Kapitel 4

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Betrachtet wird eine lineare Differentialgleichung der Ordnung n,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) \quad \text{für } x \in [a,b], \tag{4.1}$$

wobei $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ vorausgesetzt wird. Für $f(x) \equiv 0$ bezeichnet man die Differentialgleichung (4.1) als homogen, andernfalls als inhomogen. Mit den Transformationen

$$\begin{array}{rcrcl} w_0(x) & := & y(x), & & \\ w_1(x) & := & y'(x) & = & w_0'(x), \\ w_2(x) & := & y''(x) & = & w_1'(x), \\ & \vdots & & & \\ w_{n-1}(x) & := & y^{(n-1)}(x) & = & w_{n-2}'(x) \end{array}$$

und

$$\begin{aligned} w_{n-1}'(x) = y^{(n)}(x) &= \frac{1}{a_n(x)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) \right] \\ &= \frac{1}{a_n(x)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) w_k(x) \right] \end{aligned}$$

ergibt sich ein zu (4.1) äquivalentes System erster Ordnung,

$$\begin{pmatrix} w_0'(x) \\ w_1'(x) \\ w_2'(x) \\ \vdots \\ w_{n-1}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & \cdots & -\frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(x) \\ w_1(x) \\ w_2(x) \\ \vdots \\ w_{n-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}.$$

Für das homogene lineare System

$$\begin{pmatrix} w_0'(x) \\ w_1'(x) \\ w_2'(x) \\ \vdots \\ w_{n-1}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & \cdots & -\frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(x) \\ w_1(x) \\ w_2(x) \\ \vdots \\ w_{n-1}(x) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

seien n linear unabhängige Lösungen $\underline{w}_1(x), \ldots, \underline{w}_n(x)$ gegeben, dann definiert

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} w_{10}(x) & w_{20}(x) & \cdots & w_{n0}(x) \\ w_{11}(x) & w_{21}(x) & \cdots & w_{n1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{1n-1}(x) & w_{2n-1} & \cdots & w_{nn-1}(x) \end{pmatrix}$$

die zugehörige Wronski–Determinante. Nach Lemma 3.1 ist diese Lösung der Differentialgleichung

$$W'(x) = W(x) \operatorname{tr} A(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x),$$

d.h. es folgt

$$W(x) = W(x_0) = \exp\left(- \int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}\, ds \right).$$

Damit ergibt sich wie in Satz 3.1 die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i. Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $W(x_0) \neq 0$;

ii. Es gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$;

iii. Die Lösungen $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ bilden ein Fundamentalsystem.

Damit beschreibt das Fundamentalsystem $\{\underline{w}_k\}_{k=1}^n$ die Lösungsgesamtheit des homogenen linearen Systems (4.2), bzw. der homogenen linearen Differentialgleichung (4.1) mit $f \equiv 0$.

Als ein erstes Beispiel betrachten wir eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Mit den Transformationen

$$w_0(x) := y(x), \quad w_1(x) := y'(x)$$

ergibt sich das zu (4.3) äquivalente System

$$w_0'(x) = y'(x) = w_1(x), \quad w_1'(x) = y''(x) = -ay'(x) - by(x) = -aw_1(x) - bw_0(x),$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} w_0'(x) \\ w_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(x) \\ w_1(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung des Systems (4.4) berechnen wir die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix,

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b,$$

d.h. wir erhalten

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Wir betrachten zunächst den Fall zweier reeller Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren $\underline{v}_1$ und $\underline{v}_2$. Dann lautet die allgemeine Lösung von (4.4)

$$\underline{w}(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x}\, \underline{v}_1 + c_2\, e^{\lambda_2 x}\, \underline{v}_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

bzw. folgt für die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (4.3)

$$u(x) = w_0(x) = c_1 v_{10} e^{\lambda_1 x} + c_2 v_{20} e^{\lambda_2 x} = \widetilde{c}_1\, e^{\lambda_1 x} + \widetilde{c}_2\, e^{\lambda_2 x}, \quad \widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ beschreibt (4.5) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.3) zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das gleiche Ergebnis erhält man direkt aus der Differentialgleichung (4.3): Für den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

ergibt sich durch Einsetzen

$$\Big(\lambda^2 + a\lambda + b\Big) e^{\lambda x} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

und somit die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Für reelle Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt für die allgemeine Lösung die Darstellung (4.5),

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

während für ein paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= c_1 e^{\alpha x}\Big[\cos\beta x + i\sin\beta x\Big] + c_2 e^{\alpha x}\Big[\cos\beta x - i\sin\beta x\Big] \\ &= (c_1 + c_2) e^{\alpha x}\cos\beta x + (c_1 - c_2) i\, e^{\alpha x}\sin\beta x \\ &= A\, e^{\alpha x}\cos\beta x + B\, e^{\alpha x}\sin\beta x\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Im Fall eines doppelten reellen Eigenwertes

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2}, \quad \text{d.h.} \quad b = \frac{a^2}{4},$$

ist

$$y_1(x) = c_1\, e^{-\frac{a}{2}x}, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + a\, y'(x) + \frac{a^2}{4}\, y(x) = 0\,.$$

Zur Bestimmung einer zweiten Lösung betrachten wir die Variation der Konstanten,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= C(x)\, e^{-\frac{a}{2}x}, \\ y_2'(x) &= C'(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}\, C(x)\, e^{-\frac{a}{2}x}, \\ y_2''(x) &= C''(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} - a\, C'(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}\, C(x)\, e^{-\frac{a}{2}x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) + ay'(x) + \frac{a^2}{4} y(x) \\ &= C''(x)e^{-\frac{a}{2}x} - aC'(x)e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4} C(x)e^{-\frac{a}{2}x} \\ &\qquad + a\Big[C'(x)e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2} C(x)e^{-\frac{a}{2}x}\Big] + \frac{a^2}{4} C(x)e^{-\frac{a}{2}x} \\ &= C''(x)e^{-\frac{a}{2}x}, \end{aligned}$$

d.h.

$$C''(x)e^{-\frac{a}{2}x} = 0, \quad C''(x) = 0, \quad C(x) = x\,.$$

Für einen doppelten Eigenwert λ lautet also die allgemeine Lösung

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Wir betrachten jetzt inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung,

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

deren allgemeine Lösung durch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

gegeben ist. Dabei bildet y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0,$$

während y_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.8) ist, d.h.

$$y_p''(x) + a(x)y_p'(x) + b(x)y_p(x) = f(x).$$

Bei Kenntnis eines Fundamentalsystems kann eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten bestimmt werden. Für den Ansatz

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

erhält man

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \Big(c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x)\Big) + \Big(c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x)\Big) \\ &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x), \end{aligned}$$

falls

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

gefordert wird. Dann ist

$$y_p''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x),$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung (4.8) liefert

$$\begin{aligned} f(x) &= y_p''(x) + a(x)y_p'(x) + b(x)y_p(x) \\ &= \Big[c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x)\Big] \\ &\qquad +a(x)\Big[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)\Big] + b(x)\Big[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\Big] \\ &= \Big[c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\Big] + c_1(x)\Big[y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)\Big] \\ &\qquad +c_2(x)\Big[y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)\Big] \\ &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\,. \end{aligned}$$

Zu lösen ist also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Für ein Fundamentalsystem $y_1(x)$ und $y_2(x)$ können diese Gleichungen eindeutig nach $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$ aufgelöst werden:

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$c_1'(x) = \frac{-y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} f(x), \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} f(x),$$

und somit

$$y_p(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{-y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} f(s)\,ds + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} f(s)ds.$$

Beispiel 4.1. *Betrachtet wird die Differentialgleichung*

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 2e^x\,.$$

Die charakteristische Gleichung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = 3$ *und* $\lambda_2 = 2$*, d.h.*

$$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= \int_0^x \frac{-y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} f(s)\,ds = \int_0^x \frac{-e^{2s}}{e^{3s}2e^{2s} - e^{2s}3e^{3s}} 2e^s\,ds \\
&= 2\int_0^x e^{-2s}\,ds = \left[-e^{-2s}\right]_{s=0}^x = 1 - e^{-2x}, \\
c_2(x) &= \int_0^x \frac{y_1(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} f(s)ds = \int_0^x \frac{e^{3s}}{e^{3s}2e^{2s} - e^{2s}3e^{3s}} 2e^s ds \\
&= -2\int_0^x e^{-s}ds = 2\,\left[e^{-s}\right]_{s=0}^x = 2\left[e^{-x} - 1\right]
\end{aligned}$$

und somit folgt

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = \Big[1 - e^{-2x}\Big]e^{3x} + 2\Big[e^{-x} - 1\Big]e^{2x} = e^{3x} - 2e^{2x} + e^x.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und für spezielle rechte Seiten f lassen sich partikuläre Lösungen auch durch geeignete Ansätze bestimmen.

f ist ein Polynom:

Für

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

führt der Ansatz

$$y_p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

auf

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \stackrel{!}{=} y_p''(x) + a y_p'(x) + b y_p(x) \\ &= \sum_{k=2}^{n} c_k\, k(k-1) x^{k-2} + a \sum_{k=1}^{n} c_k\, k x^{k-1} + b \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \Big[(k+1)(k+2)c_{k+2} + a(k+1)c_{k+1} + bc_k\Big] x^k + anc_n x^{n-1} + bc_{n-1}x^{n-1} + bc_n x^n. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt dann

$$\begin{aligned} a_n &= bc_n, \\ a_{n-1} &= anc_n + bc_{n-1}, \\ a_k &= (k+1)(k+2)c_{k+2} + a(k+1)c_{k+1} + bc_k \quad \text{für } k = n-2, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Beispiel 4.2. *Für die Differentialgleichung*

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^3$$

ist

$$\begin{aligned} 1 = a_3 &= 6c_3, \\ 0 = a_2 &= -15c_3 + 6c_2, \\ 0 = a_1 &= 6c_3 - 10c_2 + 6c_1, \\ 0 = a_0 &= 2c_2 - 5c_1 + 6c_0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$c_3 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{5}{12}, \quad c_1 = \frac{19}{36}, \quad c_0 = \frac{65}{216},$$

eine partikuläre Lösung lautet also

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 + \frac{19}{36}x + \frac{65}{216}.$$

f ist eine Exponentialfunktion:

Für

$$f(x) = a_0 e^{\mu x},$$

führt der Ansatz

$$y_p(x) = c_0 e^{\mu x}$$

auf
$$f(x) = y_p''(x) + ay_p(x) + by_p(x) = c_0\Big[\mu^2 + a\mu + b\Big]e^{\mu x} \stackrel{!}{=} a_0 e^{\mu x}.$$
Ist μ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, folgt
$$c_0 = \frac{a_0}{\mu^2 + a\mu + b}.$$

Beispiel 4.3. *Für die Differentialgleichung*
$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 2e^x$$
ist
$$c_0 = \frac{a_0}{\mu^2 + a\mu + b} = \frac{2}{1-5+6} = 1, \quad y_p(x) = e^x.$$

Ist μ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. es gilt $\mu^2 + a\mu + b = 0$, so führt der Ansatz
$$y_p(x) = c_1 x e^{\mu x}, \quad y_p'(x) = (c_1 + \mu c_1 x)e^{\mu x}, \quad y_p''(x) = (2\mu c_1 + \mu^2 c_1 x)e^{\mu x}$$
auf
$$\begin{aligned} f(x) = a_0 e^{\mu x} &\stackrel{!}{=} y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x) \\ &= \Big[2\mu c_1 + \mu^2 c_1 x\Big]e^{\mu x} + a\Big[c_1 + \mu c_1 x\Big]e^{\mu x} + bc_1 x e^{\mu x}, \end{aligned}$$
bzw.
$$\begin{aligned} a_0 &= \Big[2\mu c_1 + \mu^2 c_1 x\Big] + a\Big[c_1 + \mu c_1 x\Big] + bc_1 x \\ &= c_1\Big[\mu^2 + a\mu + b\Big]\, x + \Big[2\mu + a\Big]c_1 = (2\mu + a)c_1. \end{aligned}$$
Somit ist
$$c_1 = \frac{a_0}{2\mu + a}, \quad y_p(x) = \frac{a_0}{2\mu + a}e^{\mu x}.$$
Hier ist aber vorauszusetzen, daß $\mu_{1/2} = -a/2$ keine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. In diesem Fall ist der Ansatz entsprechend zu modifizieren.

Beispiel 4.4. *Für die Differentialgleichung*
$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}$$
ist
$$c_1 = \frac{a_0}{2\mu + a} = \frac{1}{4-5} = -1, \quad y_p(x) = -x\, e^{2x}\,.$$

Beispiel 4.5. *Für die Differentialgleichung*

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x$$

lautet das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x.$$

Für die Bestimmung einer partikulären Lösung führt der Ansatz

$$y_p(x) = c_2 x^2 e^x$$

auf

$$e^x \stackrel{!}{=} 2c_2\, e^x, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x.$$

f ist eine trigonometrische Funktion:

Für

$$f(x) = e^{\mu x}\Big[a_0 \cos mx + b_0 \sin mx\Big]$$

führt i.a. der Ansatz

$$y_p(x) = e^{\mu x}\Big[A_0 \cos mx + B_0 \sin mx\Big]$$

zur Bestimmung einer partikulären Lösung. Ist jedoch $\lambda = \mu + im$ eine Wurzel des charakteristischen Polynoms, so sind die Ansätze wieder geeignet zu modifizieren.

Beispiel 4.6. *Für die Differentialgleichung*

$$y''(x) + y(x) = \sin x$$

lautet das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2 = \cos x\,.$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung führt der Ansatz

$$y_p(x) = Ax \sin x + Bx \cos x$$

mit

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A \sin x + Ax \cos x + B \cos x - Bx \sin x \\ &= (A - Bx) \sin x + (Ax + B) \cos x, \\ y_p''(x) &= (A - Bx) \cos x - B \sin x + A \cos x - (Ax + B) \sin x \\ &= (2A - Bx) \cos x - (Ax + 2B) \sin x \end{aligned}$$

auf

$$y_p''(x) + y_p(x) = 2A \cos x - 2B \sin x \stackrel{!}{=} \sin x,$$

d.h.

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad y_p(x) = -\frac{1}{2}x \cos x\,.$$

4.1 Potenzreihen

Betrachtet wird jetzt die homogene Differentialgleichung

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0 \tag{4.9}$$

mit Polynomen $P(x), Q(x), R(x)$ in der Umgebung eines regulären Punktes x_0, d.h. es gelte $P(x_0) \neq 0$. Für $P(x_0) = 0$ wird x_0 als singulärer Punkt bezeichnet. In einer Umgebung eines regulären Punkte x_0 führt der Ansatz einer Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{4.10}$$

mit einem Konvergenzradius $\varrho > 0$ auf

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)(x - x_0)^k, \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(x - x_0)^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

und durch einen Koeffizientenvergleich erfolgt die Bestimmung einer Lösung der Differentialgleichung (4.9).

Beispiel 4.7. *Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung*

$$y''(x) + y(x) = 0$$

mit $P(x) = 1$, d.h. alle $x \in \mathbb{R}$ sind regulär. Für $x_0 = 0$ ergibt sich für den Ansatz (4.10)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big[a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k \Big] x^k = 0,$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(k+1)}\,.$$

Mit

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2 \cdot 1}, \\ a_4 &= -\frac{a_1}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, \\ a_6 &= -\frac{a_2}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!} \end{aligned}$$

folgt für $k = 2\ell$

$$a_{2\ell} = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}\, a_0,$$

bzw. für $k = 2\ell + 1$

$$a_{2\ell+1} = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}\, a_1\,.$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = a_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}\, x^{2\ell} + a_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}\, x^{2\ell+1} = a_0 \cos x + a_1 \sin x, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, daß beide Potenzreihen für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent sind.

4.2 Legendre Differentialgleichung

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung von Legendre,

$$(x^2 - 1)\, y''(x) + 2x\, y'(x) - \alpha(\alpha+1)\, y(x) = 0 \quad \text{für } x \in (-1,1). \tag{4.11}$$

Einsetzen des Potenzreihenansatzes (4.10) für den regulären Punkt $x_0 = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= (x^2-1)y''(x) + 2xy'(x) - \alpha(\alpha+1)y(x) \\
&= (x^2-1)\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} + 2x\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \Big[a_k k(k-1) - a_{k+2}(k+2)(k+1) + 2a_k k - \alpha(\alpha+1)a_k\Big]x^k \\
&\qquad\qquad -6a_3 x + 2a_1 x - \alpha(\alpha+1)a_1 x - 2a_2 - \alpha(\alpha+1)a_0
\end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich folgt

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}a_0, \quad a_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{6}a_1, \quad a_{k+2} = -\frac{(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k.$$

Insbesondere ergeben sich

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{12}a_2 = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{24}a_0, \\
a_6 &= -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{30}a_4 = -\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{720}a_0
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} a_5 &= -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{20}a_3 = \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{120}a_1, \\ a_7 &= -\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{42}a_5 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{5040}a_1. \end{aligned}$$

Damit sind die Konstanten a_0 und a_1 frei wählbar und wir erhalten als Fundamentalsystem die linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2k+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}$$

und

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2k+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Für $\alpha = 0$ erhalten wir aus $y_1(x)$ die konstante Funktion

$$P_0(x) = 1,$$

während wir für $\alpha = 1$ aus $y_2(x)$ die lineare Funktion

$$P_1(x) = x,$$

erhalten. Für $\alpha = n = 2m \in \mathbb{N}$ gerade definiert $y_1(x)$ ein Polynom

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{2m}(x) &= \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \frac{2m(2m-2)\cdots(2m-2k+2)(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

Entsprechend ergibt sich für $\alpha = n = 2m+1 \in \mathbb{N}$ ungerade aus $y_2(x)$ ein Polynom

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{2m+1}(x) &= \\ &= x + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \frac{2m(2m-2)\cdots(2m-2k+2)(2m+3)(2m+5)\cdots(2m+2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Lemma 4.1. *Für die in* (4.12) *und* (4.13) *angegebenen Polynome gelten die Darstellungen*

$$\widetilde{P}_{2m}(x) = \frac{(m!)^2}{n!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{(2m+2k)!}{(m-k)!(m+k)!(2k)!}x^{2k} \tag{4.14}$$

$$= (-1)^m \frac{(m!)^2}{(n!)^2}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{4.15}$$

und

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{2m+1}(x) &= \frac{m!(m+1)!}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2m+2k+2)!}{(m-k)!(m+k+1)!(2k+1)!}\,x^{2k+1} && (4.16)\\
&= (-1)^m\frac{m!(m+1)!}{n!(n+1)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,. && (4.17)
\end{aligned}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Für die in (4.12) angegebenen Koeffizienten von $\widetilde{P}_{2m}$

$$\frac{2m(2m-2)\cdots(2m-2k+2)(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2k-1)}{(2k)!}$$

ergibt sich durch Herausheben des Faktors 2 in den ersten k Faktoren

$$= 2^k\,\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2k-1)}{(2k)!},$$

Erweiterung mit $(m-k)!$ führt zu

$$= 2^k\,\frac{m!}{(m-k)!}\frac{(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2k-1)}{(2k)!},$$

Erweiterung der fehlenden geradzahligen Koeffizienen ergibt

$$= 2^k\,\frac{m!}{(m-k)!}\frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)\cdots(2m+2k-1)(2m+2k)}{(2k)!(2m+2)(2m+4)\cdots(2m+2k)},$$

Herausheben des Faktors 2 in den k Faktoren im Nenner und Kürzen mit 2^k führt zu

$$= \frac{m!}{(m-k)!}\frac{(2m+1)(2m+2)\cdots(2m+2k)}{(2k)!(m+1)(m+2)\cdots(m+k)},$$

und nochmalige Erweiterung mit $m!$ und $n!$ ergibt schliesslich

$$= \frac{(m!)^2}{n!}\frac{(2m+2k)!}{(m-k)!(m+k)!(2k)!},$$

und somit (4.14), d.h.

$$\widetilde{P}_{2m}(x) = \frac{(m!)^2}{n!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2m+2k)!}{(m-k)!(m+k)!(2k)!}x^{2k}\,.$$

Man beachte, daß die Darstellung des Koeffizienten für $k = 0$ gerade den Wert Eins ergibt. Mit der Substitution $k = m - \ell$ und $2m = n$ folgt

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{2m}(x) &= \frac{(m!)^2}{n!}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^{m-\ell}\frac{(2n-2\ell)!}{\ell!(n-\ell)!(n-2\ell)!}x^{n-2\ell}\\
&= (-1)^m\frac{(m!)^2}{(n!)^2}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^\ell\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!}x^{n-2\ell}\,.
\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2\ell} = \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!} x^{n-2\ell} \quad \text{für } \ell = 0, \dots, m$$

ist

$$\widetilde{P}_{2m}(x) = (-1)^m \frac{(m!)^2}{(n!)^2} \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2\ell}$$

und mit

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2\ell} = 0 \quad \text{für } \ell = m+1, \dots, n$$

ergibt sich (4.15), d.h.

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{2m}(x) &= (-1)^m \frac{(m!)^2}{(n!)^2} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} x^{2n-2\ell} \\ &= (-1)^m \frac{(m!)^2}{(n!)^2} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \,. \end{aligned}$$

Für $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, erfolgt der Beweis analog. Für die in (4.13) angegebenen Koeffizienten von $\widetilde{P}_{2m+1}$ ist

$$\begin{aligned} &\frac{2m(2m-2)\cdots(2m-2k+2)(2m+3)(2m+5)\cdots(2m+2k+1)}{(2k+1)!} \\ &\quad = 2^k \, \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(2m+3)(2m+5)\cdots(2m+2k+1)}{(2k+1)!} \\ &\quad = 2^k \, \frac{m!}{(m-k)!} \, \frac{(2m+3)(2m+5)\cdots(2m+2k+1)}{(2k+1)!} \\ &\quad = 2^k \, \frac{m!}{(m-k)!} \, \frac{(2m+3)(2m+4)(2m+5)(2m+6)\cdots(2m+2k+1)(2m+2k+2)}{(2k+1)!(2m+4)(2m+6)\cdots(2m+2k+2k)} \\ &\quad = \frac{m!}{(m-k)!} \, \frac{(2m+3)(2m+4)\cdots(2m+2k+2)}{(2k+1)!(m+2)(m+2)\cdots(m+k+1)} \\ &\quad = \frac{m!(m+1)!}{(n+1)!} \, \frac{(2m+2k+2)!}{(m-k)!(m+k+1)!(2k+1)!} \end{aligned}$$

und wie im Fall $n = 2m$ folgt (4.16) und somit

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{2m+1}(x) &= \frac{m!(m+1)!}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2m+2k+2)!}{(m-k)!(m+k+1)!(2k+1)!}\,x^{2k+1} \\
&= (-1)^m\frac{m!(m+1)!}{(n+1)!}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^\ell\frac{(2n-2\ell)!}{\ell!(n-\ell)!(n-2\ell)!}\,x^{n-2\ell} \\
&= (-1)^m\frac{m!(m+1)!}{n!(n+1)!}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^\ell\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!}\,x^{n-2\ell} \\
&= (-1)^m\frac{m!(m+1)!}{n!(n+1)!}\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^\ell\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{d^n}{dx^n}\,x^{2n-2\ell} \\
&= (-1)^m\frac{m!(m+1)!}{n!(n+1)!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\,x^{2n-2\ell} \\
&= (-1)^m\frac{m!(m+1)!}{n!(n+1)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,,
\end{aligned}$$

d.h. (4.17). ∎

Definition 4.1. *Die Legendre–Polynome $P_n(x)$ sind definiert als Lösung der Differentialgleichung* (4.11) *für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ mit der Randbedingung $P_n(1) = 1$, d.h.*

$$P_n(x) := \frac{\widetilde{P}_n(x)}{\widetilde{P}_n(1)}\,. \tag{4.18}$$

Lemma 4.2. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\bigg|_{x=1} = 2^n\,n!\,. \tag{4.19}$$

Beweis: Mit der Leibnizschen Formel, siehe zum Beispiel [4, S. 221],

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big[u(x)v(x)\Big] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

ist zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n &= \frac{d^n}{dx^n}\Big[(x+1)^n(x-1)^n\Big] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x+1)^n\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x-1)^n\,.
\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x-1)^n = n(n-1)\cdots(n-\ell+1)(x-1)^{n-\ell}$$

folgt

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x-1)^n\Big|_{x=1} = n(n-1)\cdots(n-\ell+1)(x-1)^{n-\ell}\big|_{x=1} = 0 \quad \text{für } \ell = 0,1,\ldots,n-1$$

und

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n\Big|_{x=1} = n!\,.$$

Damit ist

$$\frac{d}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = (x+1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n\Big|_{x=1} = 2^n\,n!\,.$$

■

Für $n = 2m \in \mathbb{N}$ gerade ergibt sich aus (4.15) und (4.19)

$$\widetilde{P}_{2m}(1) = (-1)^m\frac{(m!)^2}{(n!)^2}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = (-1)^m\frac{(m!)^2}{(n!)^2}\,2^n\,n! = (-1)^m\,2^n\,\frac{(m!)^2}{n!}$$

und somit folgt für die Definition (4.18) der Legendre–Polynome

$$P_{2m}(x) = (-1)^m 2^{-n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2m+2k)!}{(m-k)!(m+k)!(2k)!}x^{2k}. \tag{4.20}$$

Entsprechend ergibt sich für $n = 2m+1 \in \mathbb{N}$ aus (4.17) und (4.19)

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{2m+1}(1) &= (-1)^m\frac{m!(m+1)!}{n!(n+1)!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1}\\ &= (-1)^m\frac{m!(m+1)!}{n!(n+1)!}\,2^n\,n! \;=\; (-1)^m\,2^n\,\frac{m!(m+1)!}{(n+1)!}\end{aligned}$$

und für die Definition (4.18) folgt

$$P_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{-n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2m+2k+2)!}{(m-k)!(m+k+1)!(2k+1)!}\,x^{2k+1}\,. \tag{4.21}$$

Aus den Darstellungen (4.20) und (4.21) der Legendre–Polynome $P_n(x)$ folgt sofort

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n\,.$$

Aus (4.20) und (4.21) in beiden Fällen eine Darstellung der Form

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + p_{n-2}(x) \tag{4.22}$$

mit einem Polynom $p_{n-2}(x)$ vom Grad $n-2$.

Mit (4.15), (4.17) und (4.19) ergibt sich die als Rodrigues–Formel bekannte Darstellung

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \,. \tag{4.23}$$

Aus (4.20) und (4.21) erhalten wir für die ersten sechs Legendre–Polynome

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \,.
\end{aligned}$$

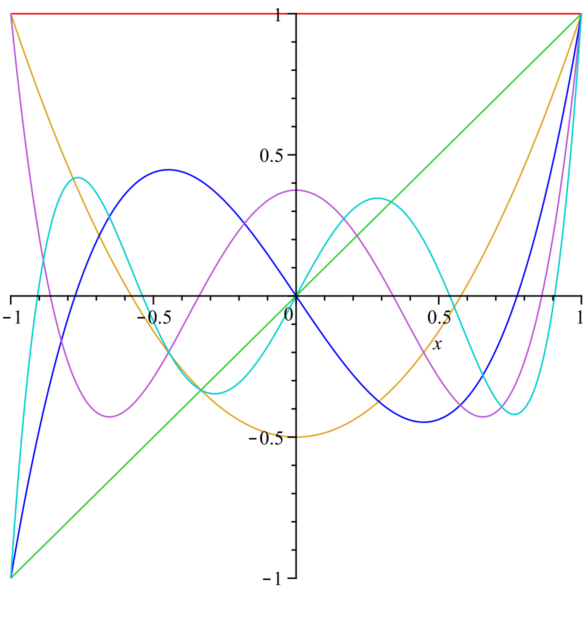

Abbildung 4.1: Legendre–Polynome $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.

Die Legendre–Polynome $P_n(x)$ sind nach Konstruktion Lösung der Differentialgleichung (4.11),

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0 \quad \text{für } x \in (-1, 1) \,.$$

Daraus kann die folgende Orthogonalität abgeleitet werden.

Lemma 4.3. *Für die Legendre–Polynome $P_n(x)$ gilt*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad \textit{für}\, m \neq n \tag{4.24}$$

und somit die Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)f_m(x)\,dx = 0$$

für alle Polynome $f_m(x)$ vom Grad $m < n$. Für $m = n$ ist

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}\,.$$

Beweis: Es gilt

$$[(x^2-1)P_n'(x)]' = (x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) = n(n+1)P_n(x).$$

Für $m \neq n$ folgt dann

$$\begin{aligned}
n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} [(x^2-1)P_n'(x)]'P_m(x)\,dx \\
&= (x^2-1)P_n'(x)P_m(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^2-1)P_n'(x)P_m'(x)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{1} (x^2-1)P_n'(x)P_m'(x)\,dx
\end{aligned}$$

bzw.

$$m(m+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} (x^2-1)P_m'(x)P_n'(x)\,dx.$$

Daraus folgt

$$[n(n+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$$

und somit

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

Die Polynome $\{P_k(x)\}_{k=0}^{m}$ sind also orthogonal und somit linear unabhängig. Damit bilden sie eine Basis im Raum Π_m der Polynome vom Grad m. Daraus folgt

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)f_m(x)\,dx = 0$$

für alle Polynome $f_m(x)$ vom Grad $m < n$.

Für $m = n$ folgt durch partielle Integration zunächst

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 \, dx = x\,[P_n(x)]^2\Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_n'(x)\,dx = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_n'(x)\,dx\,.$$

Mit (4.22) ist

$$\begin{aligned} x\,P_n'(x) &= x\left[\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,n\,x^{n-1} + p_{n-2}'(x)\right] = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,n\,x^n + x\,p_{n-2}'(x) \\ &= n\left[\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,x^n + p_{n-2}(x)\right] + x\,p_{n-2}'(x) - np_{n-2}(x) \\ &= n\,P_n(x) + x\,p_{n-2}'(x) - np_{n-2}(x)\,. \end{aligned}$$

Das Polynom $xp_{n-2}'(x) - nP_{n-2}(x)$ ist ein Polynom vom Grad $n-2$. Daher folgt

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_n'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)\Big[n\,P_n(x) + x\,p_{n-2}'(x) - np_{n-2}(x)\Big]\,dx = n\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx$$

und somit gilt

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx = 2 - 2n\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx,$$

woraus

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx = \frac{2n}{2n+1}\,.$$

folgt. ■

Die Legendre–Polynome $\{P_k\}_{k=0}^n$ bilden eine Basis im Raum der Polynome vom Grad n. Jedes Polynom $f_m(x)$ vom Grad $m \le n$ kann als Linearkombination der Legendre–Polynome $P_k(x)$ dargestellt werden,

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x)\,.$$

Multiplikation mit $P_\ell(x)$ und Integration für $x \in (-1,1)$ ergibt mit der Orthogonalität der Legendre–Polynome

$$\int_{-1}^{1} f_m(x)P_\ell(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} c_k \int_{-1}^{1} P_k(x)P_\ell(x)\,dx = c_\ell\,\frac{2}{2\ell+1},$$

d.h.

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f_m(x)P_k(x)\,dx \quad \text{für } k = 0,1,2,\ldots,m.$$

Für ein beliebiges Polynom $f_m(x)$ vom Grad $m < n$ folgt mit (4.24) die Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)f_m(x)dx = \sum_{k=0}^{m} c_k\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)dx = 0 \quad \text{für } m < n. \tag{4.25}$$

Die Orthogonalität (4.24) der Legendre–Polynome ermöglicht eine andere, rekursive Definition der Legendre–Polynome. Ausgehend von $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = 1$ können orthogonale Polynome $P_{n+1}(x)$ durch das Gram–Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren bestimmt werden. Wie bei der Methode von Arnoldi wird dabei als Ausgangspolynom $xP_n(x)$ gewählt, d.h. für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist

$$\widehat{P}_{n+1}(x) = xP_n(x) - \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} P_k(x), \quad P_{n+1}(x) = \frac{\widehat{P}_{n+1}(x)}{\widehat{P}_{n+1}(1)}\,.$$

Aus der Forderung der Orthogonalität,

$$\int_{-1}^{1} \widehat{P}_{n+1}(x)P_\ell(x)dx = \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_\ell(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} \int_{-1}^{1} P_k(x)P_\ell(x)dx \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } \ell = 0, \ldots, n,$$

folgt

$$\beta_{nk} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_k(x)dx \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Für $k < n-1$ ist $xP_k(x)$ ein Polynom vom Grad $k+1$, dieses kann als Linearkombination der Legendre–Polynome $\{P_j(x)\}_{j=0}^{k+1}$,

$$xP_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} c_j P_j(x), \quad c_j = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^{1} xP_k(x)P_j(x)dx,$$

dargestellt werden. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\beta_{nk} &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_k(x)dx \\
&= \frac{2k+1}{2} \sum_{j=0}^{k+1} c_j \int_{-1}^{1} P_n(x)P_j(x)dx = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-2.
\end{aligned}$$

Aus den Darstellungen (4.20) und (4.21) der Legendre–Polynome folgt

$$P_{2m}(-x) = P_{2m}(x), \quad P_{2m+1}(-x) = -P_{2m+1}(x) \quad \text{für alle } x \in (-1, 1)$$

und in beiden Fällen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\beta_{nn} &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} x\,[P_n(x)]^2\,dx \\
&= \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^{0} x\,[P_n(x)]^2\,dx + \int_{0}^{1} x\,[P_n(x)]^2\,dx\right] \\
&= \frac{2n+1}{2} \left[-\int_{0}^{1} x\,[P_n(-x)]^2\,dx + \int_{0}^{1} x\,[P_n(x)]^2\,dx\right] \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Zu bestimmen bleibt

$$\beta_{nn-1} = \frac{2n-1}{2} \int_{-1}^{1} x P_n(x) P_{n-1}(x) dx \,.$$

Mit (4.22) ist

$$\begin{aligned} x P_{n-1}(x) &= x \left[\frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}((n-1)!)^2} x^{n-1} + p_{n-3}(x) \right] \\ &= \frac{2n^2}{2n(2n-1)} \frac{((2n)!}{2^n(n!)^2} x^n + x p_{n-3}(x) \\ &= \frac{n}{(2n-1)} \left[\frac{((2n)!}{2^n(n!)^2} x^n + p_{n-2}(x) \right] + x p_{n-3}(x) - \frac{2n^2}{2n(2n-1)} p_{n-2}(x) \\ &= \frac{n}{(2n-1)} P_n(x) + x p_{n-3}(x) - \frac{2n^2}{2n(2n-1)} p_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Aus der Orthogonalität (4.25) der Legendre–Polynome $P_n(x)$ und Polynomen $f_m(x)$ vom Grad $m < n$ folgt dann

$$\beta_{nn-1} = \frac{n}{2} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 \, dx = \frac{n}{2} \frac{2}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \,.$$

Damit ist

$$\widehat{P}_{n+1}(x) = x P_n(x) - \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x),$$

d.h., mit $P_n(1) = P_{n-1}(1) = 1$,

$$\widehat{P}_{n+1}(1) = 1 - \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \,.$$

Insgesamt ist

$$P_{n+1}(x) = \frac{\widehat{P}_{n+1}(x)}{\widehat{P}_{n+1}(1)} = \frac{2n+1}{n+1} \left[x P_n(x) - \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) \right],$$

d.h.

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x) \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots. \tag{4.26}$$

Lemma 4.4. *Die Nullstellen $x_i^{(n)}$ des Legendre–Polynoms $P_n(x)$ sind reell, einfach, und es gilt $x_i^{(n)} \in (-1, 1)$.*

Beweis: Sei $x_0 = a + ib$, $b \neq 0$, eine komplexe Nullstelle von $P_n(x)$. Da die Koeffizienten des Legendre–Polynoms reell sind, ist auch $\overline{x}_0 = a - ib$ Nullstelle von $P_n(x)$. Für das Polynom

$$Q_{n-2}(x) := \frac{P_n(x)}{(x - x_0)(x - \overline{x}_0)} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^2 + b^2} \quad \text{für } x \in (-1, 1)$$

ergibt sich mit, siehe (4.25),

$$0 = \int_{-1}^{1} P_n(x) Q_{n-2}(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{[P_n(x)]^2}{(x-a)^2 + b^2} \, dx > 0$$

ein Widerspruch, d.h. $P_n(x)$ kann keine komplexen Nullstellen besitzen.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 1$ eine Nullstelle von $P_n(x)$. Für das Polynom

$$Q_{n-1}(x) = \frac{P_n(x)}{(x_0 - x)} \quad \text{für } x \in (-1, 1)$$

folgt wieder mit (4.25)

$$0 = \int_{-1}^{1} P_n(x) Q_{n-1}(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{[P_n(x)]^2}{(x_0 - x)} dx > 0$$

ein Widerspruch, wodurch eine reelle Nullstelle $x_0 > 1$ ausgeschlossen wird. Aufgrund der Symmetrien der Legendre–Polynome $P_n(x)$ gibt es somit auch keine reelle Nullstelle $x_0 < -1$. Wegen $P_n(1) = 1$ und $P_n(-1) = (-1)^n$ gibt es somit n reelle Nullstellen in $(-1, 1)$. Für eine mehrfache Nullstelle ist

$$Q_{n-2}(x) := \frac{P_n(x)}{(x - x_0)^2}$$

und mit (4.25) ergibt sich wegen

$$0 = \int_{-1}^{1} P_n(x) Q_{n-1}(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{[P_n(x)]^2}{(x - x_0)^2} dx > 0$$

wieder ein Widerspruch. Damit gibt es im Intervall $(-1, 1)$ n einfache reelle Nullstellen $x_i^{(n)}$ des Legendre–Polynoms $P_n(x)$. ■

4.3 Tschebyscheff Differentialgleichung

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung von Tschebyscheff,

$$(x^2 - 1) y''(x) + x y'(x) - \alpha^2 y(x) = 0 \quad \text{für } x \in (-1, 1). \tag{4.27}$$

Einsetzen des Potenzreihenansatzes (4.10) für den regulären Punkt $x_0 = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= (x^2 - 1) y''(x) + x y'(x) - \alpha^2 y(x) \\
&= n(x^2 - 1) \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1) x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \Big[a_k k (k-1) - a_{k+2} (k+2)(k+1) + a_k k - \alpha^2 a_k \Big] x^k \\
&\qquad\qquad -6 a_3 x + a_1 x - \alpha^2 a_1 x - 2 a_2 - \alpha^2 a_0
\end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich folgt

$$a_2 = -\frac{\alpha^2}{2}a_0, \quad a_3 = -\frac{\alpha^2-1}{6}a_1, \quad a_{k+2} = -\frac{\alpha^2-k^2}{(k+2)(k+1)}a_k.$$

Insbesondere ergeben sich

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{\alpha^2-4}{12}a_2 = \frac{(\alpha^2-4)\alpha^2}{24}a_0,\\
a_6 &= -\frac{\alpha^2-16}{30}a_4 = -\frac{(\alpha^2-16)(\alpha^2-4)\alpha^2}{720}a_0
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
a_5 &= -\frac{\alpha^2-9}{20}a_3 = \frac{(\alpha^2-9)(\alpha^2-1)}{120}a_1\\
a_7 &= -\frac{\alpha^2-25}{48}a_5 = -\frac{(\alpha^2-25)(\alpha^2-9)(\alpha^2-1)}{48\cdot 120}a_1.
\end{aligned}$$

Damit sind die Konstanten a_0 und a_1 frei wählbar und wir erhalten als Fundamentalsystem die linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^2(\alpha^2-4)(\alpha^2-16)\cdots(\alpha^2-(2k-2)^2)}{(2k)!}x^{2k}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha^2-(2j)^2)\,\frac{1}{(2k)!}\,x^{2k},\\
y_2(x) &= x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(\alpha^2-1)(\alpha^2-9)(\alpha^2-25)\cdots(\alpha^2-(2k-1)^2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\
&= x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha^2-(2j+1)^2)\,\frac{1}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}\,.
\end{aligned}$$

Für $\alpha = 0$ erhalten wir aus $y_1(x)$ die konstante Funktion

$$T_0(x) = 1,$$

während wir für $\alpha = 1$ aus $y_2(x)$ die lineare Funktion

$$T_1(x) = x$$

erhalten. Für $\alpha = n = 2m \in \mathbb{N}$ gerade definiert $y_1(x)$ ein Polynom

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{2m}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} ((2m)^2 - (2j)^2) \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} (m-j)(m+j) \frac{1}{(2k)!} (2x)^{2k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{m(m+k-1)!}{(m-k)!} \frac{1}{(2k)!} (2x)^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m(m+k-1)!}{(m-k)!} \frac{1}{(2k)!} (2x)^{2k} ,
\end{aligned}$$

und mit der Substitution $k = m - \ell$ ist

$$\widetilde{T}_{2m}(x) = (-1)^m m \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \frac{(n-\ell-1)!}{\ell!} \frac{1}{(n-2\ell)!} (2x)^{n-2\ell} . \tag{4.28}$$

Entsprechend ergibt sich für $\alpha = n = 2m+1 \in \mathbb{N}$ ungerade aus $y_2(x)$ das Polynom

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{2m+1}(x) &= x + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} ((2m+1)^2 - (2j+1)^2) \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= x + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} 2^2 (m-j)(m+j+1) \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= x + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{(m+k)!}{(m-k)!} \frac{1}{(2k+1)!} (2x)^{2k+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{(m+k)!}{(m-k)!} \frac{1}{(2k+1)!} (2x)^{2k+1} \\
&= (-1)^m \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \frac{(n-\ell-1)!}{\ell!} \frac{1}{(n-2\ell))!} (2x)^{n-2\ell} . && (4.29)
\end{aligned}$$

Lemma 4.5. *Für die in* (4.28) *und* (4.29) *angegebenen Polynome gelten die Darstellungen*

$$\widetilde{T}_{2m}(x) = (-1)^m \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2-1} \right)^{2m} + \left(x - \sqrt{x^2-1} \right)^{2m} \right] \tag{4.30}$$

und

$$\widetilde{T}_{2m+1}(x) = (-1)^m \frac{1}{2m+1} \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2-1} \right)^{2m} + \left(x - \sqrt{x^2-1} \right)^{2m} \right] . \tag{4.31}$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \quad = \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\left(x^2-1\right)^{k/2} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}\left(x^2-1\right)^{k/2}\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[1+(-1)^k\right]\binom{n}{k}x^{n-k}\left(x^2-1\right)^{k/2} \\
&\quad = \sum_{\substack{k=0\\ gerade}}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\left(x^2-1\right)^{k/2}.
\end{aligned}$$

Für $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$ und $k = 2\ell$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \quad &= \quad \sum_{\ell=0}^{m}\binom{n}{2\ell}x^{n-2\ell}\left(x^2-1\right)^{\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{n}{2\ell}x^{n-2\ell}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}(-1)^j x^{2\ell-2j} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m}\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^j\binom{n}{2\ell}\binom{\ell}{j}x^{n-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{m}\sum_{\ell=j}^{m}(-1)^j\binom{n}{2\ell}\binom{\ell}{j}x^{n-2j}\,.
\end{aligned}$$

Mit

$$\sum_{\ell=j}^{m}\binom{2m}{2\ell}\binom{\ell}{j} = 2^{2(m-j)}\frac{m(2m-j-1)!}{j!(2m-2j)!} = 2^{n-2j}\frac{m(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}$$

für $n = 2m$ und

$$\sum_{\ell=j}^{m}\binom{2m+1}{2\ell}\binom{\ell}{j} = 2^{2(m-j)}\frac{(2m+1)(2m-j)!}{j!(2m+1-2j)!} = 2^{n-2j-1}\frac{n(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}$$

für $n = 2m+1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \quad &= \quad \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{m(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}(2x)^{n-2j} \\
&= \quad (-1)^m\widetilde{T}_{2m}(x)
\end{aligned}$$

für $n = 2m$ und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \quad &= \quad \frac{n}{2}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}(2x)^{n-2j} \\
&= \quad (-1)^m n\widetilde{T}_{2m+1}(x)
\end{aligned}$$

für $n = 2m + 1$. ■

Definition 4.2. *Die Tschebyscheff–Polynome* $T_n(x)$ *sind definiert als Lösung der Differentialgleichung* (4.27) *für* $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ *mit der Randbedingung* $T_n(1) = 1$, *d.h.*

$$T_n(x) = \frac{\widetilde{T}_n(x)}{\widetilde{T}_n(1)}\,.$$

Mit (4.30) und (4.31) ist

$$\widetilde{T}_{2m}(1) = (-1)^m, \quad \widetilde{T}_{2m+1}(1) = (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

und es folgt

$$T_{2m}(x) = m \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \frac{(2m-\ell-1)!}{\ell!(2m-2\ell)!}\,(2x)^{2m-2\ell} \tag{4.32}$$

und

$$T_{2m+1}(x) = \frac{2m+1}{2} \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \frac{(2m-\ell)!}{\ell!(2m+1-2\ell))!}(2x)^{2m+1-2\ell}\,. \tag{4.33}$$

Mit (4.30) und (4.31) folgt dann die alternative Darstellung

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right]\,. \tag{4.34}$$

Mit (4.32) und (4.33) erhalten wir für die ersten sechs Tschebyscheff–Polynome

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\,.
\end{aligned}$$

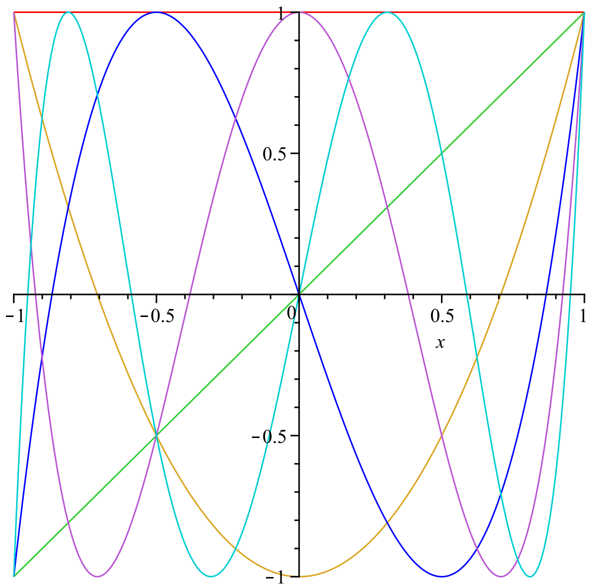

Abbildung 4.2: Tschebyscheff–Polynome $T_0(x), \ldots, T_5(x)$.

Andere Beispiele für Differentialgleichungen der Form (4.9) sind die Airysche Differentialgleichung

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!} \right] + a_1 \left[x + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!} \right], \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},$$

die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2) y(x) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

oder die Legendre–Differentialgleichung

$$(x^2 - 1) y''(x) + 2xy'(x) - \alpha(\alpha + 1) y(x) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Für weitere Betrachtungen dieser Differentialgleichungen, insbesondere für deren Anwendungen in der mathematischen Physik, sei hier auf [?] verwiesen.

Nach Konstruktion ist

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_{2m}(x) &= (-1)^m 4^m \prod_{j=0}^{m-1} (m-j)(m+j) \frac{1}{(2m)!} x^{2m} + p_{2m-2}(x) \\ &= (-1)^m 4^m m(2m-1)! \frac{1}{(2m)!} x^{2m} + p_{2m-2}(x) \\ &= (-1)^m 2^{2m-1} x^{2m} + p_{2m-2}(x) \end{aligned} \tag{4.35}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{2m+1}(x) &= (-1)^m \prod_{j=0}^{m-1}((2m+1)^2-(2j+1)^2)\,\frac{1}{(2m+1)!}\,x^{2m+1}+p_{2m-1}(x)\\ &= (-1)^m 2^{2m}\prod_{j=0}^{m-1}(m-j)(m+j+1)\,\frac{1}{(2m+1)!}\,x^{2m+1}+p_{2m-1}(x)\end{aligned}$$