Komponenten y_k^{m+1} stets die vorherigen Näherungslösungen y_k^m eingesetzt. Wie beim Jacobi–Verfahren zur iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme entspricht dies einer Additiven Schwarzschen Methode. Werden die Näherungslösungen y_k^{m+1} rekursiv für $k = 1,\ldots,n$ berechnet, so können für die Berechnung von y_k^{m+1} die bereits berechneten Näherungslösungen $y_1^{m+1},\ldots,y_{k-1}^{m+1}$ verwendet werden. Bei der Lösung linearer Gleichungssysteme entspricht dies dem (vorwärtigen) Gauß–Seidel–Verfahren, allgemein sprechen wir von einer Multiplikativen Schwarzschen Methode.*

Beispiel 3.1. *Wir betrachten das System von Differentialgleichungen*

$$u'(x) = v(x), \quad v'(x) = u(x), \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Durch Einsetzen von $v(x) = u'(x)$ ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$u(x) = v'(x) = [u'(x)]' = u''(x),$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad v(x) = u'(x) = c_1e^x - c_2e^{-x}.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$u(0) = c_1 + c_2 = 1, \quad v(0) = c_1 - c_2 = 0, \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{2}.$$

Wie in Beispiel 3.1 gesehen, ist es unter gewissen Voraussetzungen möglich, ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung in eine Differentialgleichung der Ordnung n zu transformieren. Umgekehrt kann ein Anfangswertproblem für eine explizit gegebene Differentialgleichung der Ordnung n stets in ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung überführt werden: Betrachtet wird das Anfangswertproblem zur Bestimmung einer n–mal stetig differenzierbaren Funktion $y(x)$ als Lösung von

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \\ y^{(m)}(x_0) &= y_m^0 \quad \text{für } m = 0, \dots, n-1, \quad x_0 \in [a,b]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Mit den Transformationen

$$u_m(x) := y^{(m)}(x) \quad \text{für } m = 0, 1, \dots, n-1$$

folgt

$$u_m'(x) = [y^{(m)}(x)]' = y^{(m+1)}(x) = u_{m+1}(x) \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

und

$$\begin{aligned} u_{n-1}'(x) = [y^{(n-1)}(x)]' = y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ &= f(x, u_0(x), u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u_m(x_0) = y^{(m)}(x_0) = y_m^0 \quad \text{für } m = 0, \dots, n-1.$$

Zu lösen ist also das Anfangswertproblem

$$\underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad \underline{u}(x_0) = \underline{y}^0, \quad x_0 \in [a,b], \tag{3.6}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} u_0'(x) \\ u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ \vdots \\ u_{n-2}'(x) \\ u_{n-1}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \\ \vdots \\ u_{n-1}(x) \\ f(x, u_0(x), u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind alle Funktionen

$$f_k(x, \underline{u}(x)) := u_k(x) \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1$$

bezüglich $\underline{u}$ Lipschitz–stetig. Wird also die Lipschitz–Stetigkeit von $f(x, \underline{u})$ vorausgesetzt, so folgt die eindeutige Lösbarkeit des Systems (3.6) und somit des Anfangswertproblems (3.5).

Das System (3.2) gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung heißt autonom, falls die Funktion $\underline{f}(x, \underline{y}(x)) = f(\underline{y}(x))$ nicht explizit von der unabhängigen Veränderlichen x abhängt, d.h.

$$\underline{y}'(x) = \underline{f}(\underline{y}(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}^0.$$

Sind in (3.2) die Funktionen $f_k(x, \underline{y})$ linear in $\underline{y}$, d.h. gilt

$$f_k(x, \underline{y}) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}(x) y_\ell(x) + g_k(x) \quad \text{für } k = 1, \ldots, n,$$

so ergibt sich ein lineares System von Differentialgleichungen,

$$\underline{y}'(x) = A(x)\underline{y}(x) + \underline{g}(x), \quad x \in [a,b]. \tag{3.7}$$

Das System (3.7) heißt homogen, wenn $g_k(x) \equiv 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$ und $x \in [a,b]$ gilt, ein nicht homogenes System heißt auch inhomogen.

Für stetige Koeffizienten $a_{k\ell} \in C([a,b])$, $k, \ell = 1, \ldots, n$, und für stetige Funktionen $g_k \in C([a,b])$, $k = 1, \ldots, n$, folgt die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems (3.7). Sind $a_{k\ell}(x)$ und $g_k(x)$ für $x \in [a,b]$ nur stückweise stetig, so existiert eine stückweise stetig differenzierbare Lösung, welche die Differentialgleichung nur in ihren Stetigkeitspunkten erfüllt.

Sind mit $\underline{u}(x)$ und $\underline{v}(x)$ Lösungen der Differentialgleichungen

$$\underline{u}'(x) = A(x)\underline{u}(x) + \underline{f}(x), \quad \underline{v}'(x) = A(x)\underline{v}(x) + \underline{g}(x) \quad \text{für } x \in [a,b]$$

gegeben, so folgt mit dem Superpositionsprinzip, daß $\alpha\underline{u}(x) + \beta\underline{v}(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
(\alpha\underline{u}(x) + \beta\underline{v}(x))' &= \alpha\underline{u}'(x) + \beta\underline{v}'(x) \\
&= \alpha\Big[A(x)\underline{u}(x) + \underline{f}(x)\Big] + \beta\Big[A(x)\underline{v}(x) + \underline{g}(x)\Big] \\
&= A(x)\Big[\alpha\underline{u}(x) + \beta\underline{v}(x)\Big] + \Big[\alpha\underline{f}(x) + \beta\underline{g}(x)\Big]
\end{aligned}$$

ist. Damit bilden alle Lösungen des linearen homogenen Systems

$$\underline{y}'(x) = A(x)\underline{y}(x) \quad \text{für } x \in [a,b] \tag{3.8}$$

einen linearen Vektorraum, und die Lösung des inhomogenen Systems (3.7) ist gegeben durch $\underline{y}(x) = \underline{y}_h(x) + \underline{y}_p(x)$. Dabei ist $\underline{y}_h(x)$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems (3.8), und $\underline{y}_p(x)$ ist eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems (3.7), d.h.

$$\underline{y}_h'(x) = A(x)\underline{y}_h(x), \quad \underline{y}_p'(x) = A(x)\underline{y}_p(x) + \underline{g}(x).$$

Für $k = 1, \ldots, n$ sei $\underline{y}_k(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (3.8), d.h.

$$\underline{y}_k'(x) = A(x)\underline{y}_k(x) \quad \text{für } x \in [a,b].$$

Eine gesuchte Lösung des Anfangswertproblems

$$\underline{y}'(x) = A(x)\underline{y}(x) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}^0, \quad x_0 \in [a,b], \tag{3.9}$$

kann dann als Linearkombination

$$\underline{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{y}_k(x) \quad \text{für } x \in [a,b]$$

dargestellt werden, aus der Anfangsbedingung folgt

$$\underline{y}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{y}_k(x_0) = \underline{y}^0.$$

Die Zerlegungskoeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind also Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y_{11}(x_0) & \ldots & y_{n1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(x_0) & \ldots & y_{nn}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Das Anfangswertproblem (3.9) des homogenen linearen Systems ist also genau dann eindeutig lösbar, wenn das lineare Gleichungssystem (3.10) eindeutig lösbar ist.

Definition 3.1. *Für $x \in [a,b]$ heißt*

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & \ldots & y_{n1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(x_0) & \ldots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

Wronski–Determinante der Lösungen $\underline{y}_k(x)$ des homogenen Systems $\underline{y}'_k(x) = A(x)\underline{y}_k(x)$.

Lemma 3.1. *Für die Ableitung der Wronski–Determinante* (3.11) *gilt*

$$W'(x) = W(x) \operatorname{tr} A(x) = W(x) \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x)\,.$$

Beweis: Für $n = 2$ seien $\underline{y}_1(x)$ und $\underline{y}_2(x)$ Lösungen des homogenen linearen Systems $\underline{y}'(x) = A(x)\underline{y}(x)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y'_{11}(x) \\ y'_{12}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{12}(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} y'_{21}(x) \\ y'_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{21}(x) \\ y_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Für die Ableitung der Wronski–Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} = y_{11}(x)y_{22}(x) - y_{21}(x)y_{21}(x)$$

ergibt die Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{d}{dx}\Big[y_{11}(x)y_{22}(x) - y_{21}(x)y_{21}(x)\Big] \\ &= y'_{11}(x)y_{22}(x) + y_{11}(x)y'_{22}(x) - y'_{21}(x)y_{12}(x) - y_{21}(x)y'_{12}(x) \\ &= \Big[a_{11}(x)y_{11}(x) + a_{12}(x)y_{12}(x)\Big]y_{22}(x) + y_{11}(x)\Big[a_{21}(x)y_{21}(x) + a_{22}(x)y_{22}(x)\Big] \\ &\quad -\Big[a_{11}(x)y_{21}(x) + a_{12}(x)y_{22}(x)\Big]y_{12}(x) - y_{21}(x)\Big[a_{21}(x)y_{11}(x) + a_{22}(x)y_{12}(x)\Big] \\ &= \Big[y_{11}(x)y_{22}(x) - y_{12}(x)y_{21}(x)\Big]\Big[a_{11}(x) + a_{22}(x)\Big] = W(x)\,\mathrm{tr}\,A(x). \end{aligned}$$

Für $n > 2$ verläuft der Beweis entsprechend. ∎

Definition 3.2. *n Lösungen $\underline{y}_1(x), \dots, \underline{y}_n(x)$ des homogenen linearen Systems $\underline{y}'(x) = A(x)\underline{y}(x)$ heißen Fundamentalsystem genau dann, wenn $\underline{y}_1(x), \dots, \underline{y}_n(x)$ linear unabhängig sind, d.h. aus*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{y}_k(x) = \underline{0} \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

folgt $\alpha_k = 0$ für $k = 1, \dots, n$.

Satz 3.1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i. Es existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $W(x_0) \neq 0$.

ii. Es gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

iii. $\underline{y}_1(x), \dots, \underline{y}_n(x)$ bilden ein Fundamentalsystem.

Beweis: Aus $W'(x) = W(x)\,\mathrm{tr}\,A(x)$ folgt

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\,A(s)\,ds\right)$$

und somit die Aq̈uivalenz zwischen *i.* und *ii.* Andererseits beschreibt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gerade die lineare Unabhängigkeit der Lösungen $\underline{y}_1(x), \dots, \underline{y}_n(x)$. ∎

Das Nichtverschwinden der Wronski–Determinante $W(x)$ ist also ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Fundamentalsystems.

Definition 3.3. *Bilden die Lösungen* $\underline{y}_1(x), \dots, \underline{y}_n(x)$ *ein Fundamentalsystem, so heißt*

$$Y(x) := \Big(\underline{y}_1(x), \dots, \underline{y}_n(x)\Big) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{n1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix.

Nach Konstruktion der Fundamentalmatrix ist

$$\begin{aligned} Y'(x) &= \Big(\underline{y}_1'(x), \dots, \underline{y}_n'(x)\Big) \\ &= \Big(A(x)\underline{y}_1(x), \dots, A(x)\underline{y}_n(x)\Big) \\ &= A(x)\Big(\underline{y}_1(x), \dots, \underline{y}_n(x)\Big) = A(x)Y(x), \end{aligned}$$

d.h. die Fundamentalmatrix genügt der Matrix–Differentialgleichung

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \quad \text{für } x \in [a, b]. \tag{3.12}$$

Wegen $W(x) = \det Y(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist $Y(x)$ invertierbar, so daß die Übergangsmatrix

$$Y(x, x_0) := Y(x)Y(x_0)^{-1}, \quad Y(x_0, x_0) = I \tag{3.13}$$

existiert. Insbesondere ist

$$\underline{y}(x) := Y(x, x_0)\underline{y}^0 = Y(x)Y(x_0)^{-1}\underline{y}^0 \tag{3.14}$$

wohldefiniert, und wegen

$$\underline{y}'(x) = Y'(x)Y(x_0)^{-1}\underline{y}^0 = A(x)Y(x)Y(x_0)^{-1}\underline{y}_0 = A(x)\underline{y}(x), \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}^0$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (3.9).

Es ist aber im allgemeinen nicht möglich, Lösungen eines homogenen Systems in geschlossener Form anzugeben. Ist jedoch eine Lösung bekannt, so lässt sich das System von n Differentialgleichungen auf ein System von $n-1$ Differentialgleichungen zurückführen.

3.1 Das Reduktionsverfahren von D'Alembert

Sei $\underline{y}_1(x)$ eine bekannte Lösung des homogenen Systems (3.8),

$$\underline{y}_1'(x) = A(x)\underline{y}_1(x) \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $y_{11}(x) \neq 0$ vorausgesetzt. Mit dem Ansatz

$$\underline{y}(x) = \phi(x)\,\underline{y}_1(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \phi(x)\,\underline{y}_1(x) + \underline{z}(x)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung (3.8)

$$\begin{aligned} \underline{y}'(x) &= \phi(x)\,\underline{y}_1'(x) + \phi'(x)\,\underline{y}_1(x) + \underline{z}'(x) \\ &= \phi(x)\,A(x)\underline{y}_1(x) + \phi'(x)\underline{y}_1(x) + \underline{z}'(x) \stackrel{!}{=} A(x)\underline{y}(x) \\ &= \phi(x)A(x)\underline{y}_1(x) + A(x)\underline{z}(x). \end{aligned}$$

Zu lösen bleibt somit das System

$$\phi'(x)\underline{y}_1(x) + \underline{z}'(x) = A(x)\underline{z}(x).$$

Wegen $z_1(x) \equiv 0$ und $y_{11}(x) \neq 0$ folgt daraus

$$\phi'(x) = \frac{1}{y_{11}(x)} \sum_{\ell=2}^{n} a_{1\ell}(x) z_\ell(x),$$

bzw. ist für $k = 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} z_k'(x) &= \sum_{\ell=2}^{n} a_{k\ell}(x) z_\ell(x) - \phi'(x) y_{1k}(x) \\ &= \sum_{\ell=2}^{n} a_{k\ell}(x) z_\ell(x) - \frac{y_{1k}(x)}{y_{11}(x)} \sum_{\ell=2}^{n} a_{1\ell}(x) z_\ell(x) \\ &= \sum_{\ell=2}^{n} \left[a_{k\ell}(x) - \frac{y_{1k}(x)}{y_{11}(x)} a_{1\ell}(x) \right] z_\ell(x). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Zu lösen ist also ein homogenes lineares System von $n-1$ Differentialgleichungen. Für eine Lösung $\underline{z}(x)$ kann anschließend

$$\phi(x) = \int \frac{1}{y_{11}(x)} \sum_{\ell=2}^{n} a_{1\ell}(x) z_\ell(x)\, dx$$

berechnet werden. Zusammenfassend gilt:

Satz 3.2. *Sei* $\underline{y}_1(x)$ *Lösung des homogenen linearen Systems* (3.8) *mit* $y_{11}(x) \neq 0$ *für* $x \in [a, b]$. *Sei* $\underline{z}_2(x), \ldots, \underline{z}_n(x)$ *ein Fundamentalsystem des reduzierten Systems* (3.15). *Dann bilden*

$$\underline{y}_1(x), \quad \underline{y}_k(x) := \phi_k(x)\underline{y}_1(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{z}_k(x) \end{pmatrix}, \quad \phi_k(x) = \int \frac{1}{y_{11}(x)} \sum_{\ell=2}^{n} a_{1\ell}(x) z_{k\ell}(x)\, dx$$

für $k = 2, \ldots, n$ *ein Fundamentalsystem* (3.8).

Beispiel 3.2. *Betrachtet wird das System*

$$y_1'(x) = \frac{1}{x}\, y_1(x) - y_2(x), \quad y_2'(x) = \frac{1}{x^2}\, y_1(x) + \frac{2}{x}\, y_2(x) \quad \textit{für } x > 0,$$

d.h.

$$a_{11}(x) = \frac{1}{x}, \quad a_{12}(x) = -1, \quad a_{21}(x) = \frac{1}{x^2}, \quad a_{22}(x) = \frac{2}{x}.$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$y_1(x) = x^2 y_2'(x) - 2x\, y_2(x),$$

und Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$x^2 y_2''(x) - x\, y_2'(x) + y_2(x) = 0, \quad y_2(x) = x, \quad y_1(x) = -x^2.$$

$z_2(x)$ *ergibt sich als Lösung des reduzierten Systems*

$$z_2'(x) = \left[a_{22}(x) - \frac{y_{12}(x)}{y_{11}(x)} a_{12}(x)\right] z_2(x) = \left[\frac{2}{x} - \frac{x}{-x^2}(-1)\right] z_2(x) = \frac{1}{x}\, z_2(x),$$

d.h. $z_2(x) = x$. *Weiters ist*

$$\phi_2(x) = \int \frac{1}{y_{11}(x)} a_{12}(x) z_2(x) dx == \int \frac{1}{-x^2}(-1) x dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\, x\,.$$

Damit ergibt sich als Fundamentalsystem

$$\underline{y}_1(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2(x) = \ln\, x \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix},$$

bzw.

$$Y(x) = \begin{pmatrix} -x^2 & -x^2 \ln x \\ x & x(\ln x + 1) \end{pmatrix}.$$

Für die Wronski–Determinante ergibt sich

$$W(x) = \begin{vmatrix} -x^2 & -x^2 \ln x \\ x & x(\ln x + 1) \end{vmatrix} = -x^3(\ln x + 1) + x^3 \ln x = -x^3 < 0$$

für $x > 0$. *Daher ist die Fundamentalmatrix* $Y(x)$ *für alle* $x > 0$ *invertierbar. Insbesondere für* $x_0 = 1$ *ist*

$$Y(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [Y(1)]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Übergangsmatrix ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} Y(x,1) = Y(x)[Y(1)]^{-1} &= \begin{pmatrix} -x^2 & -x^2 \ln x \\ x & x(\ln x + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2(1 - \ln x) & -x^2 \ln x \\ x \ln x & x(\ln x + 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y_1'(x) = \frac{1}{x}\,y_1(x) - y_2(x), \quad y_2'(x) = \frac{1}{x^2}\,y_1(x) + \frac{2}{x}\,y_2(x), \quad y_1(1) = y_2(1) = 1,$$

folgt dann

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(1-\ln x) & -x^2\ln x \\ x\ln x & x(\ln x + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(1-2\ln x) \\ x(2\ln x + 1) \end{pmatrix}.$$

3.2 Inhomogene lineare Systeme

Betrachtet wird das Anfangswertproblem eines inhomogenen Systems linearer Differentialgleichungen

$$\underline{y}'(x) = A(x)\underline{y}(x) + \underline{g}(x) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}^0. \tag{3.16}$$

Sei $Y(x)$ eine bereits bekannte Fundamentalmatrix des homogenen Systems

$$Y'(x) = A(x)Y(x),$$

dann lautet der Ansatz der Variation der Konstanten zur Bestimmung einer partikulären Lösung

$$\underline{y}_p(x) = Y(x)\underline{u}(x).$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$\underline{y}_p'(x) = Y'(x)\underline{u}(x) + Y(x)\underline{u}'(x) = A(x)Y(x)\underline{u}(x) + Y(x)\underline{u}'(x) \stackrel{!}{=} A(x)Y(x)\underline{u}(x) + \underline{g}(x),$$

und somit

$$Y(x)\underline{u}'(x) = \underline{g}(x).$$

Wegen $W(x) = \det Y(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ ist die Fundamentalmatrix $Y(x)$ invertierbar, d.h.

$$\underline{u}'(x) = [Y(x)]^{-1}\underline{g}(x),$$

bzw.

$$\underline{u}(x) = \int_{x_0}^{x} [Y(s)]^{-1}\underline{g}(s)\,ds.$$

Für die partikuläre Lösung folgt dann

$$\underline{y}_p(x) = Y(x)\underline{u}(x) = Y(x)\int_{x_0}^{x} [Y(s)]^{-1}\underline{g}(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} Y(x,s)\underline{g}(s)\,ds$$

mit der Übergangsmatrix $Y(x,s) = Y(x)[Y(s)]^{-1}$. Zusammenfassend ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems (3.16) als

$$\underline{y}(x) = Y(x,x_0)\underline{y}^0 + \int_{x_0}^{x} Y(x,s)\underline{g}(s)\,ds. \tag{3.17}$$

Beispiel 3.3. *Für das inhomogene System*

$$y_1'(x) = \frac{1}{x}\,y_1(x) - y_2(x) + x, \quad y_2'(x) = \frac{1}{x^2}\,y_1(x) + \frac{2}{x}\,y_2(x) - x^2, \quad x > 0, \quad y_1(1) = y_2(1) = 1.$$

lautet die Fundamentalmatrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} -x^2 & -x^2 \ln x \\ x & x(\ln x + 1) \end{pmatrix}, \quad W(x) = \det Y(x) = -x^3.$$

Dann ist

$$[Y(x)]^{-1} = -\frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} x(\ln x + 1) & x^2 \ln x \\ -x & -x^2 \end{pmatrix}$$

und für die partikuläre Lösung ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{y}_p(x) &= Y(x) \int_1^x [Y(s)]^{-1} \underline{g}(s)\, ds \\ &= -\begin{pmatrix} -x^2 & -x^2 \ln x \\ x & x(\ln x + 1) \end{pmatrix} \int_1^x \frac{1}{s^3} \begin{pmatrix} s(\ln s + 1) & s^2 \ln s \\ -s & -s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ -s^2 \end{pmatrix} ds \\ &= -\begin{pmatrix} -x^2 & -x^2 \ln x \\ x & x(\ln x + 1) \end{pmatrix} \int_1^x \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 1 + \ln s - s^2 \ln s \\ s^2 - 1 \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{s} ds &= \ln x, \\ \int_1^x \frac{\ln s}{s}\, ds &= [\ln x]^2 - \int_1^x \frac{\ln s}{s}\, ds = \frac{1}{2}[\ln x]^2, \\ \int_1^x s \ln s\, ds &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int_1^x \frac{1}{2} s\, ds = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \underline{y}_p(x) &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -x^2 & -x^2 \ln x \\ x & x(\ln x + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \ln x + 2[\ln x]^2 - 2x^2 \ln x + x^2 - 1 \\ 2x^2 - 2 - 4 \ln x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2[x^2 - 1 - 2(\ln x)^2 + 2 \ln x] \\ x[3 - 3x^2 + 2(\ln x)^2 + 2 \ln x] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.3 Lineare homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\underline{y}'(x) = A(x)\underline{y}(x) \quad \text{für } x \in [a, b], \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}^0$$

ist gegeben durch
$$\underline{y}(x) = Y(x, x_0)\underline{y}^0$$
mit der Übergangsmatrix
$$Y(x, x_0) = Y(x)[Y(x_0)]^{-1}.$$
Die Fundamentalmatrix $Y(x)$ ist dabei Lösung des Matrix–Differentialgleichungssytems (3.12). Wegen
$$Y'(x, x_0) = Y'(x)[Y(x_0)]^{-1} = A(x)Y(x)[Y(x_0)]^{-1} = A(x)Y(x, x_0)$$
und
$$Y(x_0, x_0) = Y(x_0)[Y(x_0)]^{-1} = I$$
ist $Y(x, x_0)$ eindeutige Lösung des Matrix–Anfangswertproblems
$$Y'(x, x_0) = A(x)Y(x, x_0) \quad \text{für } x \in [a, b], \quad Y(x_0, x_0) = I, \quad x_0 \in [a, b]. \tag{3.18}$$
Die Lösung von (3.18) genügt der Integralgleichung
$$Y(x, x_0) = I + \int_{x_0}^{x} A(s)Y(s, x_0)\, ds,$$
so daß durch die Methode der sukzessiven Approximation
$$Y^{k+1}(x, x_0) = I + \int_{x_0}^{x} A(s)Y^k(s, x_0)\, ds, \quad Y^0(x, x_0) = I$$
eine Darstellung der Übertragungsmatrix $Y(x, x_0)$ konstruiert werden kann. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich die Übertragungsmatrix sogar mit nur einer einzigen Integration in einer Reihe darstellen: Für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird durch
$$\exp(B) = e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k, \quad B^0 := I$$
die Exponentialmatrix erklärt. Wegen
$$\|\exp(B)\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B\|^k = e^{\|B\|}$$
ist $\exp(\|B\|)$ eine konvergente Majorante und somit ergibt sich die Wohldefiniertheit der Exponentialmatrix. Wir definieren jetzt die Matrix–wertige Funktion
$$C(x, x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{x_0}^{x} A(s)\, ds \right)^k$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
C'(x,x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^{x} A(s)\, ds \right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left(\int_{x_0}^{x} A(s)\, ds \right)^{k-1} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} A(s)\, ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{x_0}^{x} A(s)\, ds \right)^k A(x) .
\end{aligned}$$

Ist die Matrix–Multiplikation

$$A(s)A(x) = A(x)A(s) \tag{3.19}$$

kommutativ, so folgt

$$C'(x,x_0) = A(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{x_0}^{x} A(s)\, ds \right)^k = A(x)C(x,x_0).$$

Weiterhin ist

$$C(x_0,x_0) = I.$$

Unter der Voraussetzung (3.19) ist die Matrix–wertige Funktion $C(x,x_0)$ Lösung des Matrix–Anfangswertproblems (3.18),

$$C'(x,x_0) = A(x)C(x,x_0), \quad C(x_0,x_0) = I.$$

Da die Lösung von (3.18) eindeutig bestimmt ist, folgt dann für die Übertragungsmatrix

$$Y(x,x_0) = C(x,x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{x_0}^{x} A(s)\, ds \right)^k = \exp \left(\int_{x_0}^{x} A(s)\, ds \right).$$

Insbesondere für ein System mit konstanten Koeffizienten, d.h. $A(x) = A$, ist die Vertauschbarkeit

$$A(s)A(x) = A(x)A(s) = A^2$$

stets erfüllt, und für die Übertragungsmatrix ergibt sich

$$Y(x,x_0) = \exp \left(\int_{x_0}^{x} A\, ds \right) = \exp\Big((x-x_0)A \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k.$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems folgt dann die Darstellung

$$\underline{y}(x) = Y(x,x_0)\underline{y}^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k \underline{y}^0.$$

Wird vorausgesetzt, daß die Matrix A diagonalisierbar ist, d.h. es gilt

$$A = VDV^{-1}, \quad V = \Big(\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^n\Big), \quad D = \operatorname{diag}\Big(\lambda_k\Big)_{k=1}^n, \quad A\underline{v}^k = \lambda_k \underline{v}^k,$$

so folgt

$$\underline{y}(x) = V \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} D^k V^{-1} \underline{y}^0.$$

Wird der Anfangsvektor

$$\underline{y}^0 = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \underline{v}^\ell = V \underline{\alpha}$$

in der Basis der Eigenvektoren von A dargestellt, so ergibt sich

$$\underline{y}(x) = V \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} D^k \underline{\alpha} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x-x_0)^k \lambda_\ell^k \alpha_\ell \underline{v}^\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e^{(x-x_0)\lambda_\ell} \underline{v}^\ell. \tag{3.20}$$

Beispiel 3.4. *Betrachtet wird das Anfangswertproblem*

$$y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x), \quad y_2'(x) = 4y_1(x) + y_2(x), \quad y_1(0) = y_2(0) = 1$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \overset{!}{=} 0$$

folgt

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

mit den Eigenvektoren

$$\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für den Anfangsvektor $\underline{y}^0$ *folgt dann*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich als Lösung des Anfangswertproblems

$$\underline{y}(x) = \frac{3}{4} e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für die bisherigen Betrachtungen haben wir die Diagonalisierbarkeit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vorausgesetzt. Im folgenden wollen die Darstellbarkeit der Lösung im allgemeinen Fall untersuchen.

Sei $(\lambda, \underline{z}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ Eigenwert und Eigenvektor von A, d.h. $A\underline{z} = \lambda\underline{z}$. Dann gilt für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\underline{y}'(x) = A\underline{y}(x), \quad \underline{y}(x_0) = \underline{z}$$

die Darstellung

$$\underline{y}(x) = e^{\lambda(x-x_0)}\underline{z}.$$

Besitzt A n linear unabhängige Eigenvektoren $\underline{z}^1, \ldots, \underline{z}^n$, so wird durch

$$\underline{y}^k := e^{\lambda_k(x-x_0)}\underline{z}^k \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem definiert. Dies entspricht gerade dem Fall einer diagonalisierbaren Koeffizientenmatrix, d.h. die Jordansche Normalform von A hat Diagonalgestalt. Auf diesen Fall bezieht sich auch der folgende Satz.

Satz 3.3. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reell.*

i. Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ ein komplexer Eigenwert der reellen Matrix A mit $\beta \neq 0$, und sei $\underline{z} = \underline{a} + i\underline{b}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ergeben sich aus der komplexen Lösung

$$\underline{y}(x) = e^{\lambda(x-x_0)}\underline{z}$$

zwei reelle Lösungen der Gestalt

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) = \operatorname{Re}\underline{y}(x) &= \operatorname{Re}\left[e^{\alpha(x-x_0)}\Big(\cos\beta(x-x_0) + i\sin\beta(x-x_0)\Big)\Big(\underline{a} + i\underline{b}\Big)\right] \\ &= e^{\alpha(x-x_0)}\Big[\cos\beta(x-x_0)\underline{a} - \sin\beta(x-x_0)\underline{b}\Big], \\ \underline{v}(x) = \operatorname{Im}\underline{y}(x) &= \operatorname{Im}\left[e^{\alpha(x-x_0)}\Big(\cos\beta(x-x_0) + i\sin\beta(x-x_0)\Big)\Big(\underline{a} + i\underline{b}\Big)\right] \\ &= e^{\alpha(x-x_0)}\Big[\sin\beta(x-x_0)\underline{a} + \cos\beta(x-x_0)\underline{b}\Big]. \end{aligned}$$

ii. Es seien $2p$ komplexe Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$; $\lambda_{p+1} = \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_{2p} = \overline{\lambda}_p$ und q weitere reelle Eigenwerte $\lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_{2p+q}$ vorhanden. Die zugehörigen $p+q$ Eigenvektoren $\underline{z}^k \in \mathbb{C}^n$ seien linear unabhängig und für $k = p+1, \ldots, p+q$ reell. Dann bilden

$$\underline{y}^{2k-1}(x) = \operatorname{Re}\Big[e^{\lambda_k(x-x_0)}\underline{z}^k\Big], \quad \underline{y}^{2k}(x) = \operatorname{Im}\Big[e^{\lambda_k(x-x_0)}\underline{z}^k\Big] \quad \textit{für } k = 1, \ldots, p$$

und

$$\underline{y}^k = e^{\lambda_k x}\underline{z}^k \quad \textit{für } k = 2p+1, \ldots, 2p+q$$

ein System von $2p+q$ linear unabhängigen Lösungen. Für $2p+q = n$ bilden diese ein reelles Fundamentalsystem.

Beispiel 3.5. *Betrachtet wird das System*

$$y_1'(x) = -y_1(x) - 4y_2(x), \quad y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 5 \overset{!}{=} 0$$

folgt

$$\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i\,.$$

Für die Bestimmung des Eigenvektors $\underline{z}$ *zu* $\lambda_1 = -1 + 2i$ *ist*

$$\begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen, es ergibt sich

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = 1.$$

Mit

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt schließlich

$$\underline{u}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}, \quad \underline{v}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix},$$

d.h. die allgemeine reelle Lösung lautet

$$\underline{y}(x) = c_1\, e^{-x} \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} + c_2\, e^{-x} \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}.$$

Der Fall einer Jordanschen Normalform mit Nebendiagonaleinträgen führt auf Lösungen etwas allgemeinerer Gestalt. Seien α_k die Vielfachheiten der Nullstellen λ_k des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda I) = \prod_{k=1}^{r} (\lambda_k - \lambda)^{\alpha_k}.$$

Dann ist α_k die algebraische Vielfachheit und $\dim(\ker(A - \lambda_k I))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_k. Für die Transformation der Matrix A auf Jordansche Normalform definieren wir die Jordan–Ketten $\underline{b}^k, \underline{b}^{k+1}, \ldots, \underline{b}^{k+\kappa}$ mit $\kappa \leq \alpha_k - \dim(\ker(A - \lambda_k))$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_k I)\underline{b}^k &= \underline{0}, \\ (A - \lambda_k I)\underline{b}^{k+1} &= \underline{b}^k, \\ &\vdots \\ (A - \lambda_k I)\underline{b}^{k+\kappa} &= \underline{b}^{k+\kappa-1}. \end{aligned}$$

Für $\underline{b}^k \neq \underline{0}$ sind die Vektoren $\underline{b}^k, \dots, \underline{b}^{k+\kappa}$ linear unabhängig. Definieren wir

$$B_k = \Big(\underline{b}^k, \underline{b}^{k+1}, \dots, \underline{b}^{k+\kappa}\Big) \in \mathbb{R}^{n\times(\kappa+1)},$$

so folgt

$$\begin{aligned}
AB_k &= \Big(A\underline{b}^k, A\underline{b}^{k+1}, \dots, A\underline{b}^{k+\kappa}\Big) \\
&= \Big(\lambda_k\underline{b}^k, \underline{b}^k + \lambda_k\underline{b}^{k+1}, \underline{b}^{k+\kappa-1} + \lambda_k\underline{b}^{k+\kappa}\Big) \\
&= \Big(\underline{b}^k, \underline{b}^{k+1}, \dots, \underline{b}^{k+\kappa}\Big) \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & & \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix} = B_k J_k
\end{aligned}$$

mit den Jordan–Blöcken $J_k \in \mathbb{R}^{(\kappa+1)\times(\kappa+1)}$. Bildet man aus allen $\widetilde{r}$ linear unabhängigen Jordan–Ketten und den zugehörigen Eigen– und Hauptvektoren die reguläre Matrix

$$B = \Big(B_1, \dots, B_{\widetilde{r}}\Big),$$

so folgt

$$AB = BJ, \quad J = \mathrm{diag}\Big(J_k\Big).$$

Der Einfachheit halber betrachten wir im folgenden den Fall einer Matrix A mit nur einem Jordan–Kasten, d.h.

$$B^{-1}AB = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\underline{y}'(x) = A\underline{y}(x)$$

führt die Multiplikation mit B^{-1} auf

$$(B^{-1}\underline{y}(x))' = B^{-1}ABB^{-1}\underline{y}(x)$$

und mit der Transformation $\underline{w} = B^{-1}\underline{y}$ bleibt zu lösen:

$$\underline{w}'(x) = J\underline{w}(x) = \lambda\underline{w}(x) + F\underline{w}(x)$$

mit der sogenannten Shift–Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Übergangsmatrix des Differentialgleichungssystems

$$\underline{w}'(x) = (\lambda I + F)\underline{w}(x)$$

ergibt sich

$$W(x, x_0) = e^{(x-x_0)(\lambda I + F)} = e^{\lambda(x-x_0)} e^{(x-x_0)F} = e^{\lambda(x-x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} F^k.$$

Wegen

$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

folgt durch vollständige Induktion $F^k = 0$ für $k \geq n$. Damit ist

$$\begin{aligned} W(x, x_0) &= e^{\lambda(x-x_0)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} F^k \\ &= e^{\lambda(x-x_0)} \begin{pmatrix} 1 & x - x_0 & \frac{1}{2}(x-x_0)^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\ & 1 & x & \frac{1}{2}(x-x_0)^2 & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und durch Rücktransformation ergibt sich schließlich

$$Y(x, x_0) = BW(x, x_0).$$

Im Fall mehrerer Jordan–Kästchen ist entsprechend zu verfahren.

Zusammenfassend ergibt sich der folgende Satz:

Satz 3.4. *Zu einer α_k–fachen Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\det(A-\lambda I)$ *gibt es α_k linear unabhängige Lösungen*

$$\underline{y}^m(x) = e^{\lambda x}\underline{p}_{m-1}(x),$$

wobei die Komponenten von $\underline{p}_{m-1}(x)$ Polynome vom Grad $m-1$ sind, $m = 1, \ldots, \alpha_k$.

Beispiel 3.6. *Betrachtet wird das Anfangswertproblem*

$$y_1'(x) = y_1(x) - y_2(x), \quad y_2'(x) = 4y_1(x) - 3y_2(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(3+\lambda)+4 = \lambda^2+2\lambda+1 = (1+\lambda)^2$$

folgt $\lambda = -1$ als doppelter Eigenwert. Für die Bestimmung des zugehörigen Eigenvektors ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d.h. \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist einziger Eigenvektor. Zugehörige Lösung ist

$$\underline{y}^1(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung einer zweiten Lösung betrachten wir den Ansatz

$$\underline{y}^2(x) = e^{-x}\underline{p}_1(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in das Differentialgleichungssystem ergibt

$$\underline{y}_2'(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} b-a-bx \\ d-c-dx \end{pmatrix} \overset{!}{=} e^{-x}A\begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix}.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$(A+I)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad (A+I)\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar entsprechen diese Gleichungen dem System zur Bestimmung der Jordankette. Als Lösung ergibt sich

$$b = 1, \quad d = 2, \quad a = 1, \quad c = 1.$$

Somit lautet die zweite Lösung

$$\underline{y}^2(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1+x \\ 1+2x \end{pmatrix}.$$

3.4 Langzeitverhalten autonomer Systeme

Viele Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen sind autonom und haben die Gestalt

$$\underline{y}'(x) = \underline{f}(\underline{y}(x)),$$

d.h. die rechte Seite $\underline{f}(\underline{y})$ hängt nicht explizit von der Unabhängigen x, zum Beispiel der Zeit, ab. Differentialgleichungen dieser Gestalt treten zum Beispiel auf, wenn die zugrunde liegenden physikalischen Gesetze nicht von der Zeit abhängen.

Betrachtet man die Lösung $\underline{y}(x)$ im $\mathbb{R}^n$, so definiert sie dort, im sogenannten Phasenraum, eine Raumkurve oder Trajektorie

$$\gamma := \Big\{\underline{y}(x) \in \mathbb{R}^n : x \in [a, b]\Big\}.$$

Der Graph einer Trajektorie wird auch Orbit genannt. Insbesondere interessiert uns das Verhalten der Lösungen für $x \to \infty$, d.h. die möglichen Endzustände, bzw. die Herkunft für $x \to -\infty$, d.h. die möglichen Urzustände.

Der einfachste Fall von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen ergibt sich für $n = 2$. Hier nennt man den Phasenraum $\mathbb{R}^2$ auch die Poincare'sche Phasenebene.

Beispiel 3.7. *Betrachtet wird das Anfangswertproblem*

$$y_1'(x) = -y_1(x) - 8y_2(x), \quad y_2'(x) = 8y_1(x) - y_2(x), \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -8 \\ 8 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 65$$

und für die Eigenwerte von A ergibt sich $\lambda = -1 \pm 8i$. Für die Berechnung des Eigenvektors $\underline{v}^1$ zu $\lambda_1 = -1 + 8i$ ist

$$\begin{pmatrix} -8i & -8 \\ 8 & -8i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $v_1^1 = 1$ folgt dann $v_2^1 = -i$. Die zugehörige komplexwertige Lösung lautet also

$$\underline{v}(x) = e^{\lambda_1 x}\underline{v}^1 = e^{-x}\Big[\cos 8x + i \sin 8x\Big]\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

bzw. ergibt sich für die allgemeine reellwertige Lösung

$$\underline{y}(x) = e^{-x}\left\{c_1\begin{pmatrix} \cos 8x \\ \sin 8x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin 8x \\ -\cos 8x \end{pmatrix}\right\}.$$

Aus der Anfangsbedingung

$$\underline{y}(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich schließlich $c_1 = 1$ *und* $c_2 = 0$*, d.h. die Lösung*

$$\underline{y}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos 8x \\ \sin 8x \end{pmatrix}$$

strebt für $x \to \infty$ *gegen den Ursprung.*

In Beispiel 3.7 haben wir ein System der Gestalt

$$y_1'(x) = f_1(y_1(x), y_2(x)), \quad y_2'(x) = f_2(y_1(x), y_2(x))$$

betrachtet. Schreiben wir

$$y_2(x) = y_2(y_1(x)),$$

so folgt mit der Kettenregel

$$y_2'(x) = \frac{d}{dx} y_2(y_1(x)) = \frac{d}{dy_1} y_2(y_1) y_1'(x) = \frac{d}{dy_1} y_2(y_1) f_1(y_1, y_2) \overset{!}{=} f_2(y_1, y_2).$$

Mit den Substitutionen $y = y_2$ und $x = y_1$ folgt also

$$f_1(x, y(x)) y'(x) - f_2(x, y(x)) = 0,$$

zu lösen ist also eine implizit gegebene Differentialgleichung

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Für ein implizit gegebenes System von n Differentialgleichungen zur Bestimmung von n Funktionen $y_1(t), \dots, y_n(t)$, d.h.

$$\underline{F}(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x)) = \underline{0},$$

heißen diejenigen Punkte $(x_0, \underline{y}^0, \underline{p}^0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ mit

$$\underline{F}(x_0, \underline{y}^0, \underline{p}^0) = \underline{0},$$

für welche die implizit gegebene Differentialgleichung nicht nach $\underline{y}'(x)$ aufgelöst werden kann, singuläre Punkte. Nach dem Satz über implizit gegebene Funktionen gilt in singulären Punkten

$$\underline{F}(x_0, \underline{y}^0, \underline{p}^0) = \underline{0}, \quad \det \underline{F}_p(x_0, \underline{y}^0, \underline{p}^0) = 0.$$

Für ein autonomes System der Gestalt

$$\underline{y}'(x) = \underline{f}(\underline{y}(x))$$

sind die Gleichgewichtslagen $\underline{y}^0$ gegeben als Lösung von

$$\underline{f}(\underline{y}^0) = \underline{0}.$$

Daraus ergeben sich die stationären Gleichgewichtslösungen

$$\underline{y}(x) = \underline{y}^0.$$

Beispiel 3.8. *Für das System* $\underline{y}'(x) = \underline{f}(\underline{y}(x))$ *mit*

$$f_1(\underline{y}(x)) = -y_1(x) - 8y_2(x), \quad f_2(\underline{y}(t)) = 8y_1(x) - y_2(x)$$

ergeben sich die Gleichgewichtslagen $\underline{y}^0$ *als Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$-y_1^0 - 8y_2^0 = 0, \quad 8y_1^0 - y_2^0 = 0, \quad d.h.\ y_1^0 = y_2^0 = 0.$$

Die Lösung eines zugehörigen Anfangswertproblems,

$$\underline{y}(x) = e^{-x}\left\{y_1(0)\begin{pmatrix}\cos 8x\\ \sin 8x\end{pmatrix} + y_2(0)\begin{pmatrix}\sin 8x\\ -\cos 8x\end{pmatrix}\right\},$$

strebt für jeden Anfangswert $\underline{y}(0)$ *für* $x \to \infty$ *gegen den Ursprung* $\underline{0}$, *der alleiniger Endzustand ist.*

Man erkennt, daß für das Langzeitverhalten der Lösungen autonomer Systeme die singulären Punkte und die Gleichgewichtslagen verantwortlich sind. Für die Analysis kann man eine Taylor–Entwicklung von $\underline{f}$ um einen singulären Punkt betrachten, bzw. die Anfangsbedingung durch $\widetilde{\underline{y}}(x) = \underline{y}(x) - \underline{y}^0$ in den Nullpunkt verschieben. Daher betrachten wir im folgenden die einfachsten Typen singulärer Punkte zu linearen autonomen System mit $n = 2$.

Für eine reguläre Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir das autonome System

$$\underline{y}'(x) = A\underline{y}(x).$$

Wie wir bereits gesehen haben, wird die allgemeine Lösung des Systems durch die Eigenwerte λ_1 und λ_2 der Koeffizientenmatrix A bestimmt. Dabei betrachten wir die folgenden Fallunterscheidungen.

Zwei reelle Eigenwerte λ_1, λ_2 mit linear unabhängigen Eigenvektoren

Seien $\underline{v}^k$ die zugehörigen, linear unabhängigen, Eigenvektoren mit

$$A\underline{v}^k = \lambda_k \underline{v}^k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1,2, \quad B = (\underline{v}^1, \underline{v}^2).$$

Mit der Transformation $\underline{y} = B\underline{v}$ ergibt sich

$$\underline{v}'(x) = B^{-1}AB\underline{v}(x) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\underline{v}(x)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$v_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}, \quad v_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x},$$

bzw.

$$\underline{y}(x) = B\underline{v}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}\underline{v}^1 + c_2 e^{\lambda_2 x}\underline{v}^2.$$

Für den Orbit ergibt sich durch Auflösen

$$x = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{v_1}{c_1} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{v_2}{c_2}$$

bzw.

$$v_2 = c_2 \left(\frac{v_1}{c_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} = k\, v_1^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Jetzt sind weitere Fallunterscheidungen vorzunehmen.

- $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$: Für $x \to \infty$ streben die Lösungen $v_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$ und $v_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}$ gegen Null, es liegt ein stabiler Knoten vor.

  Als Beispiel betrachten wir das Differentialgleichungssystem

  $$y_1'(x) = -2y_1(x) + y_2(x), \quad y_2'(x) = -y_2(x)$$

  mit

  $$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(1+\lambda) \stackrel{!}{=} 0,$$

  und mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Für die Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren ist

  $$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{v}^1 = \underline{0}, \quad \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{v}^1 = \underline{0}, \quad \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Für die Orbits ergibt sich

  $$v_2 = k\, v_1^2.$$

  Aus der Transformation

  $$\underline{y} = B\underline{v}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

  folgt

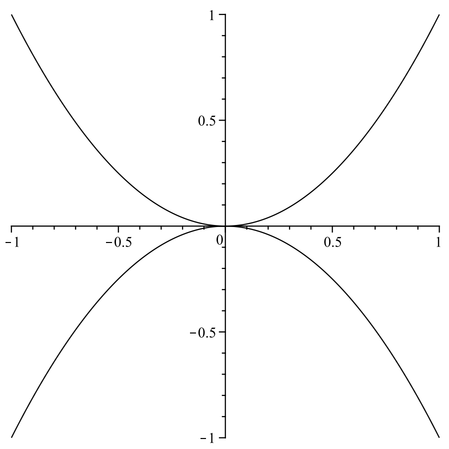
  $$y_1 = v_1 + v_2, \quad y_2 = v_1,$$

  bzw.

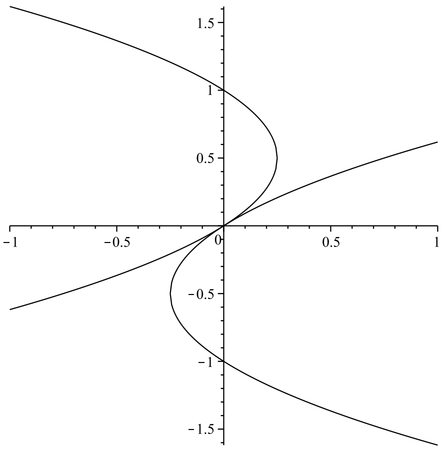
  $$v_1 = y_2, \quad v_2 = y_1 - y_2,$$

  mit dem zugehörigen Orbit

  $$y_1 = k y_2^2 + y_2.$$



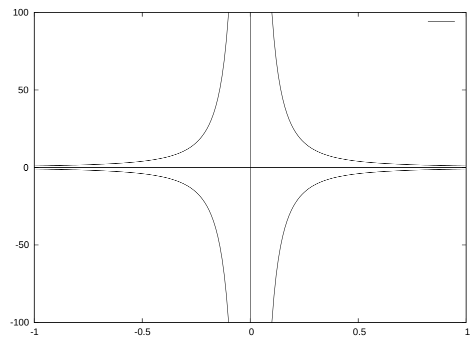
Knoten im (v_1, v_2) System, $k = \pm 1$



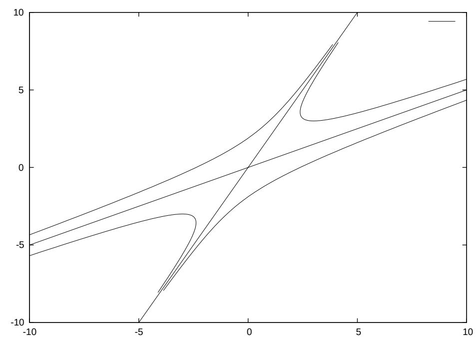
Knoten im (y_1, y_2) System, $k = \pm 1$

- $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$: Für $x \to \infty$ streben die Lösungen $v_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$ und $v_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}$ gegen Unendlich, es liegt ein instabiler Knoten vor. Für die Orbits ergibt sich wieder die Gleichung
$$v_2 = k\, v_1^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$: Für $x \to \infty$ strebt die Lösung $v_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$ gegen Null, während die Lösung $v_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}$ gegen Unendlich strebt, es liegt ein Sattelpunkt vor. Für die Orbits ergibt sich
$$v_2 = k\, v_1^{-|\lambda_2/\lambda_1|}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichungen
$$y_1'(x) = 3y_1(x) - 2y_2(x), \quad y_2'(x) = 2y_1(x) - 2y_2(x)$$
mit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$
und
$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(\lambda-3) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2$$
mit den Eigenwerten
$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$
Für die Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren ist
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \underline{v}^1 = \underline{0}, \quad \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \underline{v}^1 = \underline{0}, \quad \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Orbits ergibt sich
$$v_2 = k\, v_1^{-2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
Aus der Transformation
$$\underline{y} = B\underline{v}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
folgt
$$y_1 = v_1 + 2v_2, \quad y_2 = 2v_1 + v_2$$
bzw.
$$v_1 = \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_1, \quad v_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2,$$
mit dem zugehörigen Orbit
$$\frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 = k\left[\frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_1\right]^{-2}.$$



Sattelpunkt im (v_1, v_2) System, $k = \pm 1$

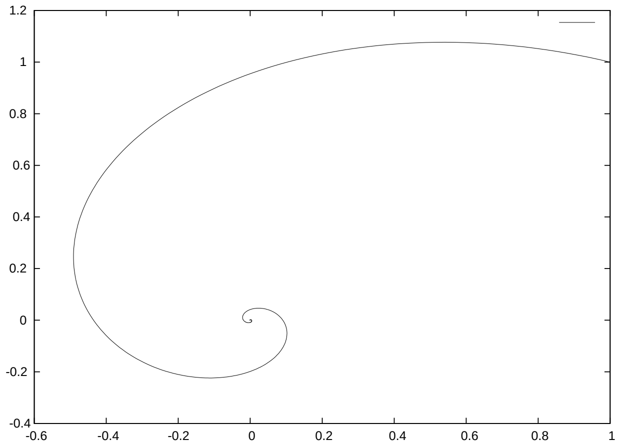


Sattelpunkt im (y_1, y_2) System, $k = \pm 1$

Zwei konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$

Sei $\underline{z} = \underline{a} + i\underline{b}$ der zu $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ zugehörige Eigenvektor, dann lautet die allgemeine Lösung
$$\underline{y}(x) = c_1 e^{\alpha x}\Big[\cos\beta(x - x_0)\underline{a} - \sin\beta(x - x_0)\underline{b}\Big] + c_2 e^{\alpha t}\Big[\sin\beta(x - x_0)\underline{a} + \cos\beta(x - x_0)\underline{b}\Big].$$
In Abhängigkeit von α erhält man die folgenden Fälle:

- $\alpha < 0$: Für $x \to \infty$ strebt die Lösung $\underline{y}(x)$ gegen Null, es liegt ein stabiler Strudel vor. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichungen
$$y_1'(x) = -y_1(x) - 4y_2(x), \quad y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x)$$
mit der allgemeinen Lösung
$$\underline{y}(x) = c_1 e^{-x}\begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} + c_2 e^{-x}\begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}.$$



Lösung für $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$.

- $\alpha > 0$: Für $x \to \infty$ strebt die Lösung $\underline{y}(x)$ gegen Unendlich, es liegt ein instabiler Strudel vor.
- $\alpha = 0$: Die Lösung lautet

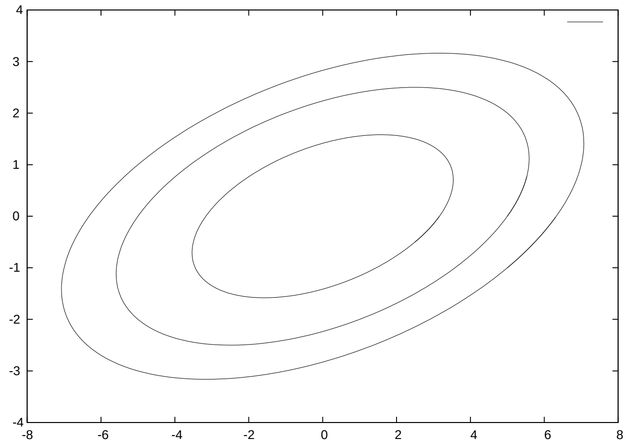
$$\underline{y}(x) = c_1 \Big[\cos\beta(x-x_0)\underline{a} - \sin\beta(x-x_0)\underline{b}\Big] + c_2\Big[\sin\beta(x-x_0)\underline{a} + \cos\beta(x-x_0)\underline{b}\Big],$$

d.h. die Orbits beschreiben Ellipsen um den Nullpunkt. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichungen

$$y_1'(x) = y_1(x) - 5y_2(x), \quad y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

mit der allgemeinen Lösung, für $x_0 = 0$,

$$\underline{y}(x) = c_1\Big[\cos 2x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\Big] + c_2\Big[\sin 2x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\Big].$$



Lösungen für $(c_1, c_2) = (1,1), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Zweifacher reeller Eigenwert und nur ein Eigenvekor

In diesem Fall lauten die Gleichungen für einen Eigenvektor $\underline{b}^1$ und einen Hauptvektor $\underline{b}^2$ zum Eigenwert λ

$$A\underline{b}^1 = \lambda\underline{b}^1, \quad A\underline{b}^2 = \lambda\underline{b}^2 + \underline{b}^1.$$

Mit der Transformation $\underline{y} = B\underline{v}$, $B = (\underline{b}^1, \underline{b}^2)$, ergibt sich

$$\underline{v}'(x) = B^{-1}AB\underline{v}(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \underline{v}(x)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\underline{v}(x) = c_1 e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung der Orbits ergibt sich aus

$$v_1 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad v_2 = c_2 e^{\lambda x}$$

zunächst

$$e^{\lambda x} = \frac{v_2}{c_2}, \quad x = \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{v_2}{c_2} \right|$$

und somit

$$v_1 = \Big[c_1 + c_2 x\Big] e^{\lambda x} = \left[c_1 + \frac{c_2}{\lambda} \ln \left|\frac{v_2}{c_2}\right|\right] \frac{v_2}{c_2} = \left[\frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda} \ln |c_2| + \frac{1}{\lambda} \ln |v_2|\right] v_2,$$

d.h.

$$v_1 = \left[k + \frac{1}{\lambda} \ln |v_2|\right] v_2\,, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Wieder ist eine weitere Fallunterscheidung nötig:

- $\lambda < 0$: Für $x \to \infty$ streben die Lösungen $v_1(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ und $v_2(x) = c_2 e^{\lambda x}$ gegen Null, es liegt ein stabiler Knoten dritter Art vor. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichungen

  $$y_1'(x) = y_1(x) - y_2(x), \quad y_2'(x) = 4y_1(x) - 3y_2(x)$$

  mit

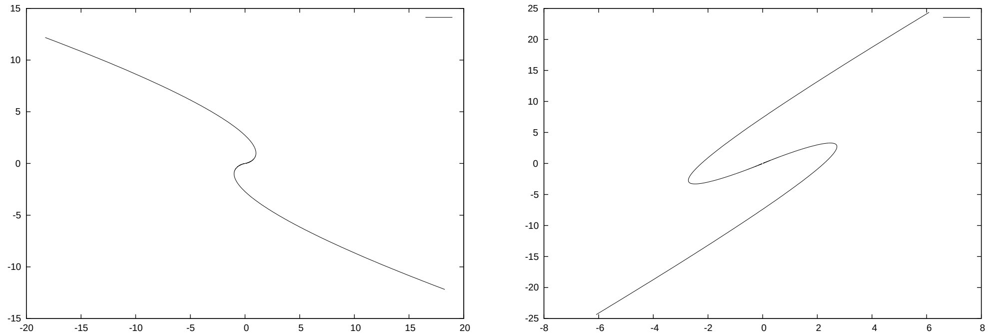
  $$\lambda_{1/2} = -1, \quad \underline{b}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Daraus ergibt sich

  $$v_1(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad v_2(x) = c_2 e^{-x},$$

  und

  $$y_1(x) = c_1 e^{-x} + c_2(1+x)e^{-x}, \quad y_2(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2(1+2x)e^{-x}.$$



(v_1, v_2) System $\qquad$ (y_1, y_2) System

Stabiler Knoten 3. Art für $(c_1, c_2) = (1, 1), (-1, -1)$.

- $\lambda > 0$: Für $x \to \infty$ streben die Lösungen $v_1(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ und $v_2(x) = c_2 e^{\lambda x}$ gegen Unendlich, es liegt ein instabiler Knoten dritter Art vor.

Definition 3.4. *Eine Gleichgewichtslage $\underline{w}^0$ von*

$$\frac{d}{dt}\underline{w}(t) = \underline{f}(\underline{w}(t)), \quad \underline{f}(\underline{w}^0) = \underline{0}$$

heißt stabil im Sinne von Lyapunov genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $t > 0$

$$\|\underline{w}(t) - \underline{w}^0\| < \varepsilon$$

gilt mit

$$\underline{w}(0) \in \mathcal{U}_\delta(\underline{w}^0) = \Big\{\underline{z} \ : \ \|\underline{z} - \underline{w}^0\| < \delta\Big\}.$$

$\underline{w}^0$ heißt asymptotisch stabil genau dann wenn $\underline{w}^0$ stabil im Sinne von Lyapunov ist, und außerdem ein $\delta_0 > 0$ existiert mit

$$\lim_{t\to\infty} \underline{w}(t) = \underline{w}^0 \quad \textit{für alle}\ \underline{w}(0) \in \mathcal{U}_{\delta_0}(\underline{w}^0).$$

Satz 3.5. *Gilt für alle Eigenwerte der Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des autonomen linearen Systems $\dot{\underline{w}} = A\underline{w}$*

$$Re\,\lambda_k < \alpha,$$

dann existiert eine Konstante $c \geq 0$ mit

$$\|\exp(\underline{A}t)\|_F \leq c\,e^{\alpha t} \quad \textit{für alle}\ t \geq 0.$$

Beweis: Für die Übergangsmatrix des Differentialgleichungssystems $\dot{\underline{w}} = A\underline{w}$ gilt die Darstellung

$$Y(t, 0) = \exp(\underline{A}t) = \Big(e^{\lambda_1 t}\underline{p}_1(t), \ldots, e^{\lambda_n t}\underline{p}_n(t)\Big).$$

Für die Euklidische Vektornorm einer jeden Spalte folgt

$$\|e^{\lambda_k t}\underline{p}_k(t)\|_2 = e^{\alpha t}\left|e^{(\lambda_k-\alpha)t}\right| \|\underline{p}_k(t)\|_2 \le e^{\alpha t}\, e^{-\varepsilon_0 t}\, \|\underline{p}_k(t)\|_2$$

mit

$$\varepsilon_0 := \min_{k=1,\dots,n} (\alpha - \operatorname{Re}\lambda_k) > 0.$$

Da $\|\underline{p}_k(t)\|_2^2$ ein Polynom vom Grad höchstens $2n$ ist, folgt

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\varepsilon_0 t}\, \|\underline{p}_k(t)\|_2 = 0,$$

und somit ergibt sich die Behauptung. ∎

Satz 3.6. *Die Gleichgewichtslage $\underline{w}^0 = \underline{0}$ des autonomen linearen Systems $\underline{\dot{w}} = A\underline{w}$ ist für den Fall*

$$\mu := \max_{k=1,\dots,n} Re\,\lambda_k < 0$$

asymptotisch stabil, und für den Fall

$$\mu > 0$$

instabil im Lyapunovschen Sinne. Für $\mu = 0$ ist $\underline{w}^0 = \underline{0}$ nicht asymptotisch stabil. Ist für $\mu = 0$ die Matrix A diagonalisierbar, so ist $\underline{w}^0$ stabil im Lyapunovschen Sinne.

Beweis:

- Für $\mu < 0$ wähle man $\alpha \in (\mu, 0)$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\|\exp(At)\|_F \le ce^{\alpha t} \to 0 \quad \text{für } t \to \infty.$$

- Für $\mu > 0$ wähle man zum Eigenwert λ_k mit $\mu = \operatorname{Re}\lambda_k$ mit einem zugehörigen Eigenvektor $\underline{z}^k$, $\|\underline{z}^k\|_2 = 1$, den Anfangswert $\underline{w}(0) = \frac{1}{2}\delta\underline{z}^k \in \mathcal{U}_\delta(\underline{0})$. Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} |\underline{w}(t)| = \lim_{t\to\infty}\left|\frac{\delta}{2}e^{\lambda_k t}\underline{z}^k\right| = \lim_{t\to\infty}\frac{\delta}{2}e^{\mu t} = \infty.$$

- Für $\mu = 0$ existiert entweder ein reeller Eigenwert $\lambda_k = 0$, oder ein komplexer Eigenwert $\lambda_k = i\beta$. In beiden Fällen definiert der zugehörige Eigenvektor eine Lösung, welche für $t \to \infty$ nicht gegen $\underline{0}$ strebt, d.h. die Gleichgewichtslage ist nicht asymptotisch stabil.

- Ist für $\mu = 0$ die Matrix A diagonalisierbar, so existieren keine Hauptvektoren, und die Stabilität nach Lyapunov folgt unmittelbar.

∎

Beispiel 3.9.

- *Für das System*

$$w_1'(t) = -2w_1(t) + w_2(t), \quad w_2'(t) = -w_2(t)$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -2, \quad \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\underline{w}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \underline{0} \quad \text{für } t \to \infty,$$

d.h. die Gleichgewichtslage $\underline{w}^0 = \underline{0}$ *ist asymptotisch stabil.*

- *Für das System*

$$w_1'(t) = w_1(t) - 2w_2(t), \quad w_2'(t) = -w_2(t)$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\underline{w}(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{t \to \infty} w_1(t) = \infty \quad \text{für } c_1 > 0,$$

d.h. die Gleichgewichtslage $\underline{w}^0 = \underline{0}$ *ist nicht stabil im Sinne von Lyapunov.*

- *Für das System*

$$w_1'(t) = -w_2(t), \quad w_2'(t) = -w_2(t)$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\underline{w}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \to \infty,$$

d.h. die Gleichgewichtslage $\underline{w}^0 = \underline{0}$ *ist stabil im Sinne von Lyapunov, aber für* $c_1 \neq 0$ *nicht asymptotisch stabil.*

- *Für das System*

$$w_1'(t) = w_1(t) - w_2(t), \quad w_2'(t) = w_1(t) - w_2(t)$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)+1 = \lambda^2$$

mit dem doppelten Eigenwert $\lambda_{1/2} = 0$, und dem einzigen Eigenvektor $\underline{v}^1 = (1,1)^\top$. Für den zugehörigen Hauptvektor ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die Lösung

$$\underline{w}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{t\to\infty} w_1(t) = \infty \quad (c_2 > 0),$$

d.h. die Gleichgewichtslage $\underline{w}^0 = \underline{0}$ ist nicht stabil im Sinne von Lyapunov.

Um Lösungen nichtlinearer autonomer Systeme auf Stabilität nach Lyapunov bzw. asymptotische Stabilität untersuchen zu können, ist das folgende Gronwallsche Lemma ein zentrales Hilfsmittel.

Lemma 3.2 (Gronwallsches Lemma). *Sei $\varphi(t)$ für $t \in [0,a]$ stetig und erfülle die Ungleichung*

$$\varphi(t) \le \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)\, ds, \quad t \in [0,a]$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Dann gilt für alle $t \in [0,a]$ die Ungleichung

$$\varphi(t) \le \alpha\, e^{\beta t}.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Die Funktion

$$\psi(t) := (\alpha + \varepsilon) e^{\beta t}$$

ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\psi'(t) = \beta \psi(t), \quad \psi(0) = \alpha + \varepsilon,$$

und somit der Integralgleichung

$$\psi(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t \psi(s)\, ds.$$

Andererseits ist nach Voraussetzung

$$\varphi(0) \le \alpha < \alpha + \varepsilon = \psi(0),$$

Aufgrund der Stetigkeit der Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ existiert ein $t_0 > 0$ mit

$$\varphi(t) < \psi(t) \quad \text{für alle } t \in [0, t_0).$$

Durch Widerspruchsbeweis zeigen wir, dass es kein $t_0 \in (0, a]$ gibt mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. In diesem Fall folgt aus der Voraussetzung

$$\varphi(t_0) \le \alpha + \beta \int_0^{t_0} \varphi(s)\, ds < \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^{t_0} \psi(s)\, ds = \psi(t_0)$$

und somit ein Widerspruch zu $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. Damit folgt

$$\varphi(t) < \psi(t) = (\alpha + \varepsilon) e^{\beta t}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ folgt schließlich die Behauptung. ■

Für das nichtlineare autonome System

$$\frac{d}{dt}\underline{w}(t) = \underline{f}(\underline{w}(t))$$

mit der Gleichgewichtslage $\underline{w}^0 = \underline{0}$, d.h. $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$, betrachten wir das durch eine Taylorentwicklung gewonnene System

$$\frac{d}{dt}\underline{w}(t) = A\underline{w}(t) + \underline{g}(\underline{w}(t)), \quad A = \frac{\partial \underline{f}(\underline{w})}{\partial \underline{w}}\Big|_{\underline{w}=\underline{0}}.$$

Dabei setzen wir voraus, daß die Funktion $\underline{g}(\underline{w})$ für $\|\underline{w}\|_2 < \varrho$, $\varrho > 0$ erklärt und stetig ist, und daß

$$\lim_{\|\underline{w}\|_2 \to 0} \frac{\|\underline{g}(\underline{w})\|_2}{\|\underline{w}\|_2} = 0.$$

Satz 3.7. *Sei $\underline{w}^0 = \underline{0}$ Gleichgewichtslage von $\dot{\underline{w}} = \underline{f}(\underline{w})$.*

i. Alle Eigenwerte λ_k von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfüllen $Re\, \lambda_k < 0$. Dann ist $\underline{w}^0 = \underline{0}$ asymptotisch stabil.

ii. Für mindestens einen Eigenwert λ_k von A gelte $Re\, \lambda_k > 0$. Dann ist $\underline{w}^0 = \underline{0}$ instabil im Sinne von Lyapunov.

Beweis:

i. Aus der Voraussetzung folgt zunächst die Existenz von Konstanten $\beta > 0$ und $c \ge 0$, so daß

$$\|\exp(At)\|_F \le c e^{-\beta t} \quad \text{für alle } t \ge 0.$$

Andererseits folgt die Existent einer Konstanten $\delta_0 \in (0, \varrho)$, so daß

$$\|\underline{g}(\underline{w})\|_2 \le \frac{\beta}{2c}\, \|\underline{w}\|_2 \quad \text{für alle } \|\underline{w}\|_2 \le \delta_0$$

erfüllt ist. Jede Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\underline{w}(t) = A\underline{w}(t) + \underline{g}(\underline{w}(t))$$

genügt der Darstellung

$$\underline{w}(t) = e^{tA}\underline{w}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\underline{g}(\underline{w}(s))\,ds.$$

Aus der Verträglichkeit der Frobenius–Norm zur Euklidischen Vektornorm folgt dann

$$\|\underline{w}(t)\|_2 \leq ce^{-\beta t}\|\underline{w}(0)\|_2 + c\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\frac{\beta}{2c}\|\underline{w}(s)\|_2 ds,$$

bzw.

$$e^{\beta t}\|\underline{w}(t)\|_2 \leq c\|\underline{w}(0)\|_2 + \frac{\beta}{2}\int_0^t e^{\beta s}\|\underline{w}(s)\|_2 ds.$$

Die Funktion

$$\varphi(t) := e^{\beta t}\|\underline{w}(t)\|_2$$

erfüllt also die Ungleichung

$$\varphi(t) \leq c\|\underline{w}(0)\|_2 + \frac{\beta}{2}\int_0^t \varphi(s)\,ds,$$

nach dem Gronwallschen Lemma folgt also

$$\varphi(t) \leq c\,\|\underline{w}(0)\|_2 e^{\beta/2},$$

d.h.

$$\|\underline{w}(t)\|_2 \leq c\,\|\underline{w}(0)\|_2 e^{-(\beta/2)t}.$$

Für hinreichend kleine $\|\underline{w}(0)\|_2 < \varepsilon$ bleibt $\|\underline{w}(t)\|_2 < \delta_0$, insbesondere folgt die asymptotische Stabilität.

ii. Mit λ_k bezeichnen wir alle Eigenwerte von A mit $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$, während mit λ_j die Eigenwerte mit $\operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$ bezeichnet seien. Sei B die aus den zugehörigen Eigen– und Hauptvektoren gebildete Matrix, dann ist die Jordansche Normalform von A gegeben durch $J = B^{-1}AB$.

Sei $\eta > 0$ so gewählt, so daß $0 < 6\eta < \operatorname{Re}\lambda_k$ für alle Eigenwerte λ_k mit $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ erfüllt ist. Definieren wir

$$H = \begin{pmatrix} \eta & & & & \\ & \eta^2 & & & \\ & & \eta^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \eta^n \end{pmatrix},$$

so folgt für

$$D = H^{-1}JH = H^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_r & 1 & & & \\ & & & & \lambda_r & & & \\ & & & & & \lambda_{r+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix} H,$$

wegen

$$\begin{pmatrix} \eta^{-s} & \\ & \eta^{-s-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta^{s} & \\ & \eta^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \eta \\ & \lambda \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \eta & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_r & \eta & & & \\ & & & & \lambda_r & & & \\ & & & & & \lambda_{r+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Für das nichtlineare autonome System

$$\underline{\dot{w}}(t) = A\underline{w}(t) + \underline{g}(\underline{w}(t))$$

erhalten wir mit der Transformation $\underline{w}(t) := BH\underline{v}(t)$ das Differentialgleichungssystem

$$\underline{\dot{v}}(t) = H^{-1}B^{-1}ABH\underline{v}(t) + H^{-1}B^{-1}\underline{g}(BH\underline{v}) = D\underline{v} + \underline{\widetilde{g}}(\underline{v}),$$

d.h. die Differentialgleichungen

$$\dot{v}_i(t) = \lambda_i v_i(t) + \eta v_{i+1}(t) + \widetilde{g}_i(\underline{v}(t))$$

bzw.

$$\dot{v}_i(t) = \lambda_i v_i(t) + \widetilde{g}_i(\underline{v}(t)),$$

oder einheitlich

$$\dot{v}_i(t) = \lambda_i v_i(t) + \eta\chi_i v_{i+1}(t) + \widetilde{g}_i(\underline{v}(t)).$$

Für einen Eigenwert λ_i mit linear unabhängigen Eigenvektoren bzw. für den letzten Hauptvektor ist $\chi_i = 0$ zu setzen, andernfalls $chi_i = 1$.

Aufgrund der Voraussetzungen an $\underline{g}$ existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|\underline{g}(\underline{w})\|_2 \le \varepsilon\,\|\underline{w}\|_2 \quad \text{für alle } \|\underline{w}\|_2 \le \delta.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\|\underline{\widetilde{g}}(\underline{v})\|_2 &= \|H^{-1}B^{-1}\underline{g}(BH\underline{v})\|_2\\ &\le \|H^{-1}B^{-1}\|_F\|\underline{g}(BH\underline{v})\|_2\\ &\le \|H^{-1}B^{-1}\|_F\,\varepsilon\,\|BH\underline{v}\|_2\\ &\le \varepsilon\,\|H^{-1}B^{-1}\|_F\|BH\|_F\|\underline{v}\|_2,\end{aligned}$$

falls

$$\|BH\underline{v}\|_2 \le \|BH\|_F\|\underline{v}\|_2 \le \delta, \quad \|\underline{v}\|_2 \le \frac{\delta}{\|BH\|_F}$$

erfüllt ist. Nun sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, so daß

$$\|\underline{\widetilde{g}}(\underline{v})\|_2 \le \eta\,\|\underline{v}\|_2$$

erfüllt ist.

Jetzt nehmen wir an, daß $\underline{w}^0 = \underline{0}$ stabil nach Lyapunov sei. Nach Definition existiert dann zu dem eben gewähltem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$\|\underline{w}(t)\|_2 < \varepsilon \quad \text{für alle } \|\underline{w}(0)\|_2 < \delta.$$

Seien $v_k(t)$ und $v_j(t)$ diejenigen Lösungskomponenten, welche zu $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ bzw. zu $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ gehören. Dann definieren wir die skalaren Funktionen

$$\phi(t) := \sum_{k:\operatorname{Re}\lambda_k>0} |v_k(t)|^2, \quad \psi(t) := \sum_{j:\operatorname{Re}\lambda_j\le 0} |v_j(t)|^2$$

und betrachten eine (nicht triviale) Lösung $\underline{v}(t)$ mit

$$\|\underline{v}(0)\|_2 < \frac{\delta}{\|BH\|_F}, \quad \psi(0) < \phi(0).$$

Die zweite Forderung kann zum Beispiel erreicht werden, wenn eine Lösung mit $v_j(0) = 0$ für $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ betrachtet wird.

Aus den Differentialgleichungen für die Komponenten $v_i(t)$ folgt dann

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{k:\operatorname{Re}\lambda_k>0}|v_k(t)|^2 = \sum_{k:\operatorname{Re}\lambda_k>0}\frac{d}{dt}\Big[v_k(t)\overline{v_k(t)}\Big]\\ &= \sum_{k:\operatorname{Re}\lambda_k>0}\Big[\dot{v}_k(t)\overline{v_k(t)} + v_k(t)\overline{\dot{v}_k(t)}\Big] = 2\sum_{k:\operatorname{Re}\lambda_k>0}\operatorname{Re}\Big[\dot{v}_k(t)\overline{v_k(t)}\Big]\\ &= 2\sum_{k:\operatorname{Re}\lambda_k>0}\operatorname{Re}\Big[\Big(\lambda_k v_k(t) + \eta\chi_k v_{k+1}(t) + \widetilde{g}_k(\underline{v}(t))\Big)\overline{v_k(t)}\Big],\end{aligned}$$

bzw., unter der Verwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\dot{\phi}(t) &= \sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} \mathrm{Re}\,\lambda_k\,|v_k(t)|^2 + \eta \sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} \chi_k \mathrm{Re}(v_{k+1}(t)\overline{v_k(t)}) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} \mathrm{Re}\Big[\widetilde{g}_k(\underline{v}(t))\overline{v_k(t)}\Big] \\
&> 6\eta \sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} |v_k(t)|^2 - \eta \left(\sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} \chi_k |v_{k+1}(t)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} \chi_k |v_k(t)|^2\right)^{1/2} \\
&\qquad\qquad - \left(\sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} |\widetilde{g}_k(\underline{v}(t))|^2\right) \left(\sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} |v_k(t)|^2\right)^{1/2} \\
&\geq 5\eta\,\phi(t) - \sqrt{\phi(t)}\,\|\underline{g}(\underline{v}(t))\|_2.
\end{aligned}$$

Solange $\psi(t) < \phi(t)$ erfüllt ist, folgt

$$\begin{aligned}
\|\underline{g}(\underline{v}(t))\|_2^2 \leq \eta^2\,\|\underline{v}(t)\|_2^2 &= \eta^2 \left(\sum_{k:\mathrm{Re}\lambda_k>0} |v_k(t)|^2 + \sum_{j:\mathrm{Re}\lambda_j\leq 0} \|v_j(t)|^2\right) \\
&= \eta^2\Big(\phi(t) + \psi(t)\Big) \\
&\leq 2\eta^2\phi(t) \leq 4\eta^2\phi(t).
\end{aligned}$$

Solange $\psi(t) \leq \phi(t)$ erfüllt ist, folgt also

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}(t) > 3\eta\phi(t).$$

Andererseits ist

$$\dot{\psi}(t) = 2 \sum_{j:\mathrm{Re}\lambda_j\leq 0} \mathrm{Re}\Big[\Big(\lambda_j v_j(t) + \eta\chi_j v_{j+1}(t) + \widetilde{g}_j(\underline{v}(t))\Big)\overline{v_j(t)}\Big],$$

und somit

$$\frac{1}{2}\dot{\psi}(t) \leq \eta\psi(t) + 2\eta\phi(t).$$

Dann folgt

$$\frac{1}{2}\Big[\dot{\phi}(t) - \dot{\psi}(t)\Big] > 3\eta\phi(t) - \eta\psi(t) - 2\eta\phi(t) = \eta[\phi(t) - \psi(t)].$$

Aus $\psi(0) < \phi(0)$ folgt also $\psi(t) < \phi(t)$ für alle $t \geq 0$. Also gilt auch

$$\dot{\phi}(t) > 6\eta\phi(t),$$

und somit

$$\phi(t) \geq \phi(0)e^{6\eta t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Stabilität von $\underline{w}^0 = \underline{0}$.

■

Definition 3.5. $\Phi(\underline{w})$ *heißt erstes Integral zum autonomen System* $\underline{\dot{w}}(t) = \underline{f}(\underline{w}(t))$ *mit der Gleichgewichtslage* $\underline{w}^0 = \underline{0}$ *genau dann, wenn*

$$\nabla\Phi(\underline{w}) \cdot \underline{f}(\underline{w}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\Phi(\underline{w})}{\partial w_k} f_k(\underline{w}) = 0$$

im Definitionsbereich von $\underline{f}$ *und* Φ *erfüllt ist.*

Lemma 3.3. *Sei* γ *ein Orbit des autonomen Systems* $\underline{\dot{w}}(t) = \underline{f}(\underline{w}(t))$ *mit der Gleichgewichtslage* $\underline{w}^0 = \underline{0}$. *Dann ist*

$$\Phi(\underline{w}(t))_{|\gamma} = \textit{konstant.}$$

Beweis: Mit der Kettenregel und Einsetzen der Differentialgleichung ist

$$\frac{d}{dt}\Phi(\underline{w}(t))_{|\gamma} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\Phi(\underline{w})}{\partial w_k} \dot{w}_k(t)_{|\gamma} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\Phi(\underline{w})}{\partial w_k} f_k(\underline{w})_{|\gamma} = 0.$$

■

Beispiel 3.10. *Das Newtonsche Gesetz am* $\ddot{w}_1 = -mg\sin w_1$ *für die Winkelbeschleunigung* $\ddot{w}_1$ *liefert mit der Winkelgeschwindigkeit* $w_2 = \dot{w}_1$ *und mit* $k^2 = g/a$ *das autonome System*

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2(t) \\ -k^2 \sin w_1(t) \end{pmatrix}.$$

Gleichgewichtslagen sind $\underline{w}^k = (\sin k\pi, 0)^\top$. *Durch Linearisierung mittels Taylor–Entwicklung erhalten wir für* $\underline{w}^0 = (0,0)^\top$

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k^2[w_1(t) - \sin w_1(t)] \end{pmatrix}.$$

Die Funktion

$$g_2(\underline{w}) = k^2[w_1 - \sin w_1]$$

erfüllt alle erforderlichen Voraussetzungen, und weiterhin ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1/2} = \pm ik.$$

Wegen $\operatorname{Re}\lambda_{1/2} = 0$ *kann keine Aussage zur Stabilität gemacht werden.*

Zur Bestimmung eines ersten Integrals betrachten wir die lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\Phi(w_1, w_2)w_2 + \frac{\partial}{\partial w_2}\Phi(w_1, w_2)[-k^2 \sin w_1] = 0,$$

welche für

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\Phi(w_1, w_2) = w_2, \quad \frac{\partial}{\partial w_1}\Phi(w_1, w_2) = k^2 \sin w_1$$

erfüllt ist. Daraus ergibt sich

$$\Phi(w_1, w_2) = \frac{1}{2} w_2^2 - k^2 \cos w_1.$$

Die Orbits im Phasenraum (w_1, w_2) *sind also implizit durch die Kurven*

$$w_2^2 - 2k^2 \cos w_1 = c$$

gegeben, d.h.

$$w_2^2 = c + 2k^2 \cos w_1.$$